

Du signal physique à une image médicale exploitable

Les artefacts d'acquisition

Réponse de l'appareil d'imagerie

Modification du signal avant détection

Correction des artefacts (planaire & tomographie)

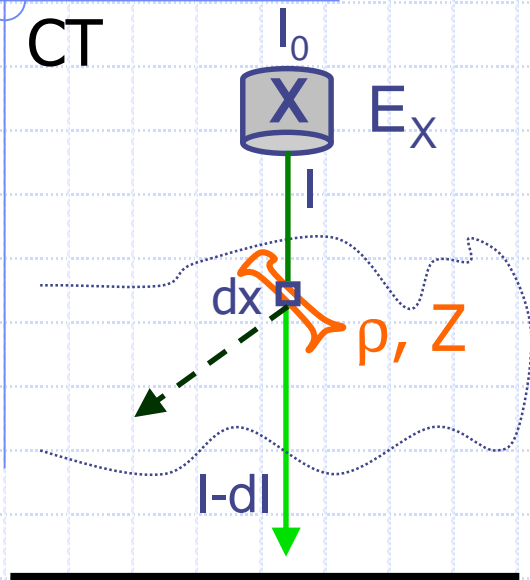
UE optionnelle DFGSM : Imagerie métabolique et fonctionnelle
26 mars 2015. 14h-18h. D. Mariano-Goulart

PLAN DU COURS

- HISTORIQUE
- TRACEURS EN IMAGERIE FONCTIONNELLE
- **SIGNAL PHYSIQUE → IMAGE MEDICALE**
 - Quel paramètre physique mesure-t-on ?
 - Artefacts liés à la formation de l'image ?
 - Artefacts d'atténuation en imagerie d'émission
 - Corrections en imagerie planaire
 - Corrections en imagerie tomographique
- EXTRACTION DE PARAMETRES PHYSIOLOGIQUES ET DIAGNOSTIQUES
 - CINETIQUE DES TRACEURS
 - EXPLOITATION D'ACQUISITIONS
 - EXTRACTION DE PARAMETRES PHYSIOLOGIQUES A PARTIR DE MODELES PHARMACOCINETIQUES ET STATISTIQUES (GLUCOSE, IRMf, NEURO)

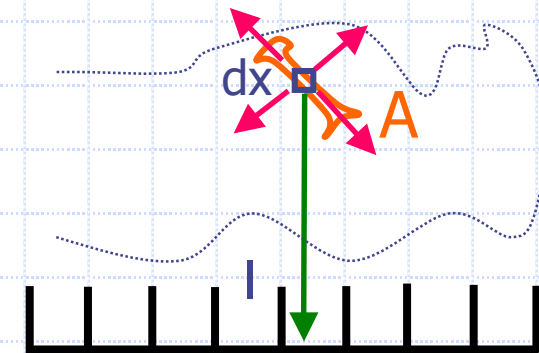
IMAGERIE DE TRANSMISSION & D'EMISSION

CT

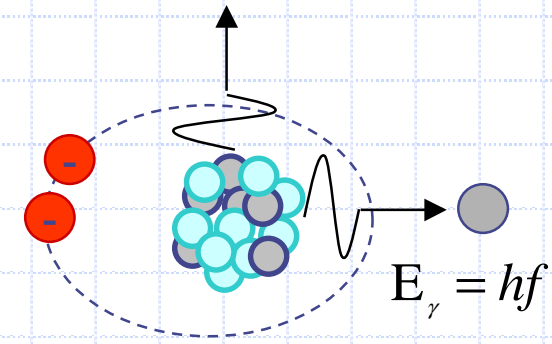
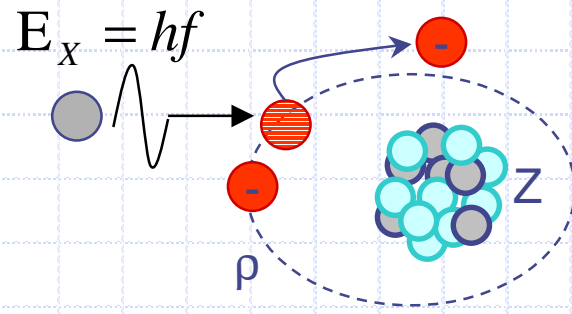


Atténuation photo-électrique

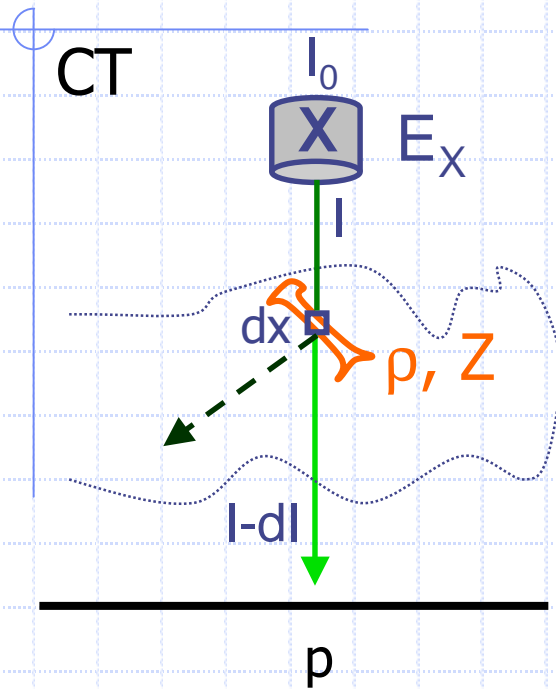
SPECT



Emission gamma



IMAGERIE DE TRANSMISSION



$$\mu = -\frac{dI}{I dx} \text{ cm}^{-1} \Rightarrow I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

$$p = \mu = -\frac{1}{x} \ln \frac{I}{I_0} \text{ est la mesure}$$

$$\mu_{PE} = k \cdot \frac{\rho \cdot Z^3}{E_x^3}$$

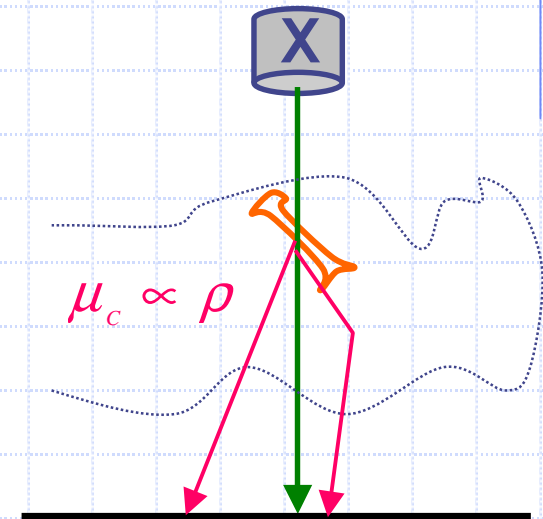
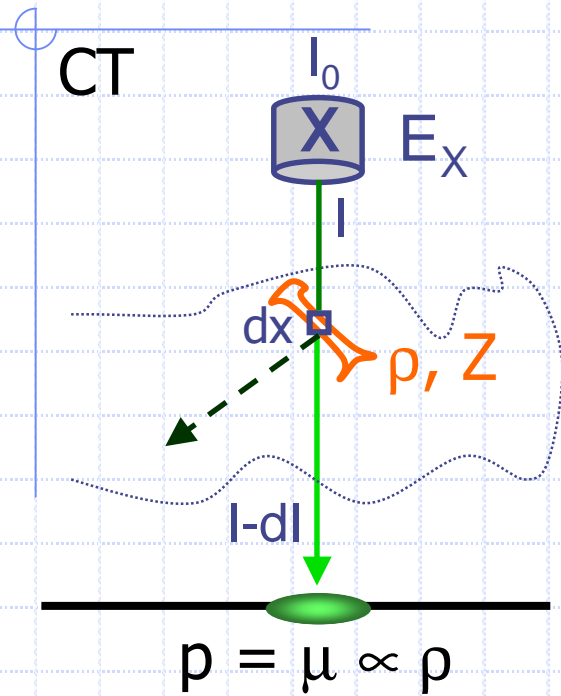
est proportionnel à $\rho \cdot Z^3$

$$\mu_c = k \cdot \rho$$

est proportionnel à ρ

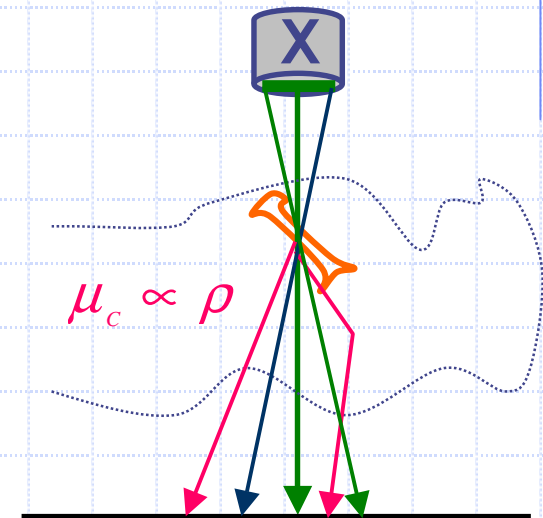
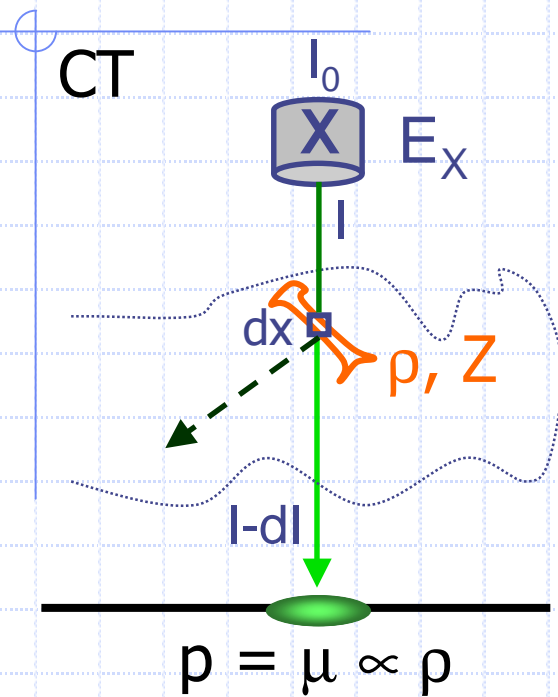
} $\Rightarrow p \propto \rho$

IMAGERIE DE TRANSMISSION



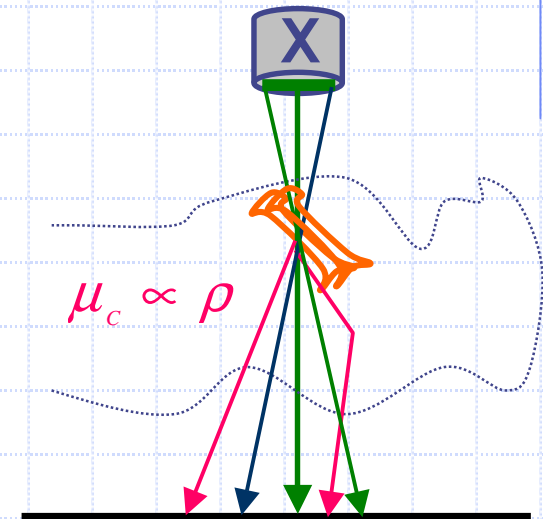
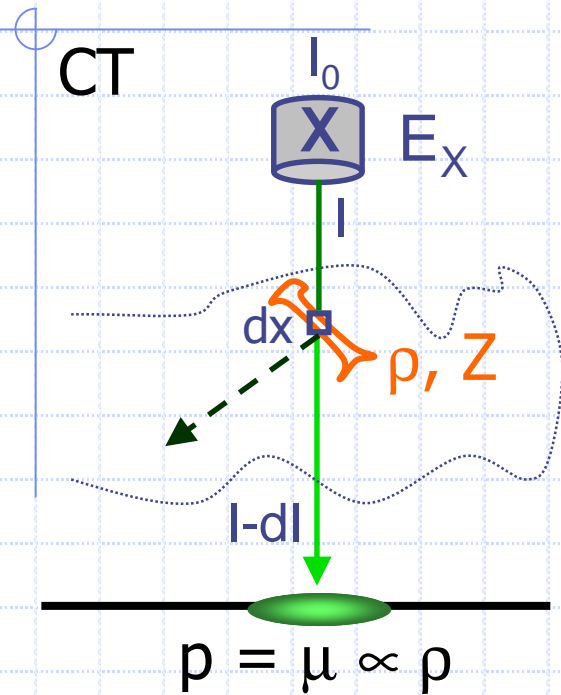
Flou de diffusé (Compton)

IMAGERIE DE TRANSMISSION



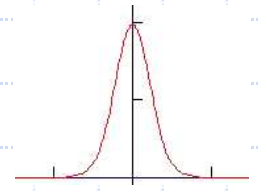
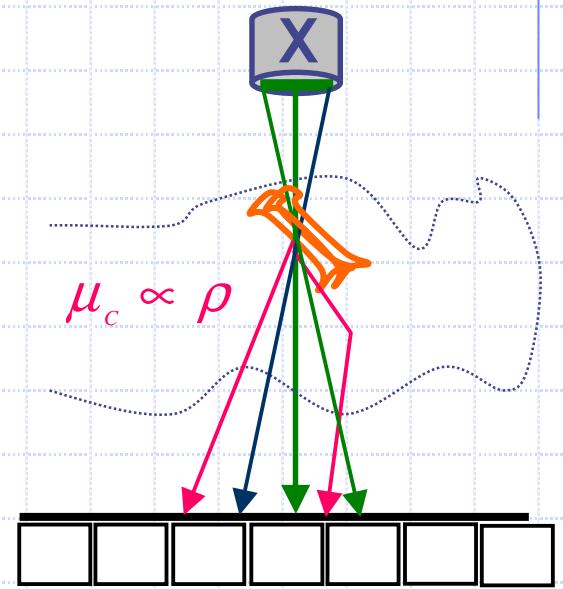
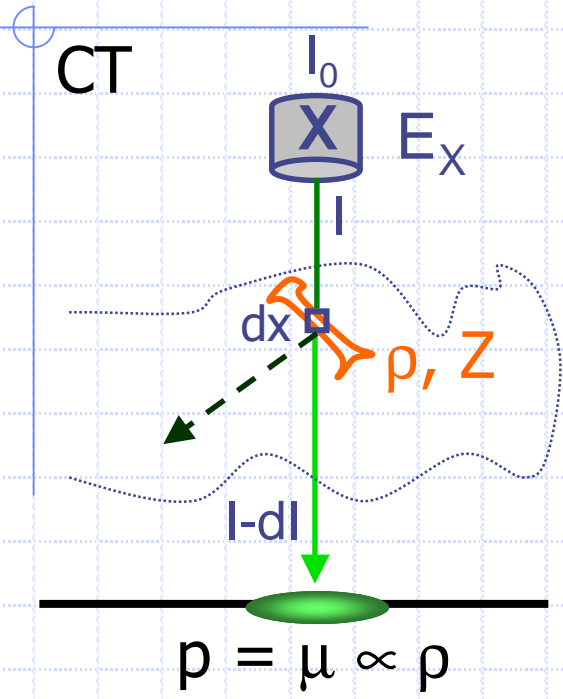
Flou de diffusé (Compton)
Flou géométrique (foyer)

IMAGERIE DE TRANSMISSION



- Flou de diffusé (Compton)
- Flou géométrique (foyer)
- Flou cinétique

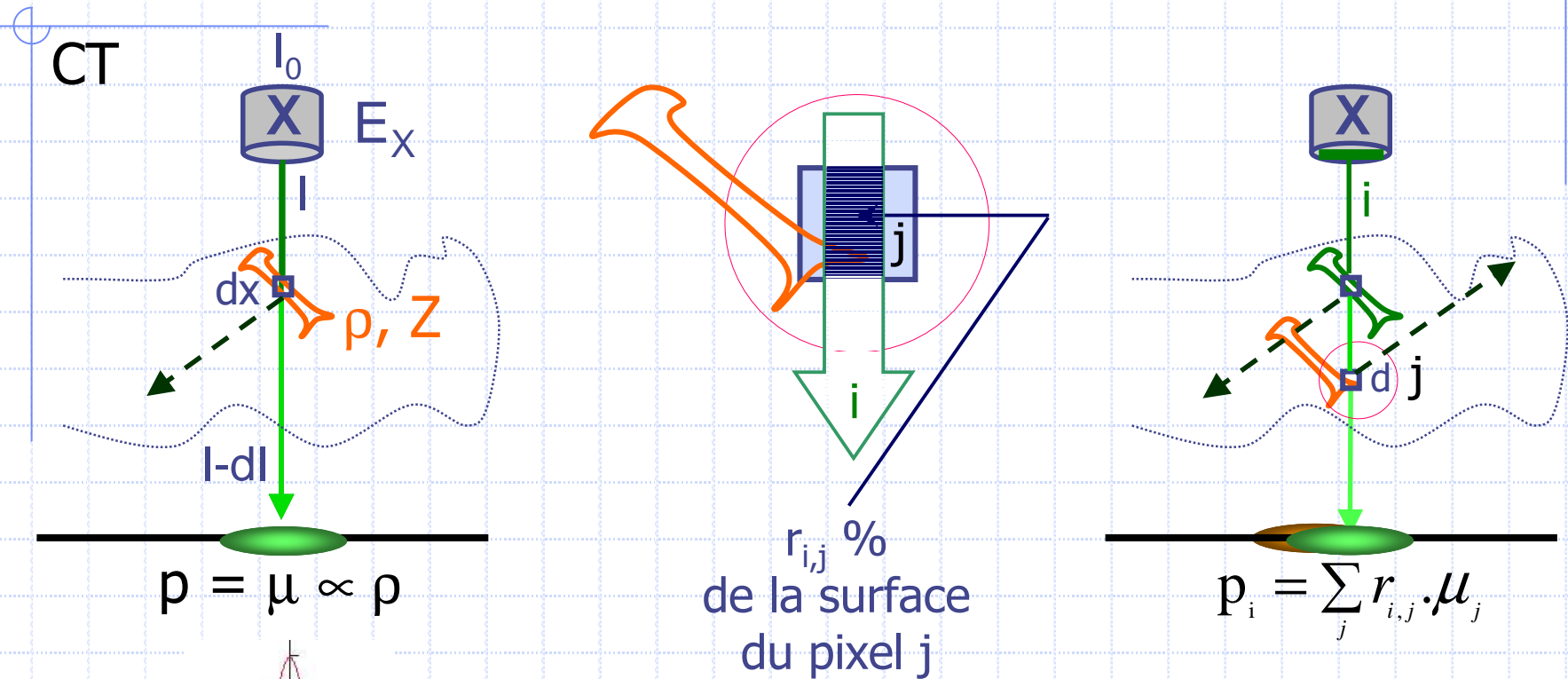
IMAGERIE DE TRANSMISSION



$$h(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}}$$

- Flou de diffusé (Compton)
- Flou géométrique (foyer)
- Flou cinétique
- Flou d'écran (pixel)

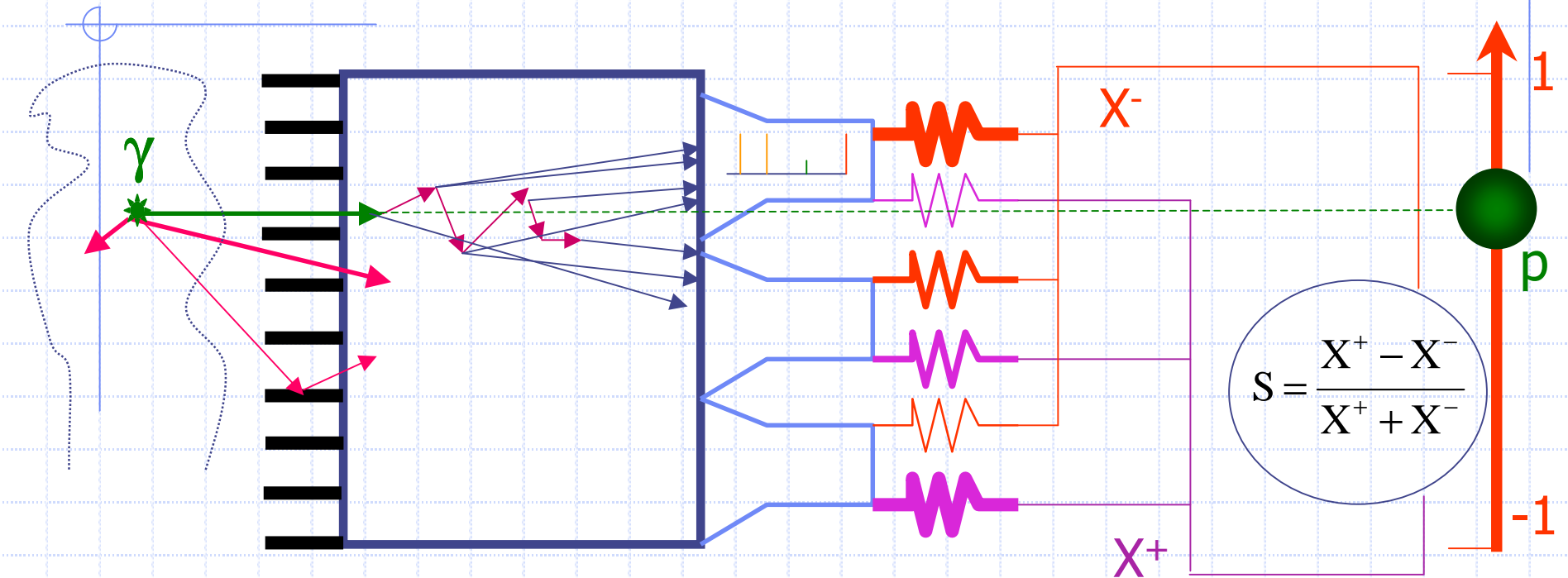
IMAGERIE DE TRANSMISSION TOMOGRAPHIQUE



$$h(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}}$$

$$p_i = r_{i,1} \mu_1 + r_{i,2} \mu_2 + \dots + r_{i,n} \mu_n$$

IMAGERIE D'EMISSION



Collimateur

Scintillateur

PM

Localisation

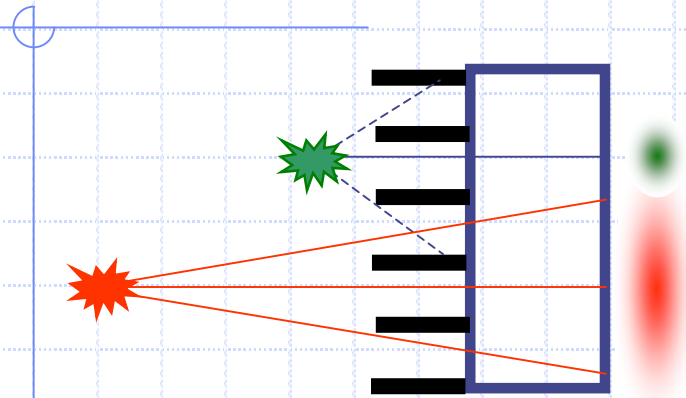
Réponse géométrique, Pénétration et diffusion septales

Diffusion Compton dans le cristal

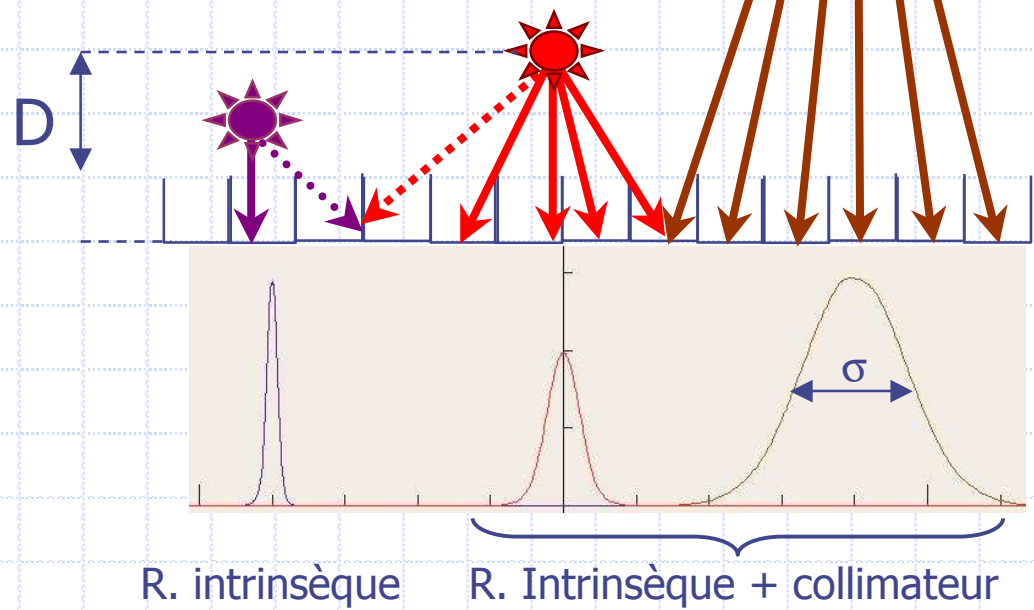
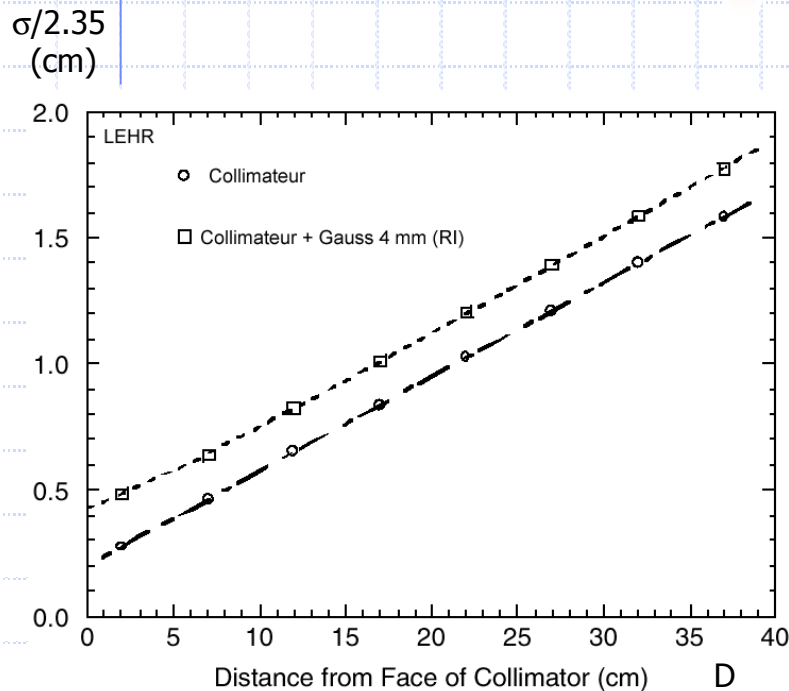
Incertitudes de localisation

réponse intrinsèque

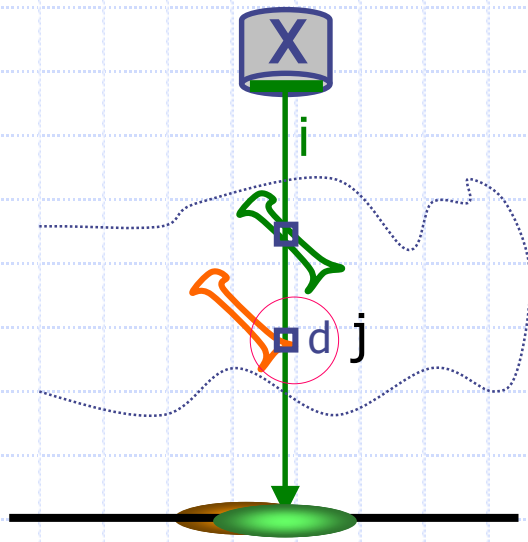
IMAGERIE D'EMISSION



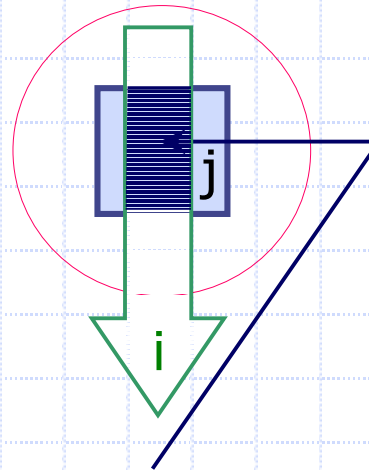
$$h(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}}$$



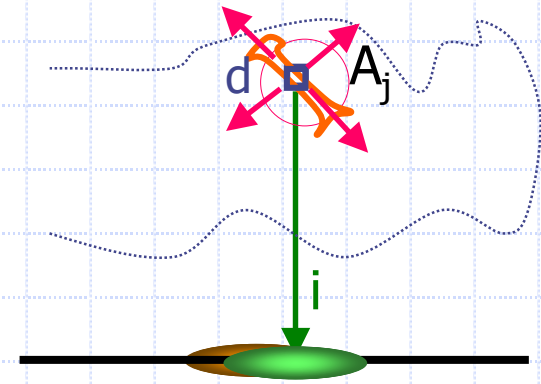
IMAGERIE TOMOGRAPHIQUE



$$p_i = \sum_j r_{i,j} \cdot \mu_j$$



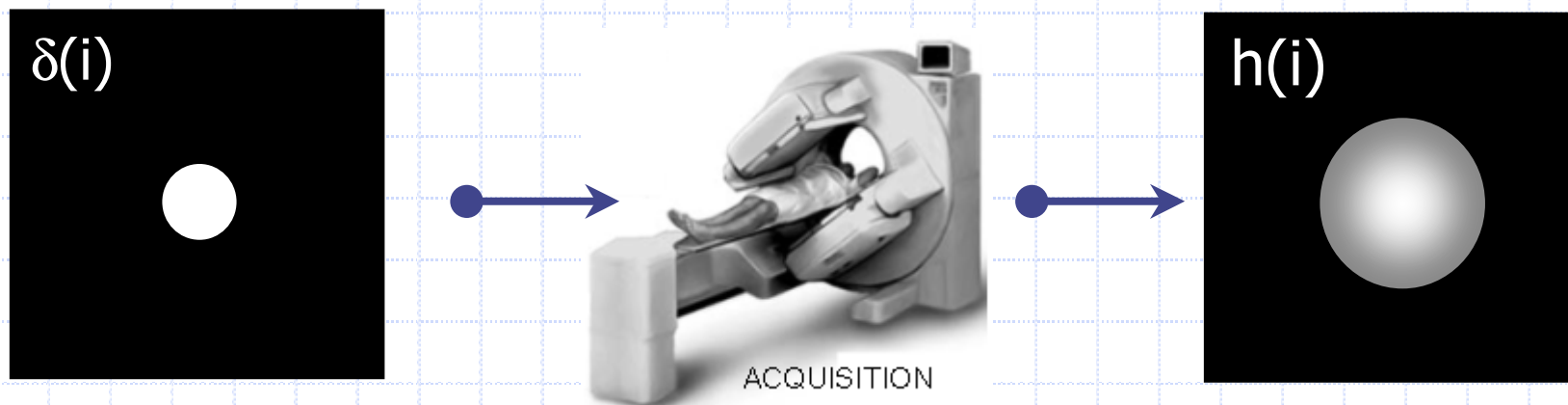
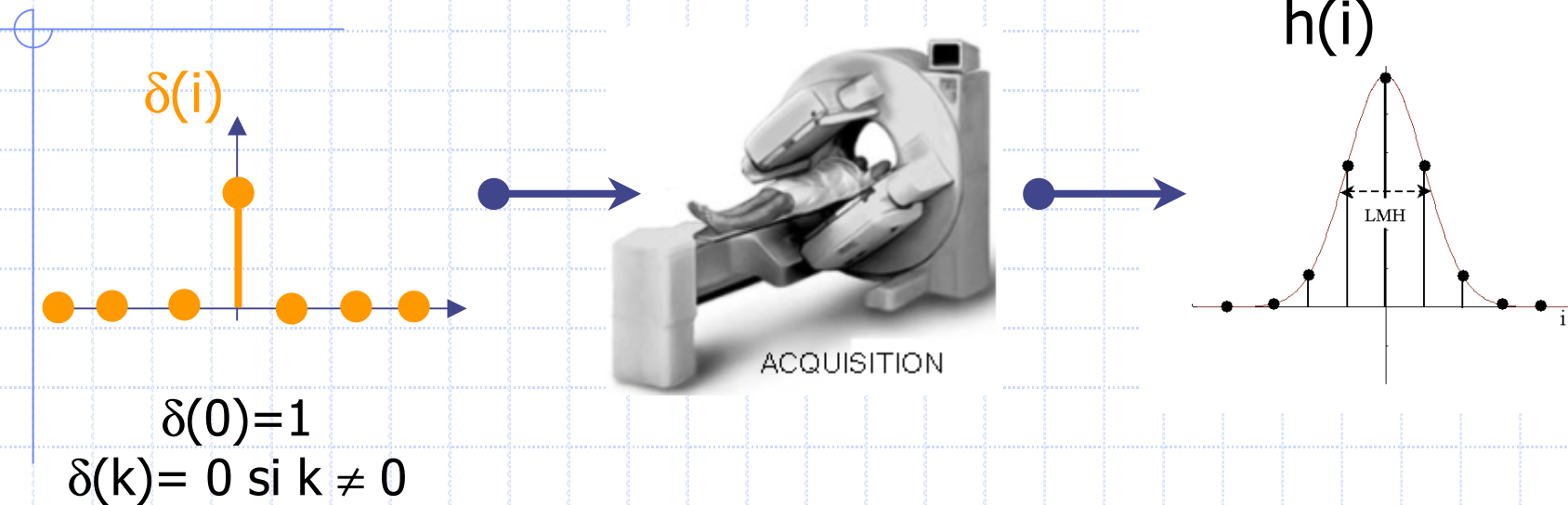
$r_{i,j}$ %
de la surface
du pixel j



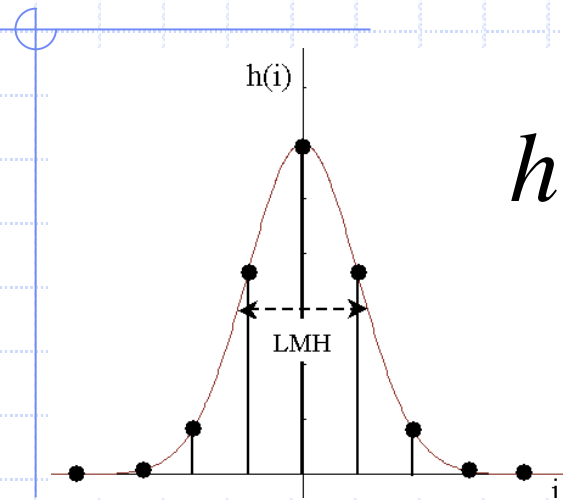
$$p_i = \sum_j r_{i,j} \cdot A_j$$

$$p_i = r_{i,1} \mu_1 + r_{i,2} \mu_2 + \dots + r_{i,n} \mu_n \quad p_i = r_{i,1} A_1 + r_{i,2} A_2 + \dots + r_{i,n} A_n$$

REPOSE IMPULSIONNELLE



LMH DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE



$$h(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}}$$

Largeur à Mi-Hauteur
Full Width at Half Maximum

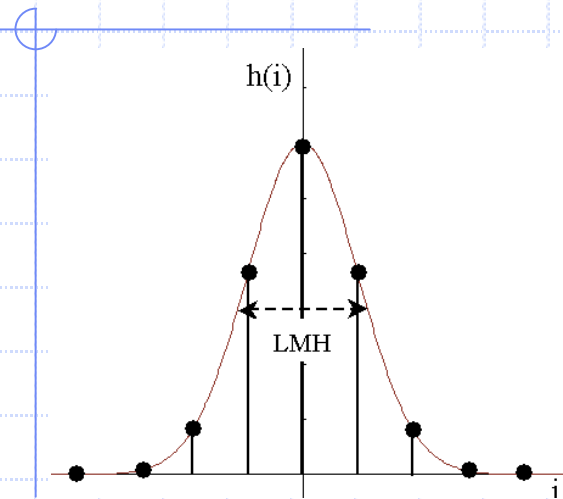
$$h\left(\frac{LMH}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\left(\frac{LMH}{2}\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \frac{\left(\frac{LMH}{2}\right)^2}{2\sigma^2} = \frac{LMH^2}{8\sigma^2}$$

$$\Rightarrow LMH = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \approx 2,36\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{LMH \approx 2,36\sigma}$$

LMH DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE

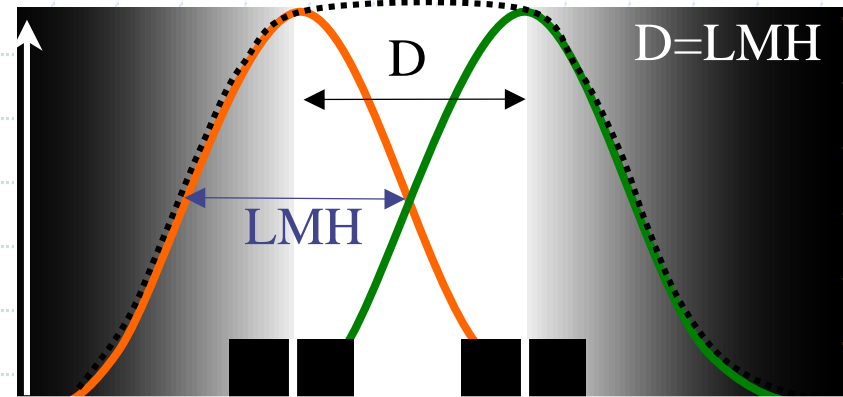
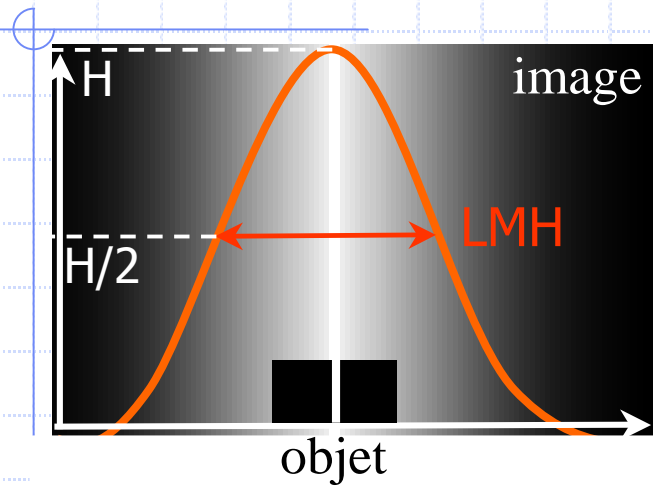


$$h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \cdot i^2} = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \cdot i^2}$$

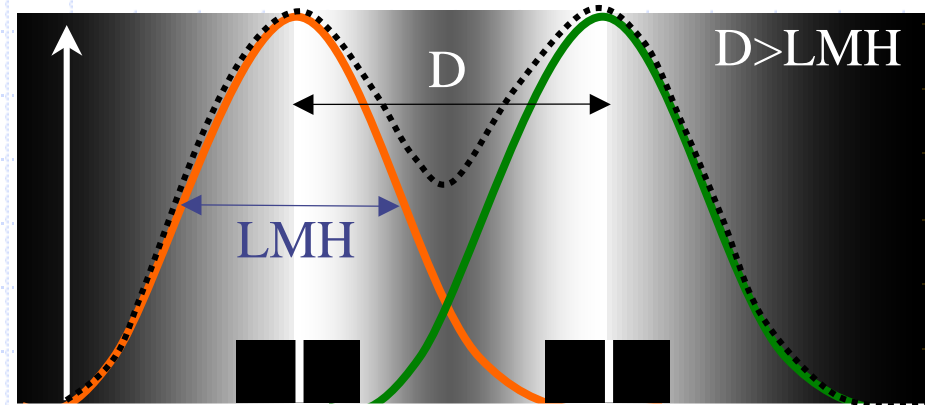
$$k = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

Largeur à Mi-Hauteur
Full Width at Half Maximum

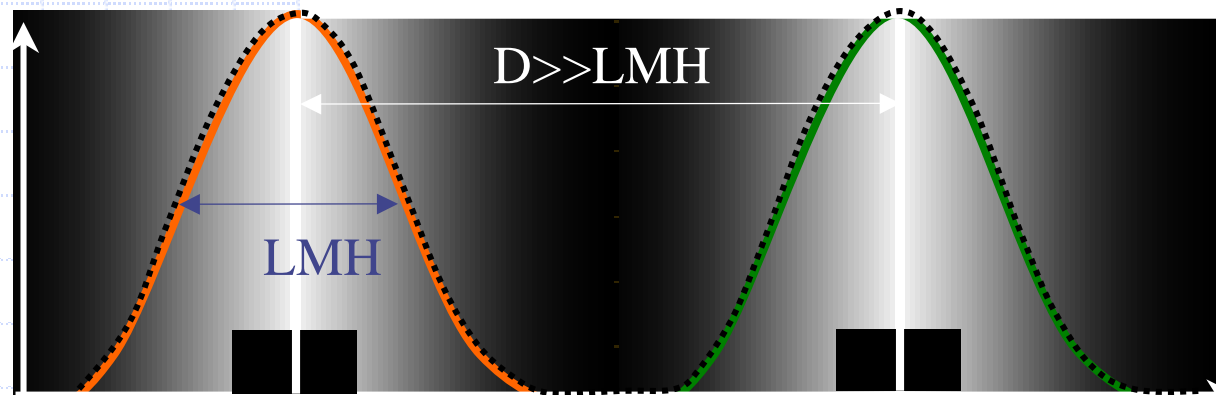
Interprétation 1



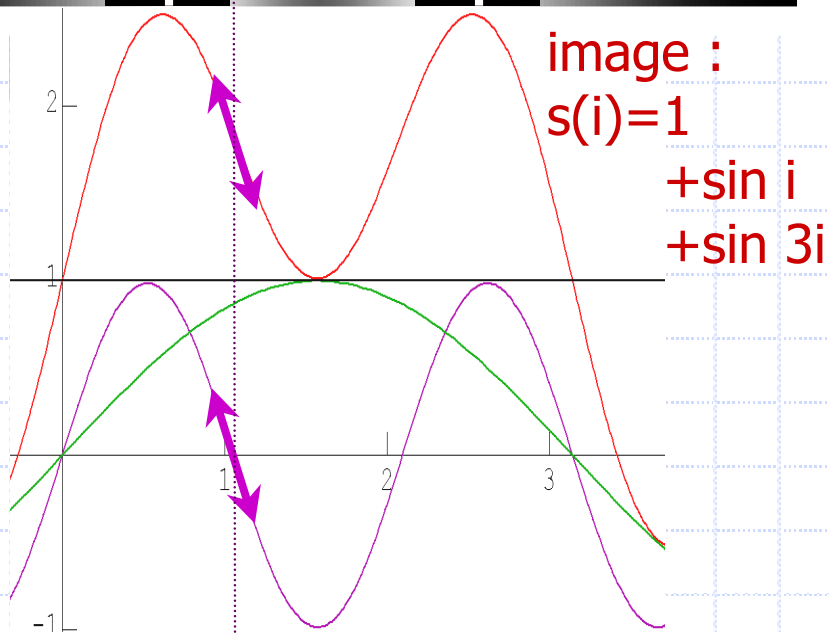
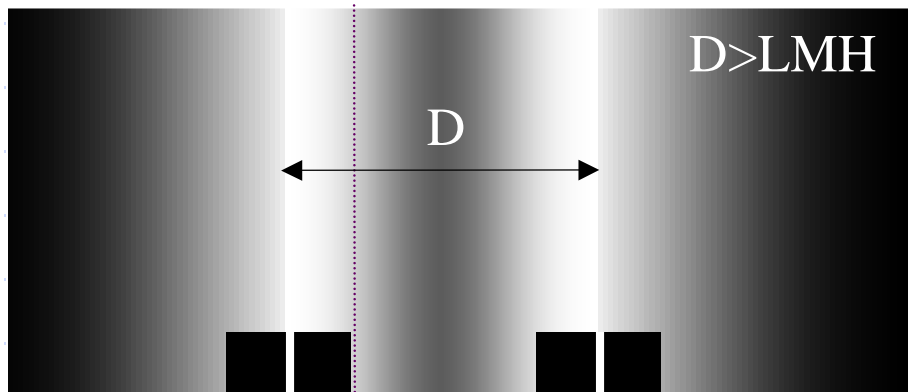
$D \leq LMH \Rightarrow$ images fusionnées



$D > LMH \Rightarrow$
images
indépendantes



Interprétation 2



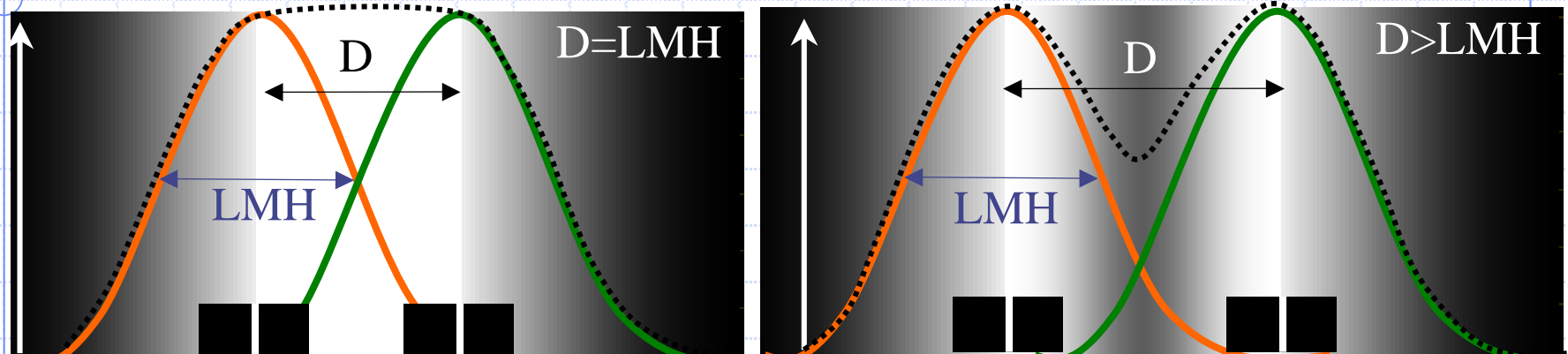
composante HF = $\sin(3i) = \sin(2\pi f_{\max} \cdot i)$
 $f_{\max} = 3/2\pi = 3/\text{tour} \Leftrightarrow D_{\min} = 2\pi/3 \text{ mm}$

Chaque composante fréquentielle de la TF code une certaine vitesse de variation des niveaux de gris d'un pixel à l'autre :

La composante $\sin(2\pi f \cdot i)$ code pour un signal intense (ligne blanche) se répétant tous les $1/f$ mm.

La composante maximale ($f_{\max} = 3/2\pi$) code donc pour la variation de niveau de gris la plus rapide, soit une ligne (blanche) se répétant tous les $D_{\min} = 1/f_{\max} = 2\pi/3 \text{ mm} = LMH$

Interprétation



$D \leq LMH \Rightarrow$ images fusionnées

$$f = 1/D \geq 1/LMH$$

La composante fréquentielle f
n'est pas transmise

$D > LMH \Rightarrow$ images non fusionnées

$$f = 1/D < 1/LMH$$

La composante fréquentielle f est
transmise

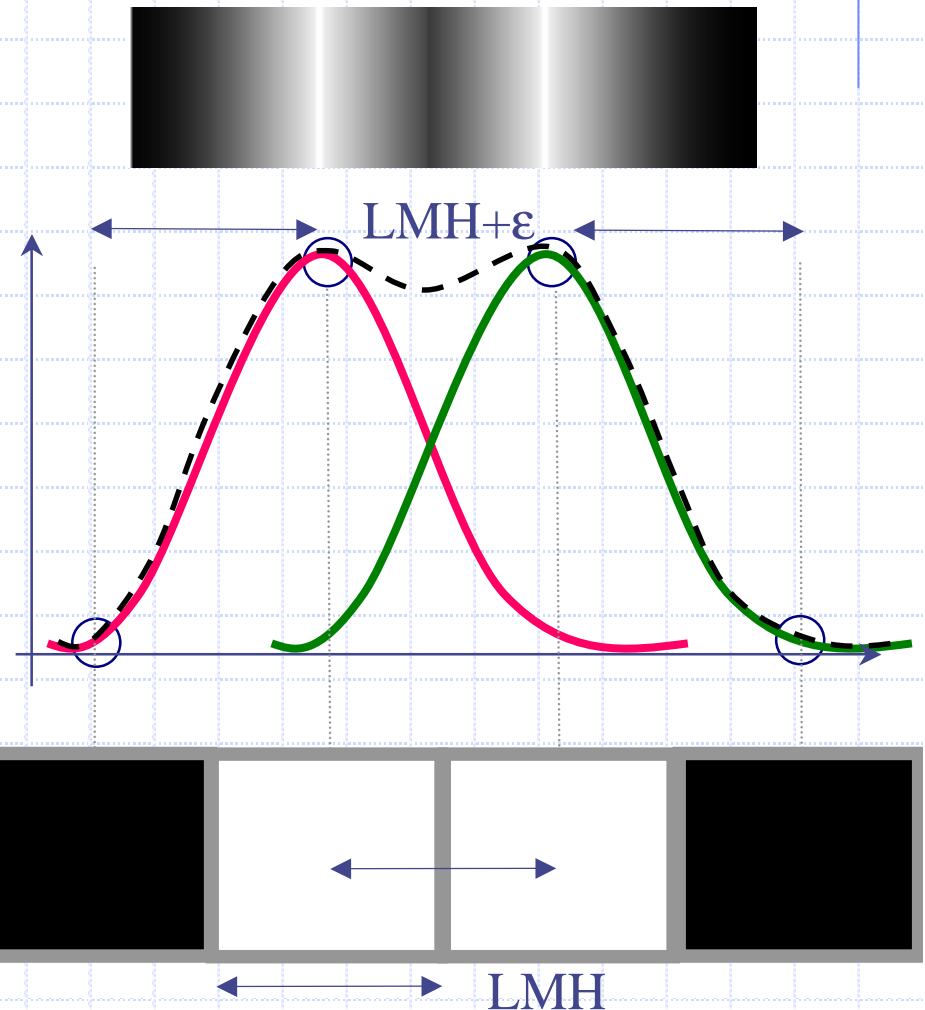
$$LMH = \frac{1}{f_{\max}^{transmise}} = D_{\min}^{transmise} = \text{résolution} = \text{pouvoir séparateur}$$

$LMH \downarrow \Rightarrow f_{\max} \uparrow \Rightarrow$ variation de contraste maximale possible \uparrow

Théorème de Shannon

Si la taille du pixel est identique à la LMH, alors aucun contraste n'est produit pour des objets ponctuels distants d'un peu plus que la LMH:

Perte de résolution



Théorème de Shannon

ECHANTILLONNAGE
SANS PERTE DE
RESOLUTION



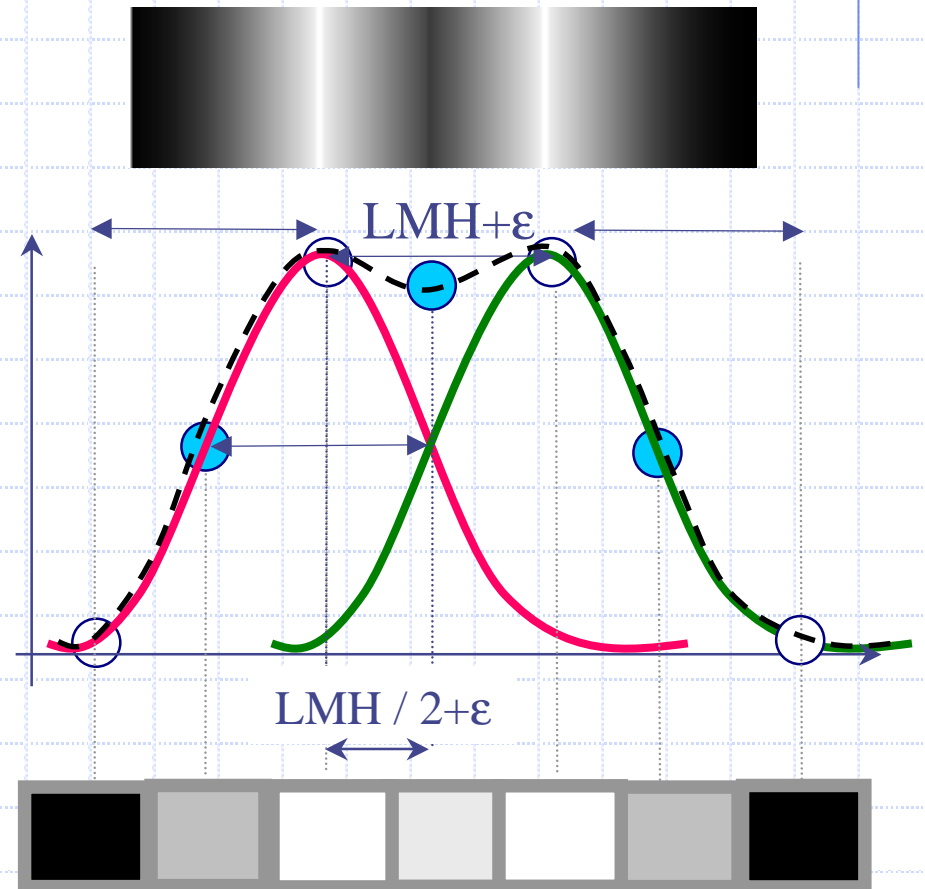
taille du pixel d

$$d \leq LMH/2$$

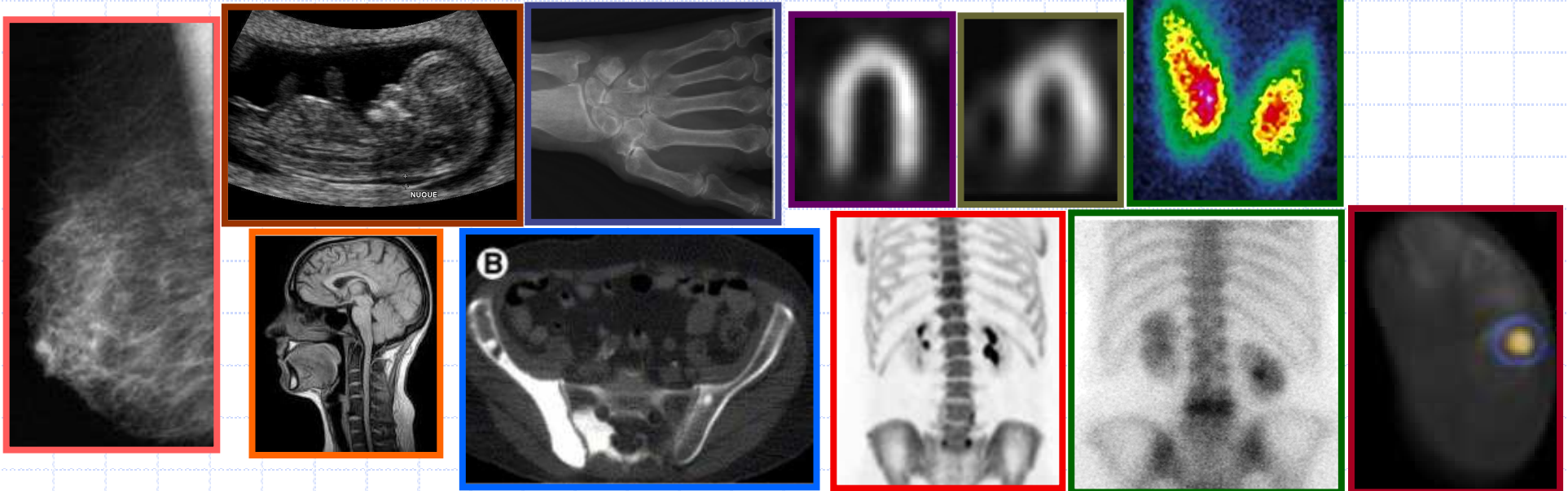
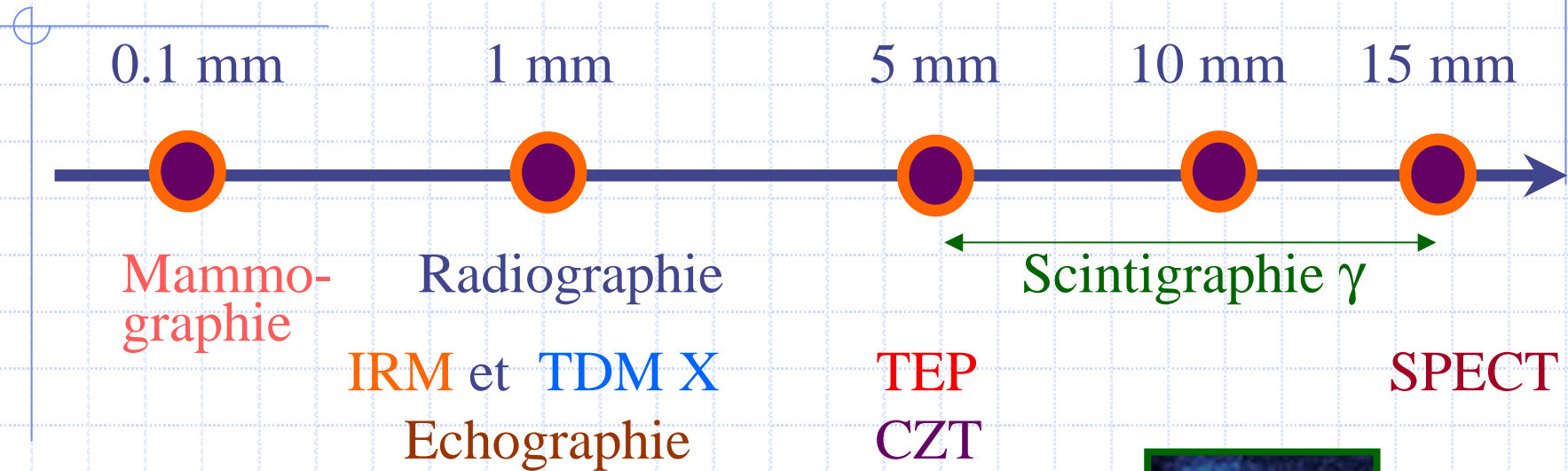
En pratique :

$$d = LMH/2$$

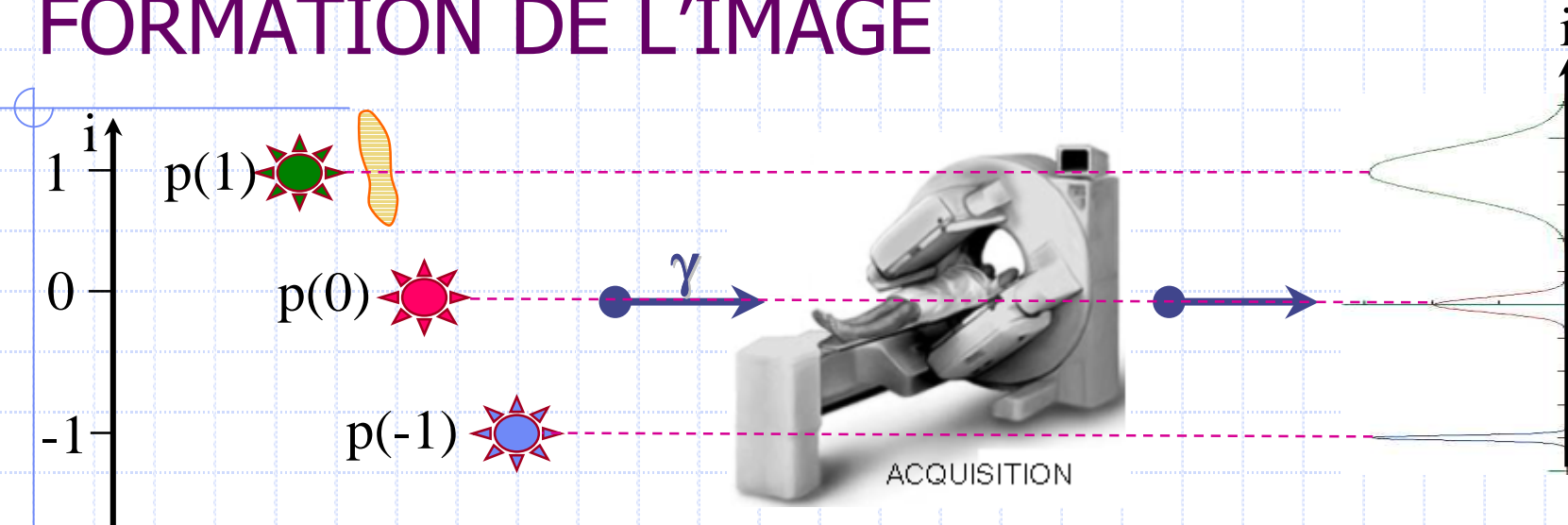
$$1/d = 2/LMH \Leftrightarrow f_e = 2.f_{max}$$



RESOLUTIONS EN MEDECINE



FORMATION DE L'IMAGE

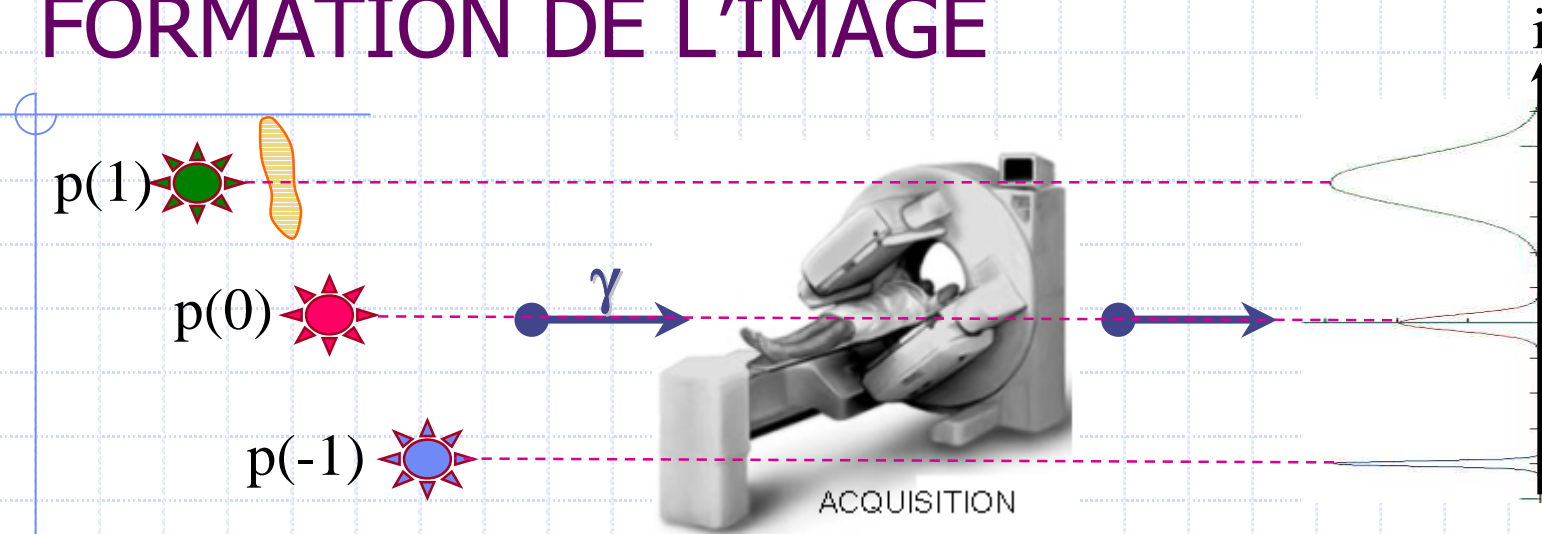


$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \underbrace{\delta(i-k)}_{= 0 \text{ sauf si } k=i \text{ où } \delta(0)=1}, \quad i \text{ fixé}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k) = p(-1) \underbrace{\delta(i+1)}_0 + p(0) \underbrace{\delta(i)}_0 + p(1) \underbrace{\delta(i-1)}_{p(1)}$$

Si $i = 1$:

FORMATION DE L'IMAGE



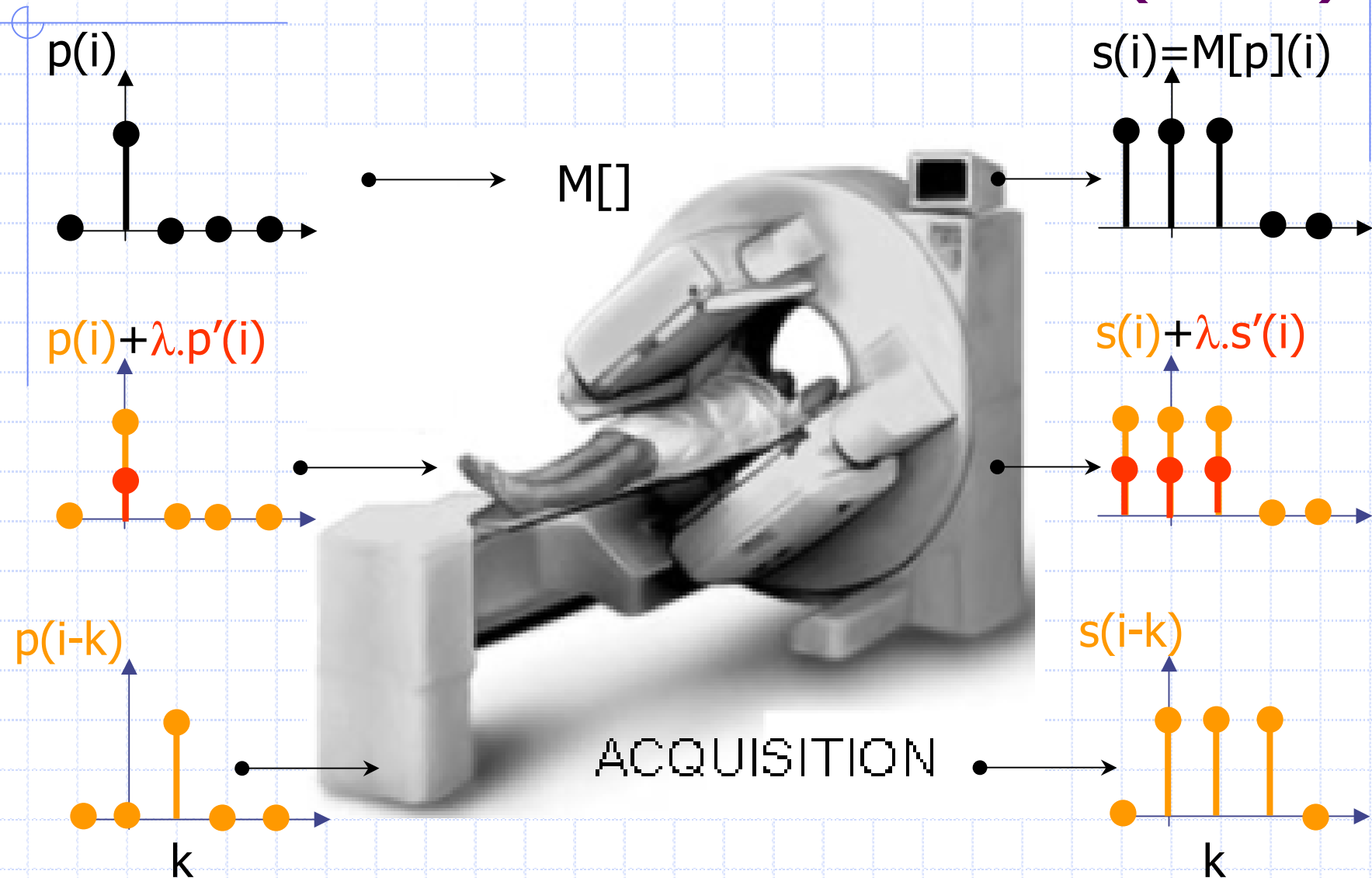
$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k), \quad i \text{ fixé}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 $= 0 \text{ sauf si } k=i$
 $\delta(0)=1$

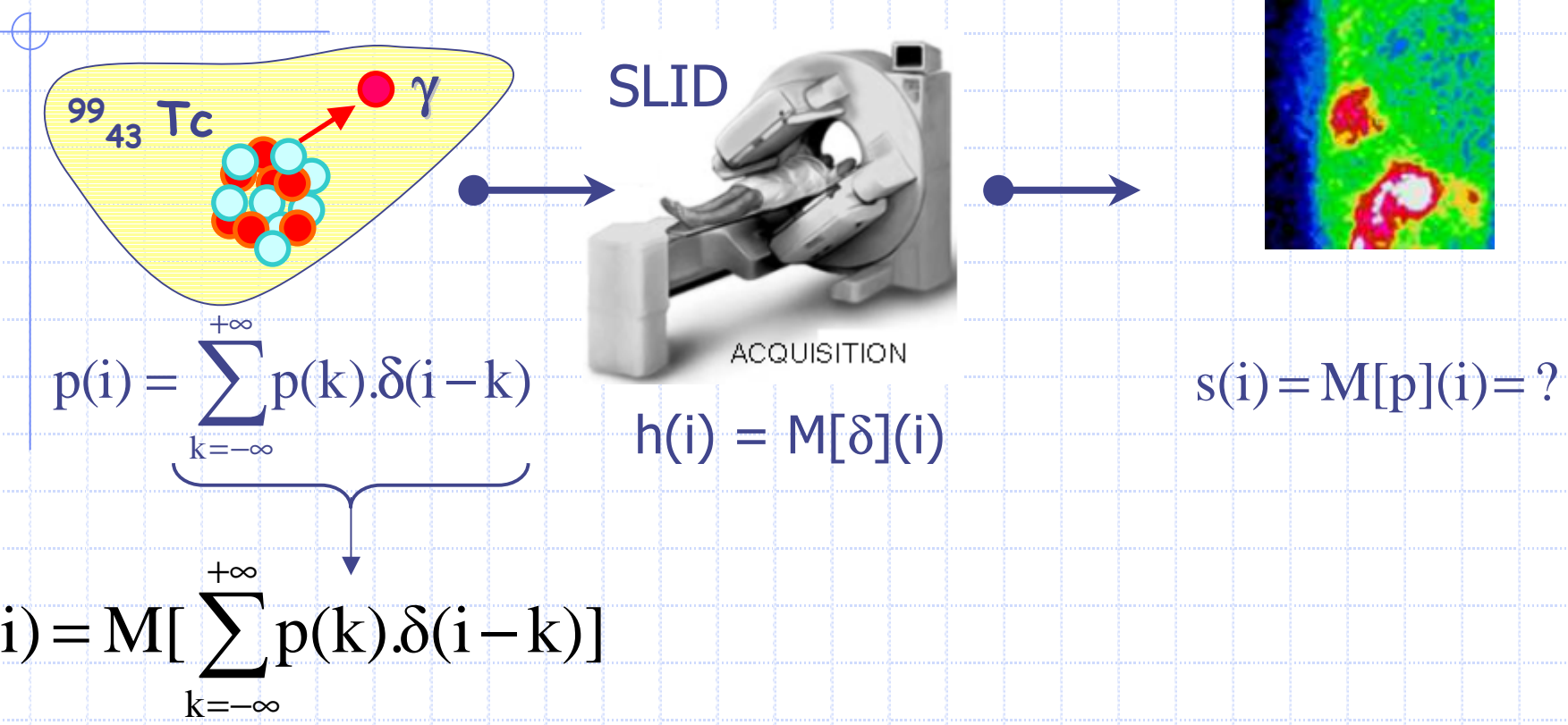
$$s(i) = M[p](i) = ?$$

Pour déterminer s , il faut faire des hypothèses sur M ,
 donc sur les caractéristiques de la caméra...

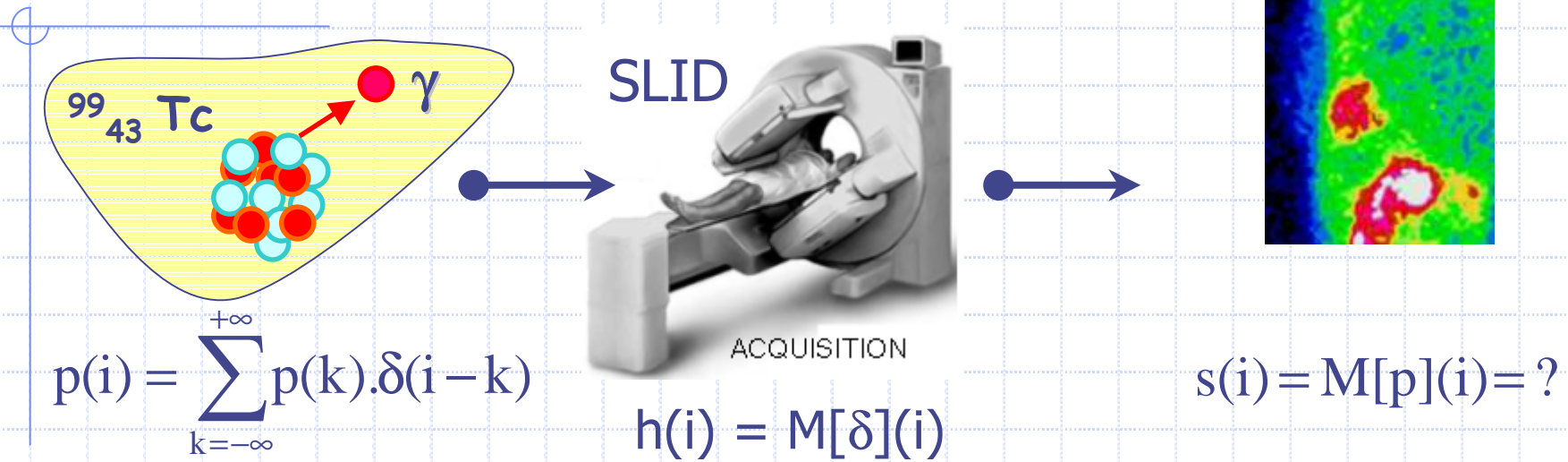
Caméra ≈ linéaire & invariante (SLID)



FORMATION DE L'IMAGE



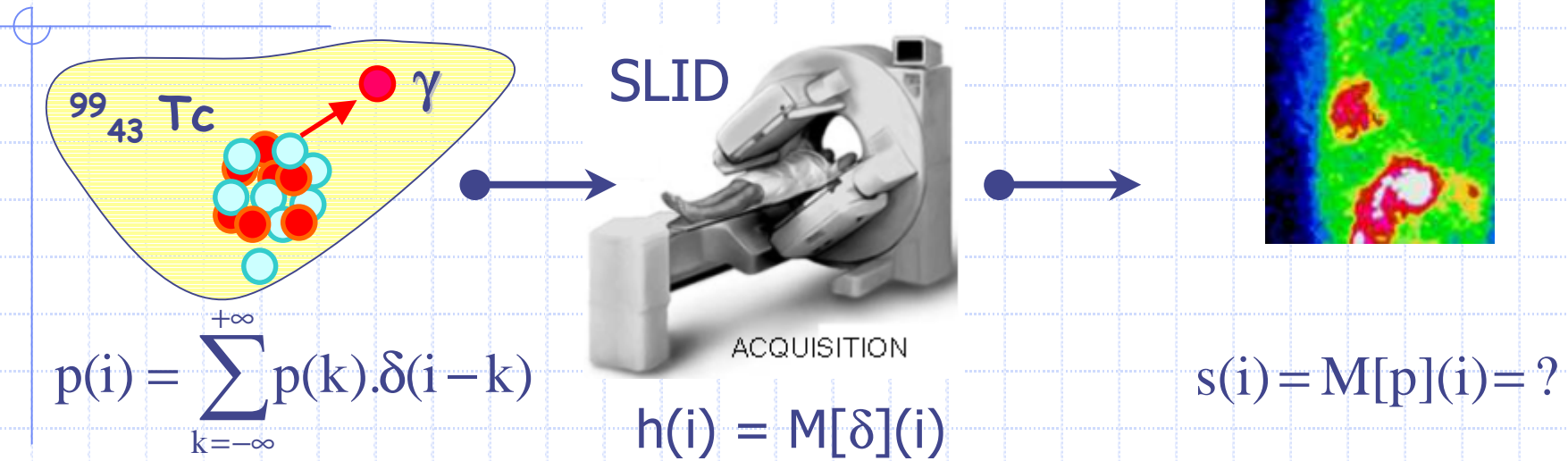
FORMATION DE L'IMAGE



$$s(i) = M\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot M[\delta(i-k)]$$

linéarité

FORMATION DE L'IMAGE

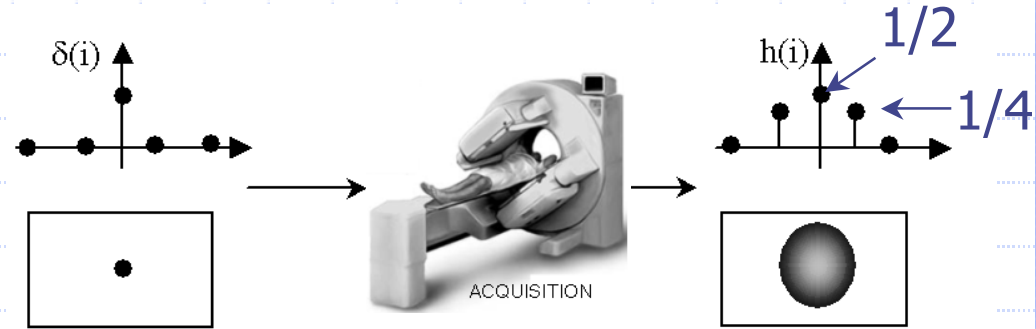


$$s(i) = M\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \overbrace{M[\delta(i-k)]}^{h(i-k)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot h(i-k)$$

Invariance dans le décalage

$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot h(i-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(i-k) = (p * h)(i)$$

INTERPRETATION

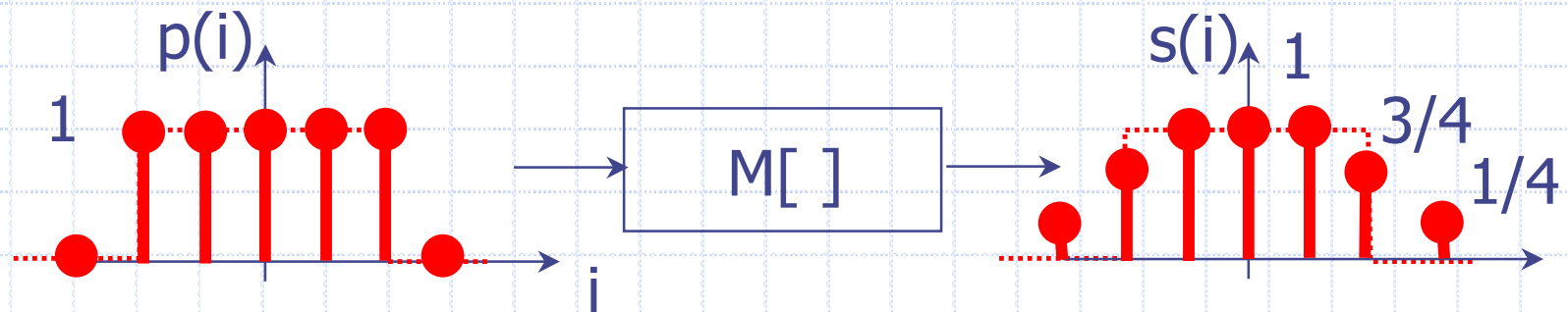


$$s(i) = \sum_{k=-1}^{+1} h(k).p(i-k)$$

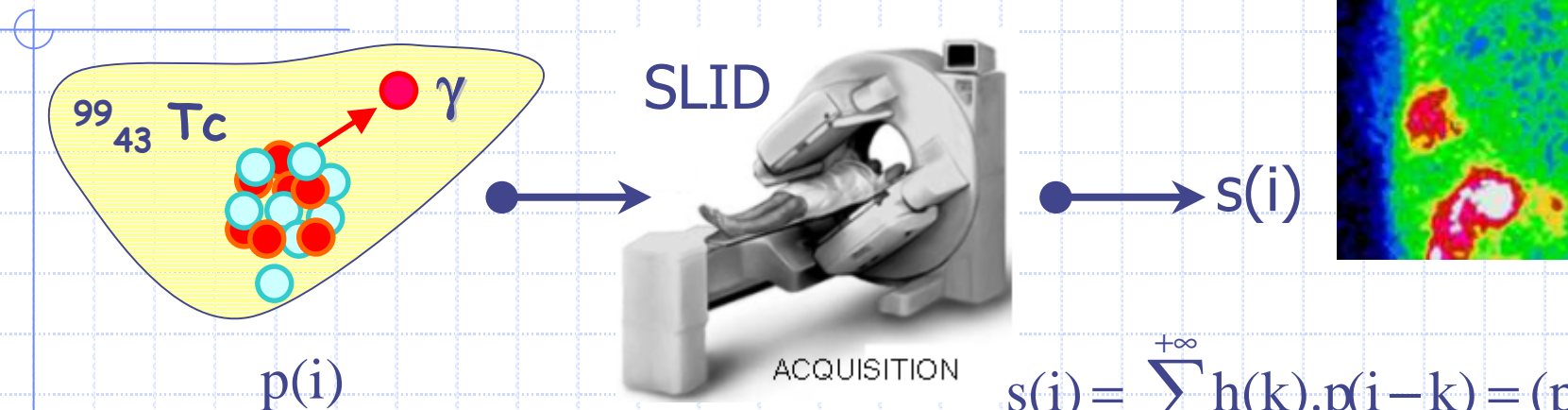
$$s(i) = h(-1).p(i+1) + h(0).p(i) + h(1).p(i-1)$$

$$s(i) = \frac{1}{4}p(i+1) + \frac{1}{2}p(i) + \frac{1}{4}p(i-1) = \frac{2.p(i) + p(i+1) + p(i-1)}{4}$$

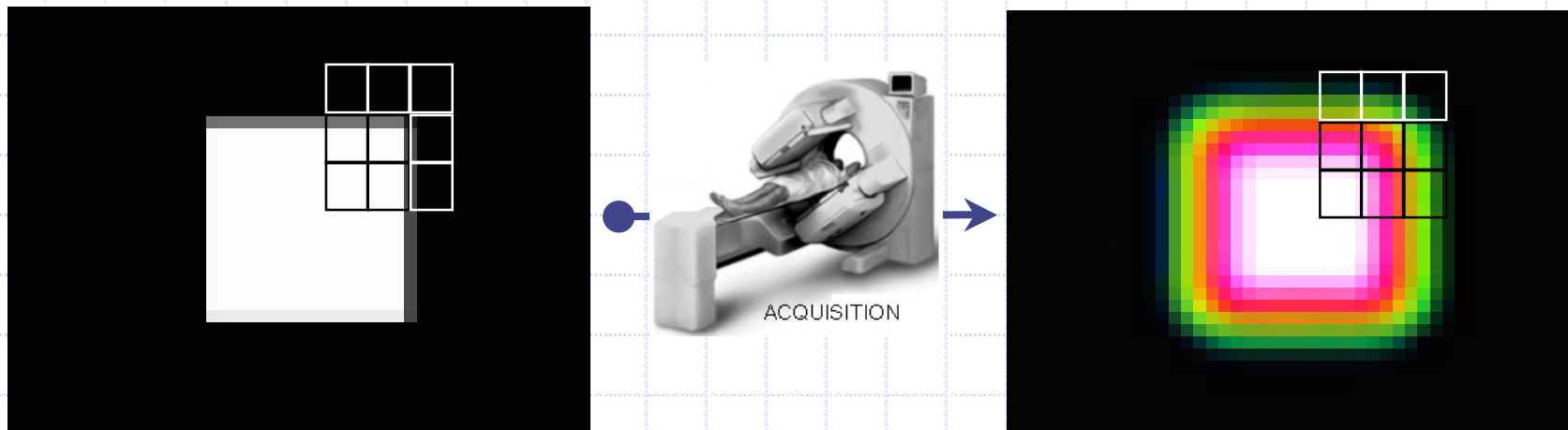
s = moyenne pondérée par h de la grandeur physique p



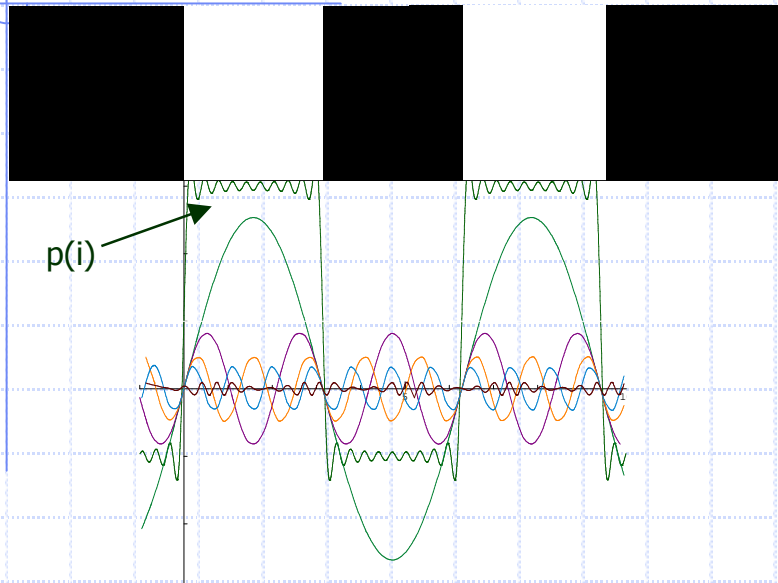
FORMATION DE L'IMAGE



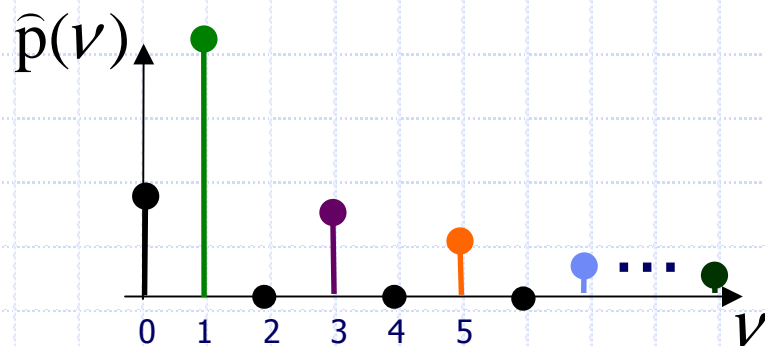
$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(i-k) = (p * h)(i)$$



INTERPRETATION EN FREQUENCE

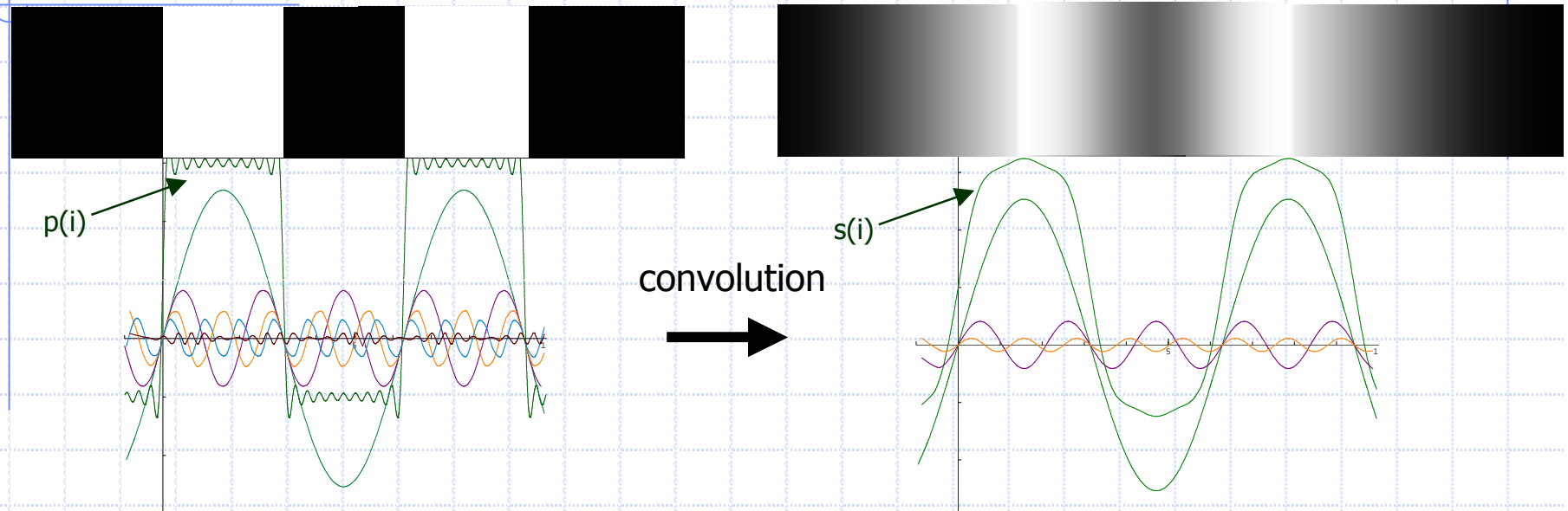


$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[\sin(i) + \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{5} \sin(5i) + \dots \right]$$



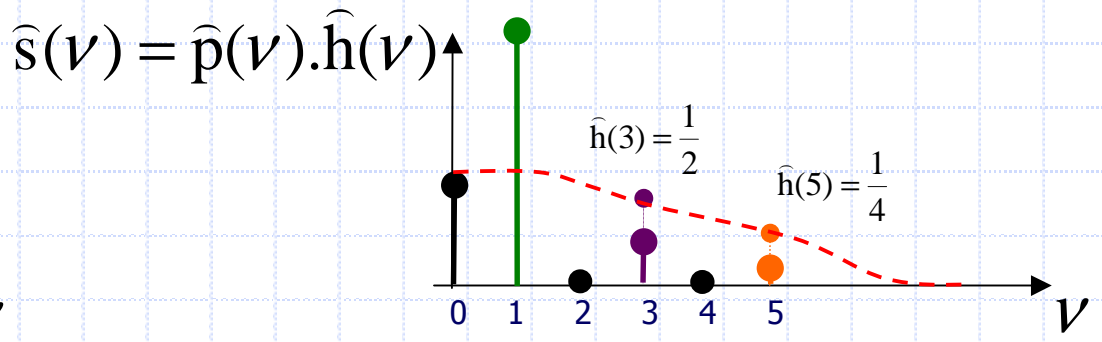
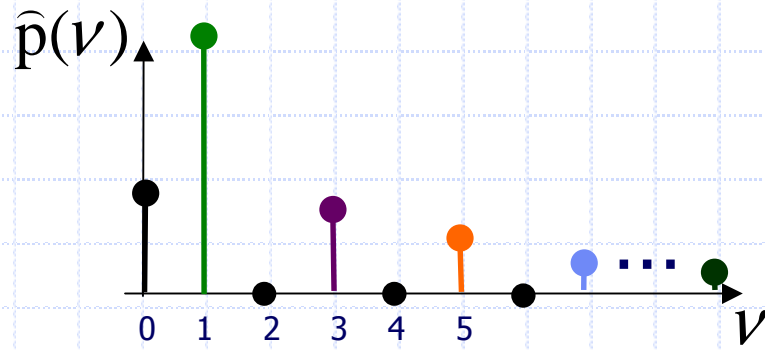
Ce graphe représentant les amplitudes $\hat{p}(v)$ de chaque composante de fréquence v est appelé **spectre** (ou **transformée de Fourier**) du signal $p(i)$

INTERPRETATION EN FREQUENCE

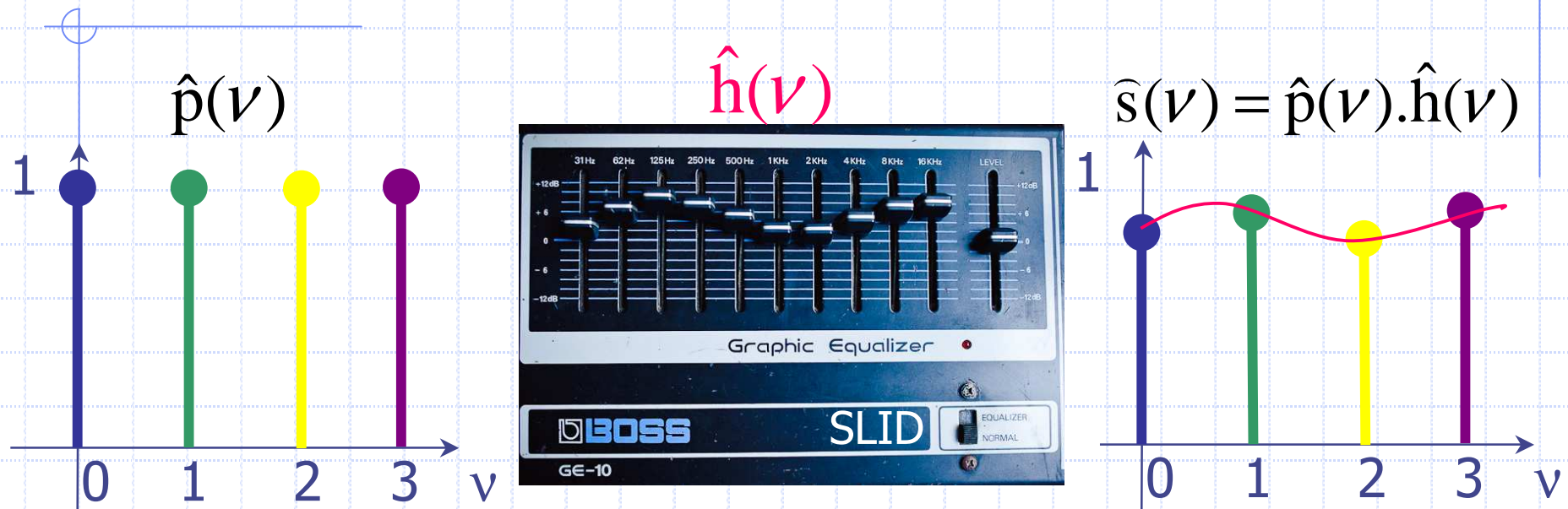


$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[\sin(i) + \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{5} \sin(5i) + \dots \right]$$

$$s(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[\sin(i) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \sin(5i) \right]$$



Théorème de convolution

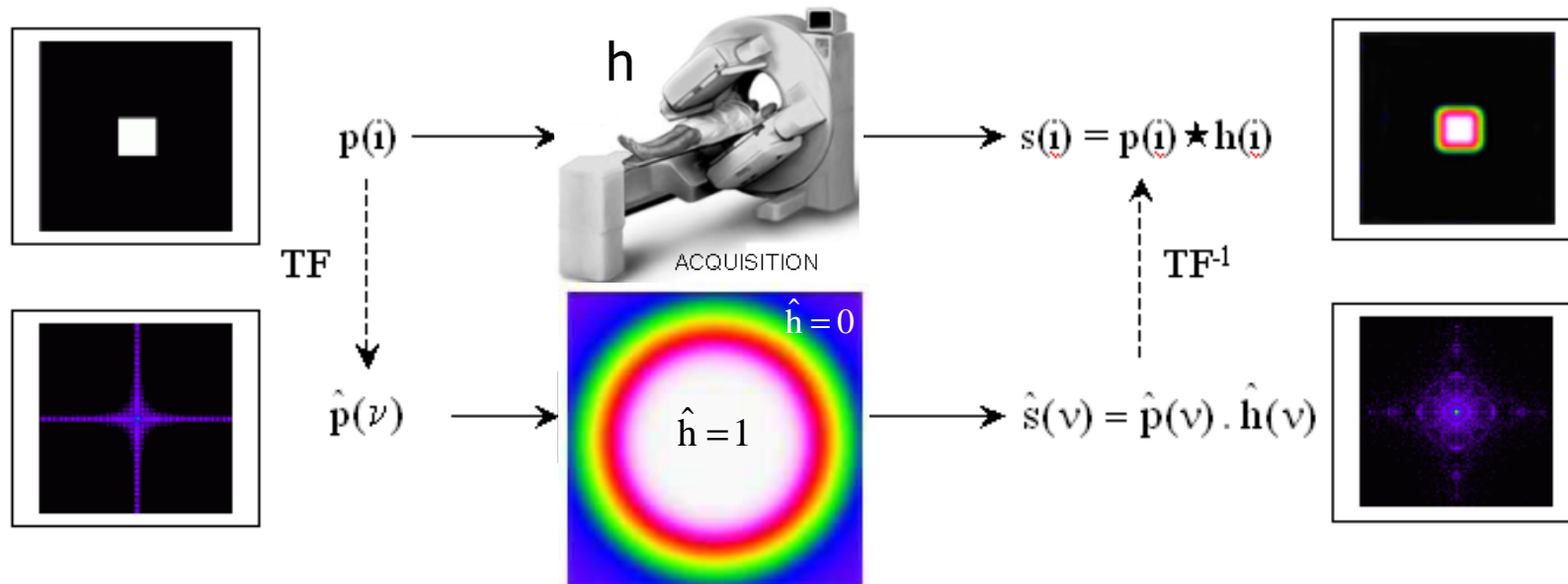
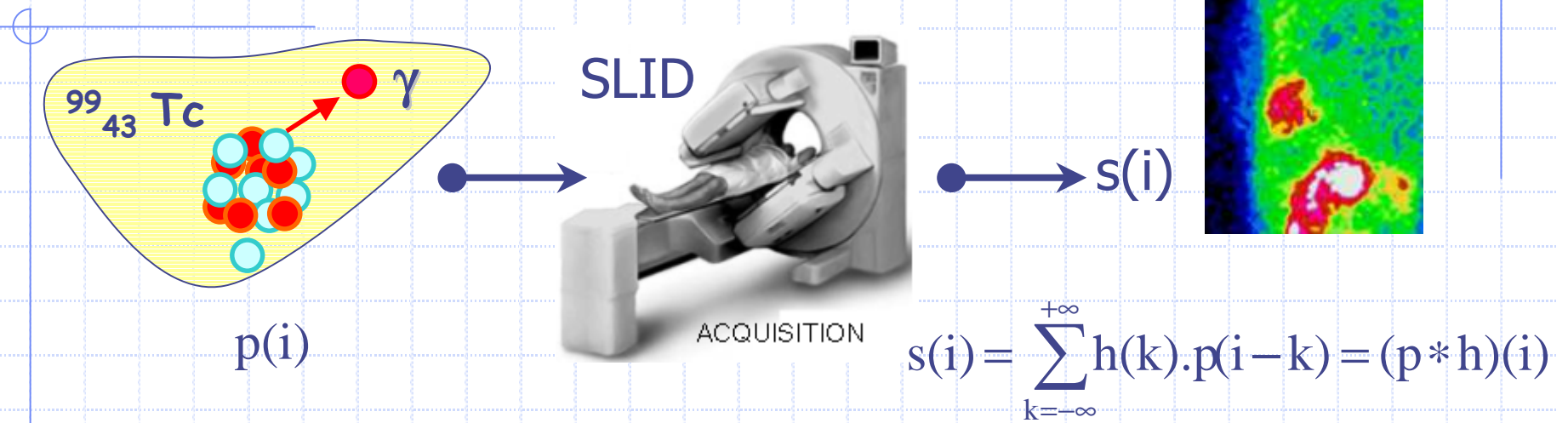


$\hat{s}(v)$ = multiplication par $\hat{h}(v)$ de la TF de la grandeur physique $\hat{p}(v)$

s = convolution par h de la grandeur physique p

$$s(i) = h(i) * p(i) \Rightarrow \hat{s}(v) = \hat{h}(v) \cdot \hat{p}(v)$$

REPOSENS IMPULSIONNELLES & EN FREQUENCE



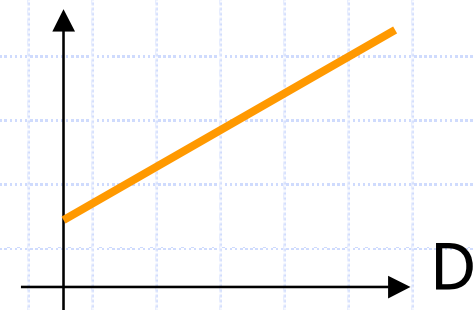
Cq 1 : RESOLUTION ET DISTANCE EN SPECT

s = moyenne pondérée par h de la grandeur physique p

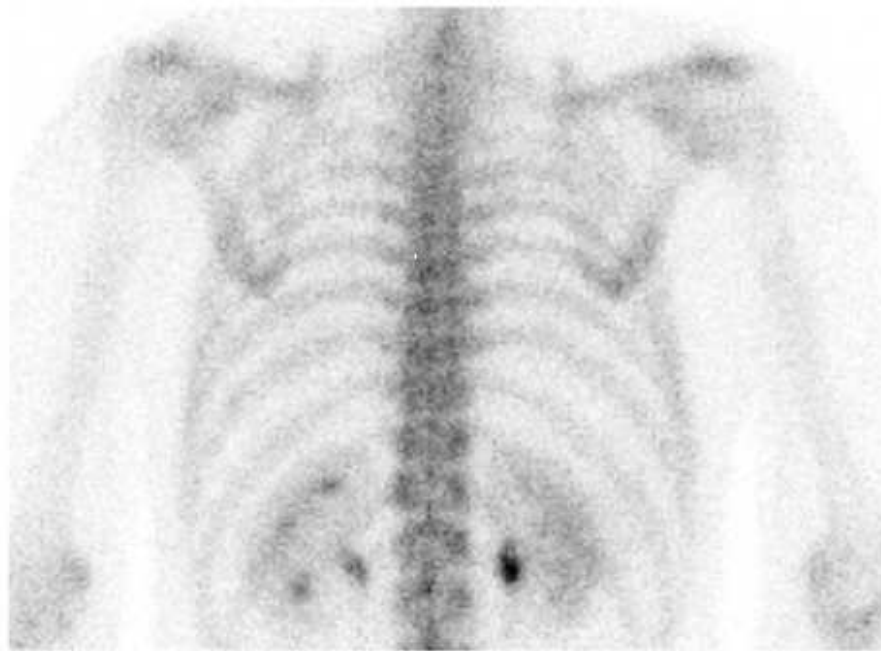
- ◆ plus le détecteur est **proche** du patient...
- ◆ plus la réponse impulsionnelle est **étroite**
- ◆ ...et plus l'image est **fidèle** à l'objet !

◆ Sinon : lissage = **flou** !

$$\sigma = k.D + k'$$

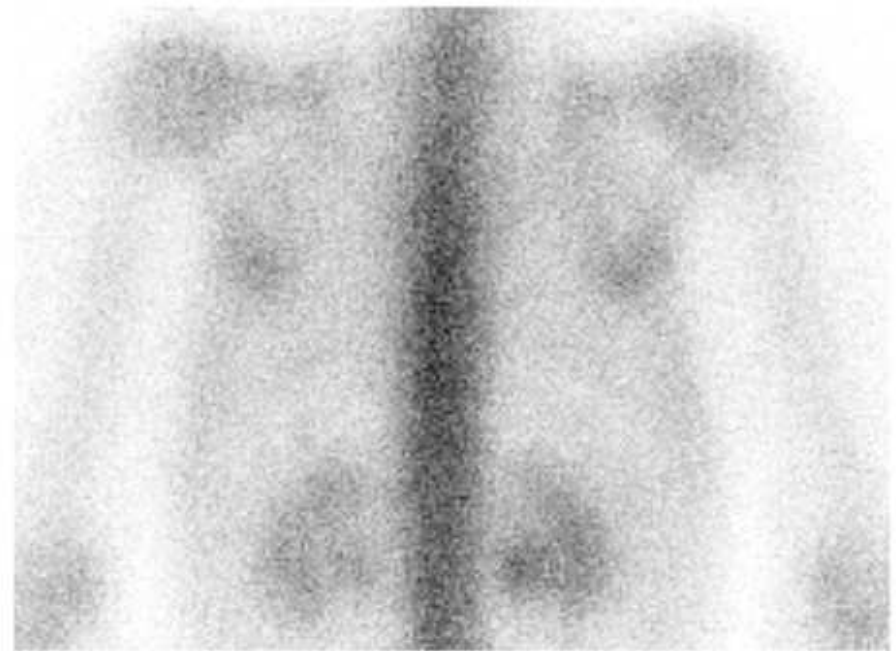


Cq 1 : RESOLUTION ET DISTANCE EN SPECT



FP
AU CONTACT

DT

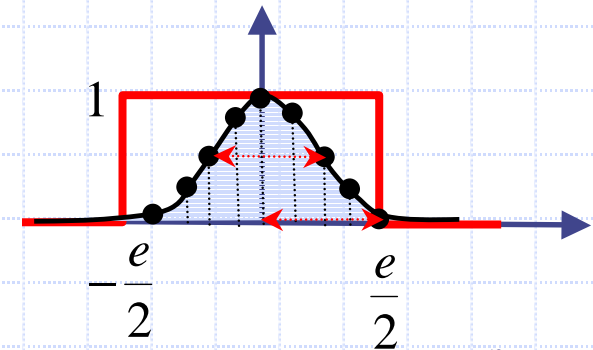
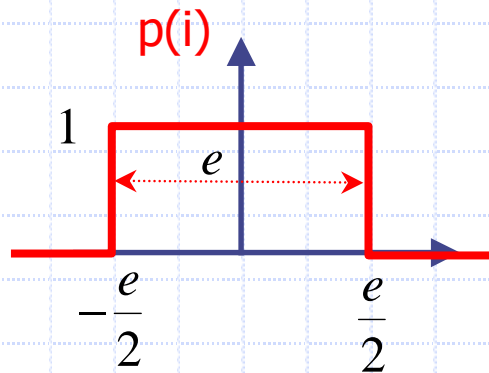


FPOST
A 50CM

DT

Cq2: « EFFET DE VOLUME PARTIEL »

Si $e/2 > LMH$:

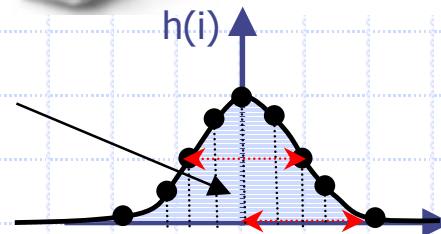


$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(0-k) = \sum_{k=-e/2}^{+e/2} h(k) \approx 1$$

Le centre de l'image est transmis

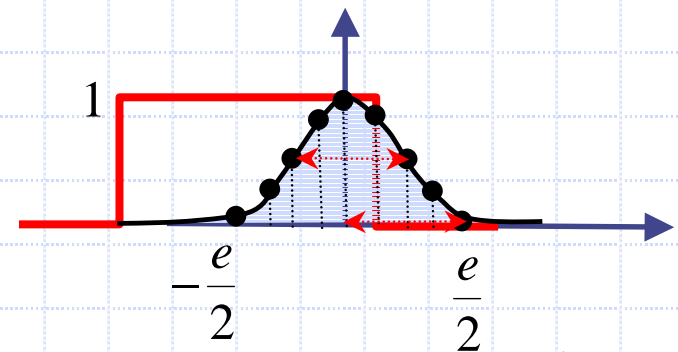
$$\text{Surface} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 \cdot i^2} = 1$$

98% de l'intégrale d'une gaussienne se trouve entre $\pm LMH$



$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \cdot i^2}$$

$$C = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

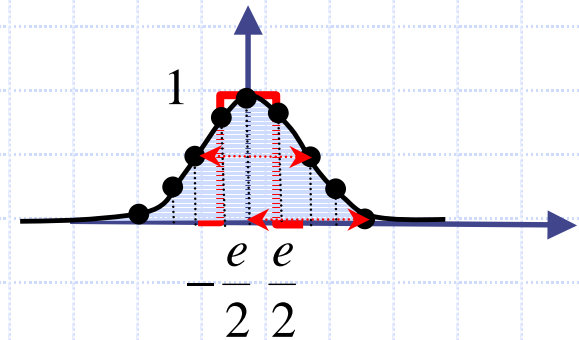
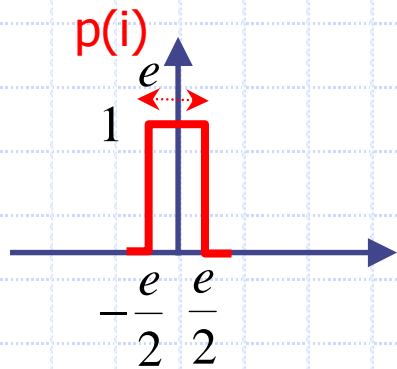


$$s(i=1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(1-k) = \sum_{k=-e/2}^1 h(k) < 1$$

Les bords de l'image sont sous-estimés

Cq2: « EFFET DE VOLUME PARTIEL »

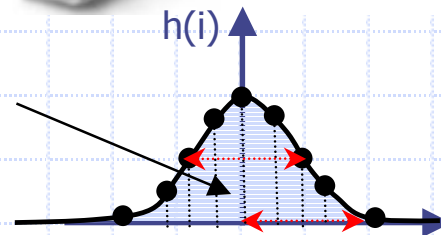
Si $e/2 < LMH$:



$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(0-k) = \sum_{k=-1}^1 h(k) < 1$$

Le centre de l'image est sous-estimé

$$\text{Surface} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 \cdot i^2} = 1$$



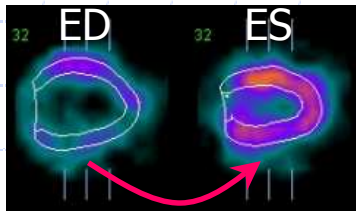
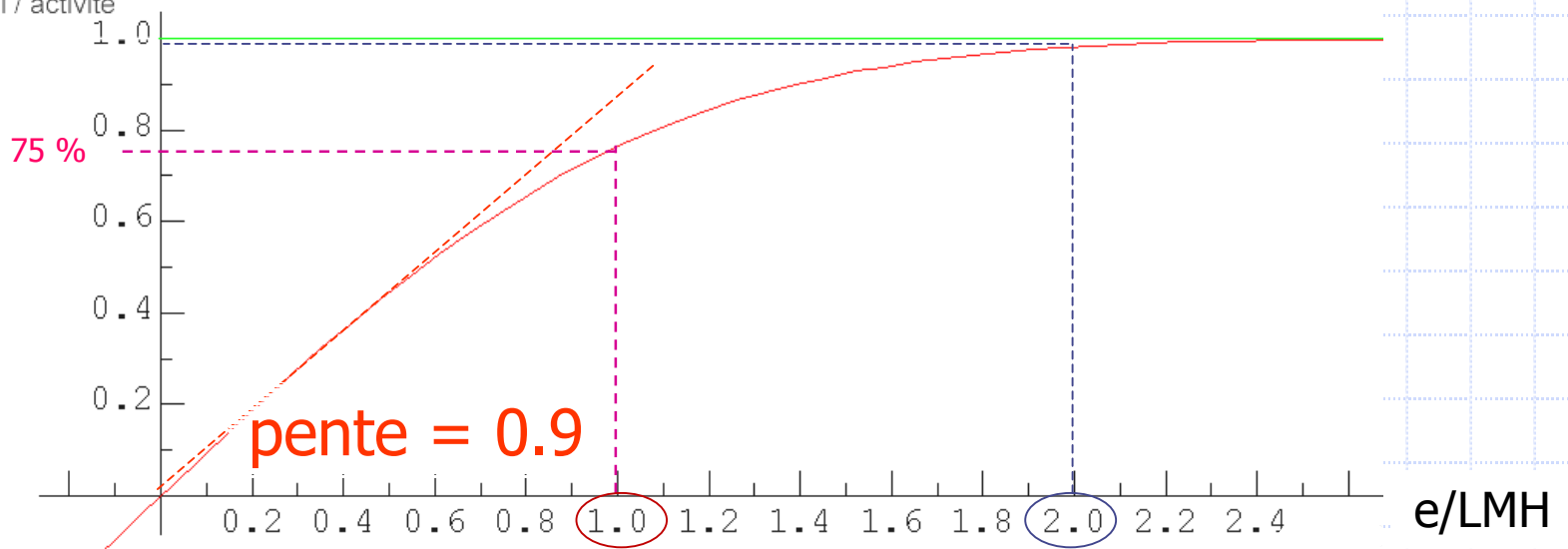
$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \cdot i^2}$$

$$C = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

Cq2: « EFFET DE VOLUME PARTIEL »

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-e/2}^{e/2} e^{-k^2 \cdot x^2} dx \quad k = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

signal / activité



Cq2: « EFFET DE VOLUME PARTIEL »

- ◆ **Activité sous-estimée si $e < 2.LMH$**
 - ◆ 75 % de l'activité est mesurée si $e = LMH$
 - ◆ Rappel : $LMH \approx 6$ mm en TEP et 15 mm en SPECT
- ◆ **Approximation linéaire possible si $e < LMH$**
 - Ajustement de seuils (SUV_{max} ...)
- ◆ Pour limiter cet artefact : **déconvolution.**
- ◆ **Artefact exploitable** pour estimer des mouvements en dessous de la résolution des gamma-caméras (épaississement systolique).

D'un signal physique à une image médicale exploitable

Les artefacts d'acquisition

Réponse de l'appareil d'imagerie

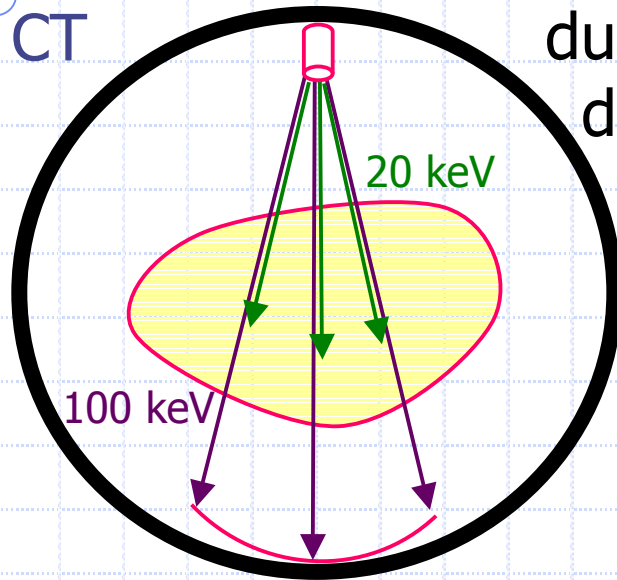
Modification du signal avant détection

Correction des artefacts (planaire & tomographie)

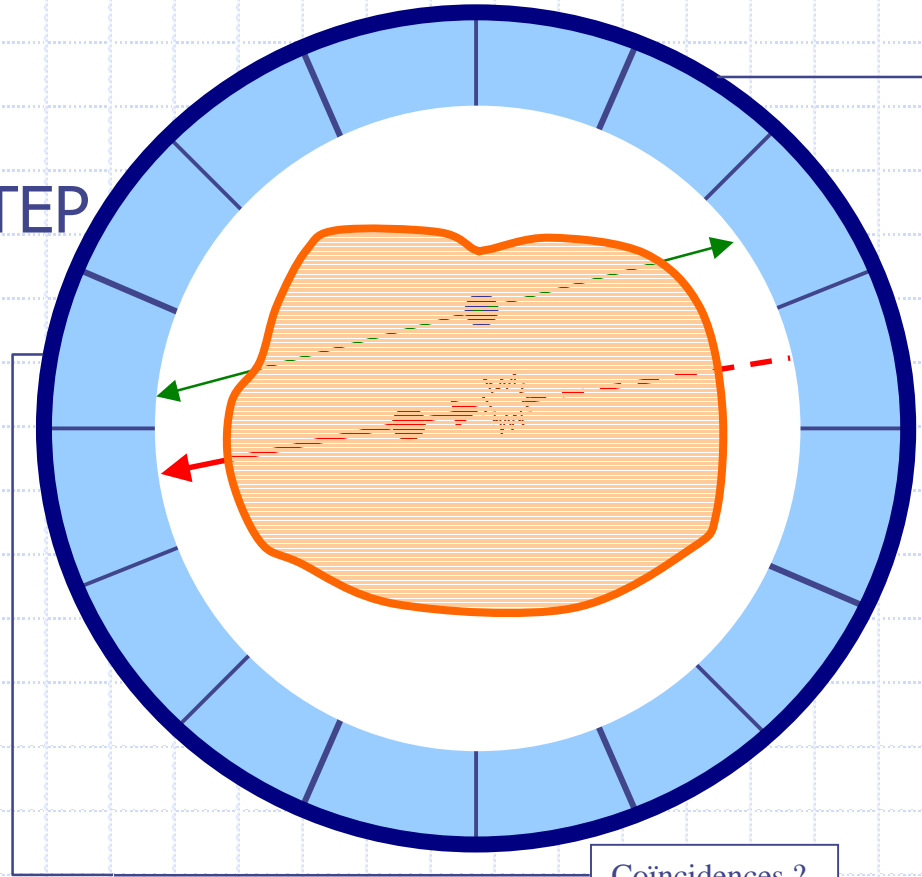
ATTENUATION PHOTOELECTRIQUE :

$$\mu_{PE} \approx k \frac{Z^3}{E^3} \rho$$

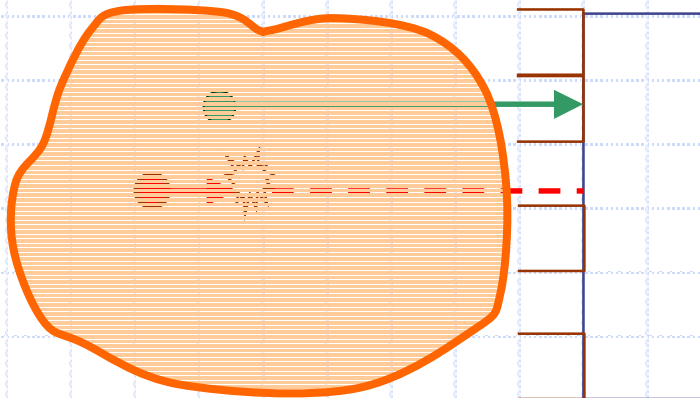
CT



TEP

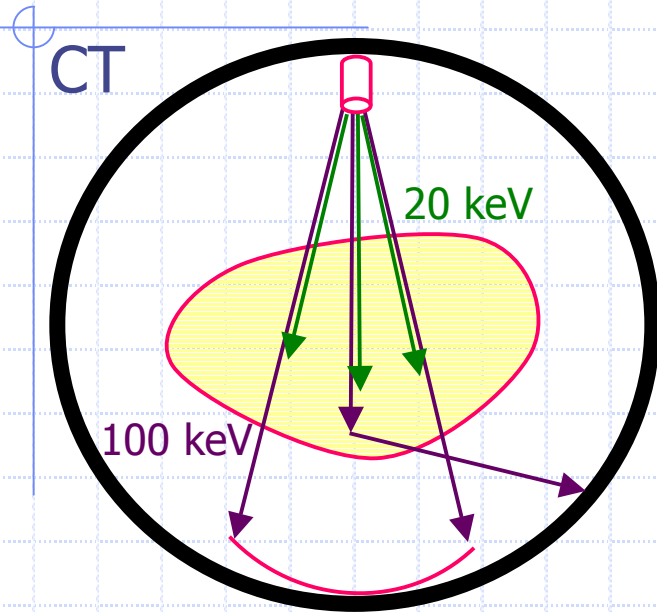


TEMP

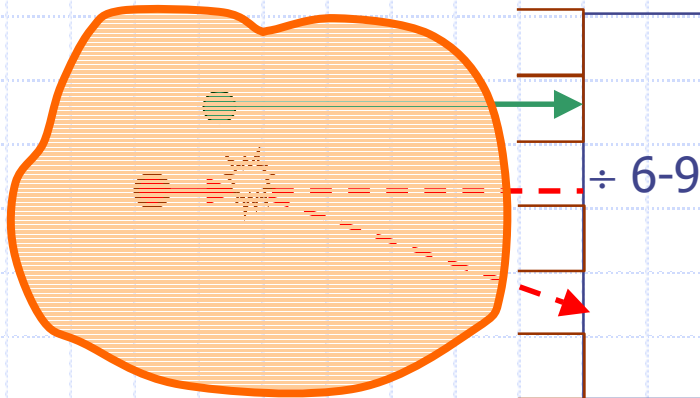


Coincidences ?

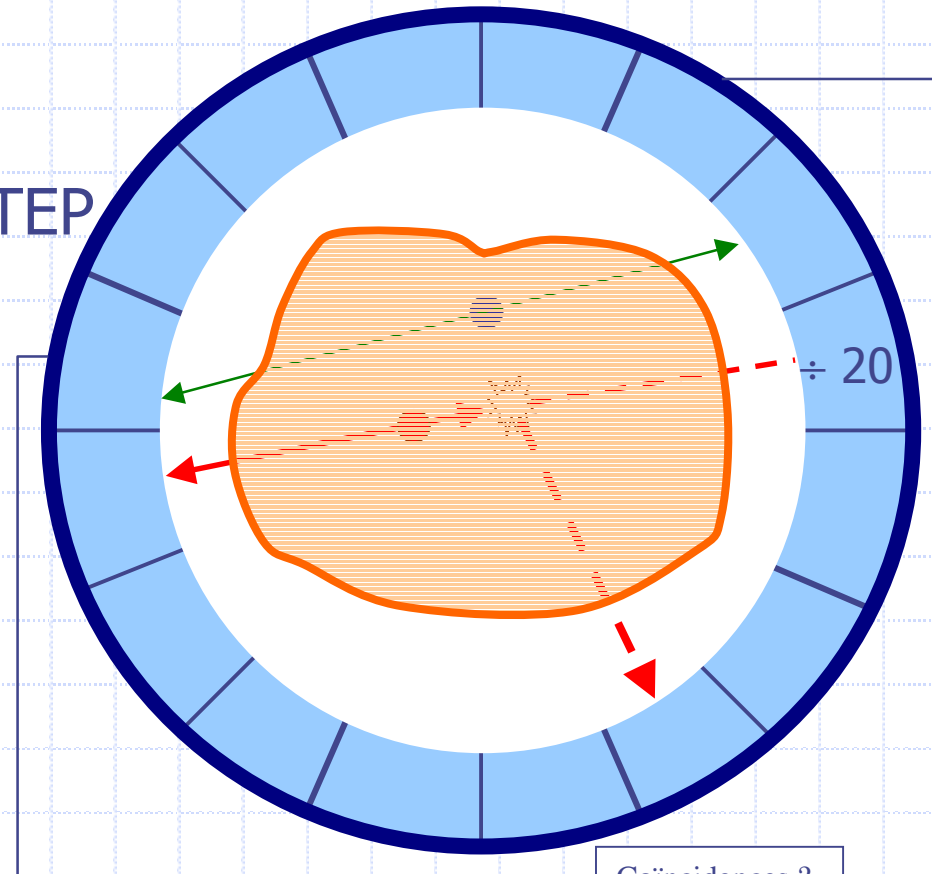
ATTENUATION COMPTON: $\mu_C \approx k' \rho$



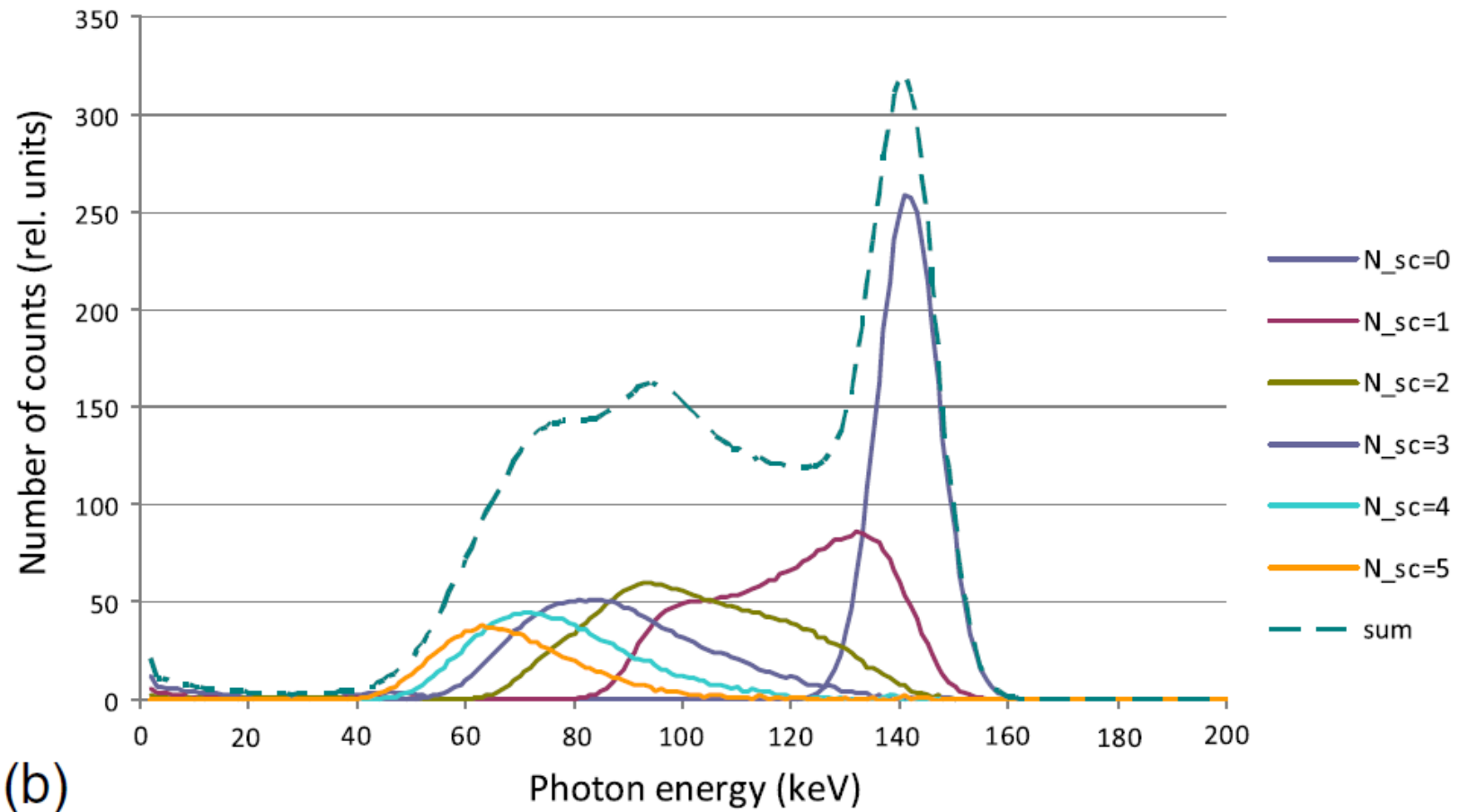
TEMP



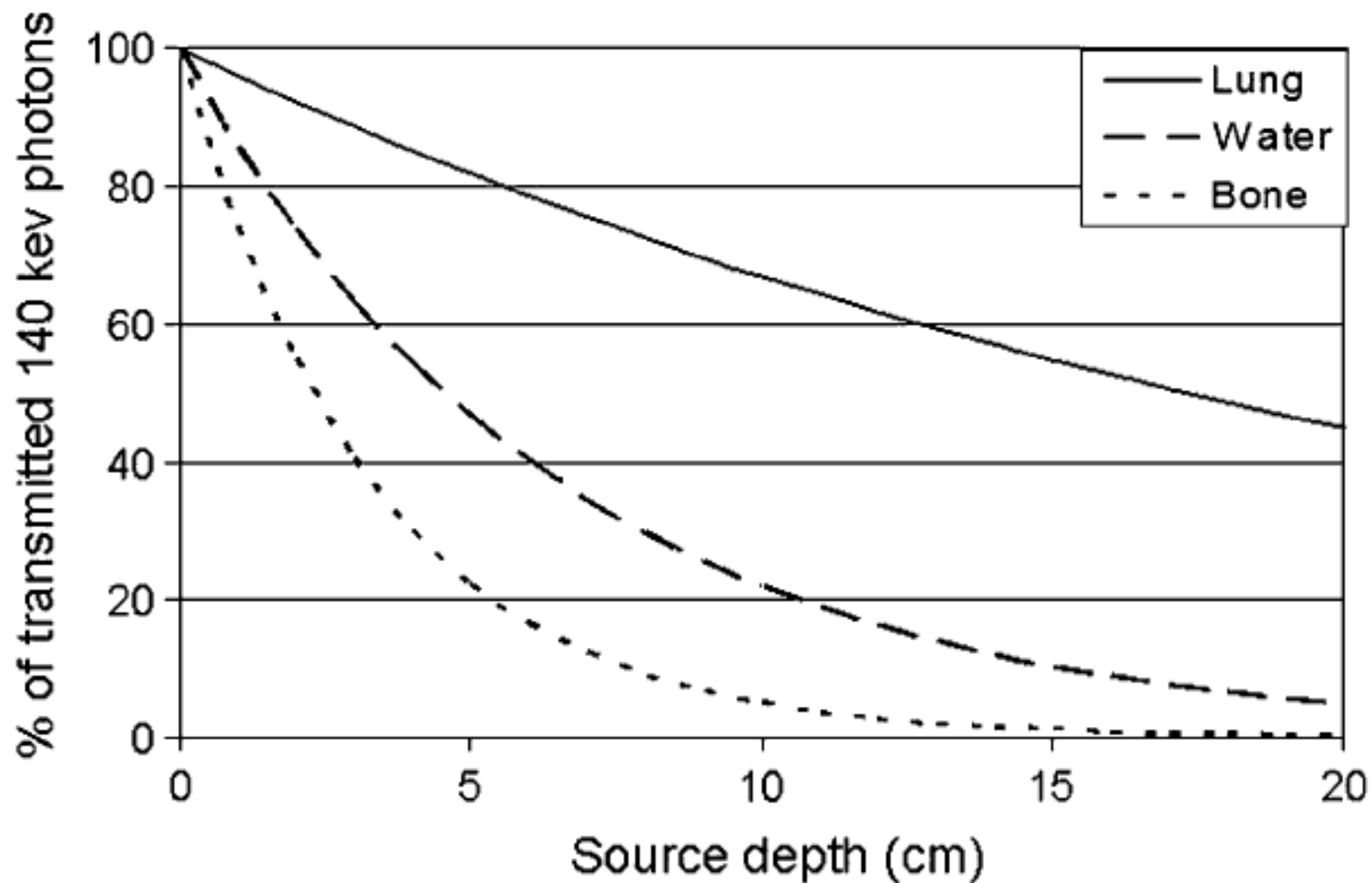
TEP



ATTENUATION COMPTON: $\mu_C \approx k' \rho$



ATTENUATION A 140 keV :



D'un signal physique à une image médicale exploitable

Les artefacts d'acquisition

Correction des artefacts

Déconvolution & atténuation en mode planaire

Déconvolution & atténuation en mode tomographique

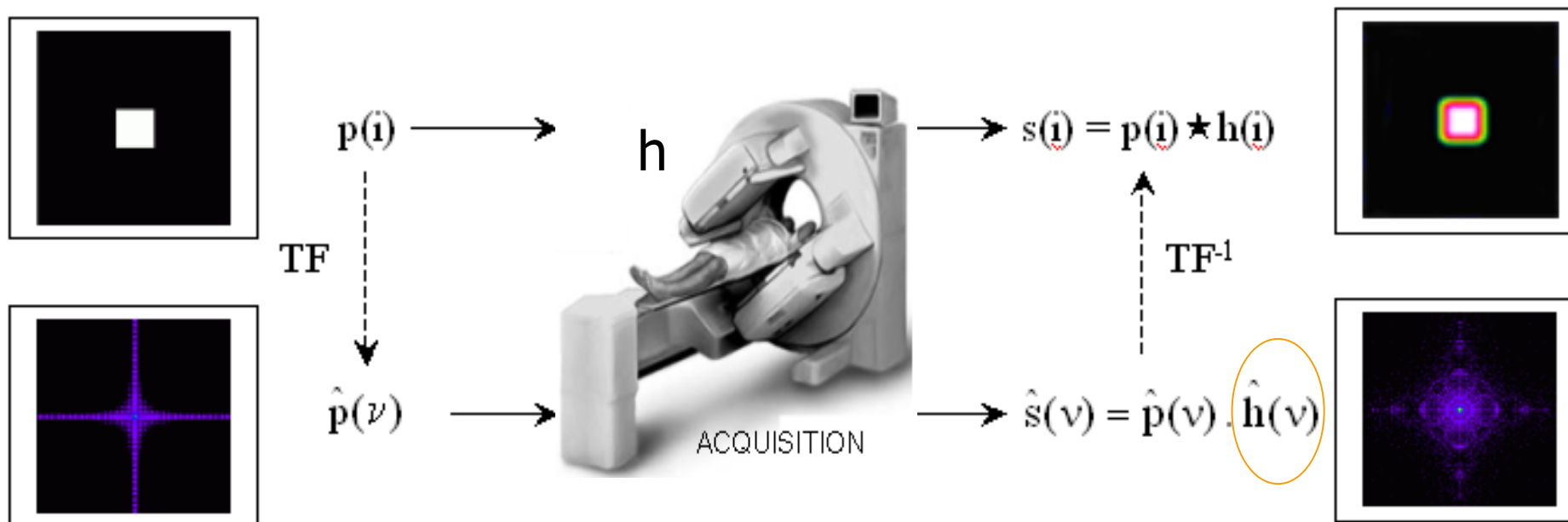
DECONVOLUTION

- ◆ ...pour améliorer la résolution (LMH), donc limiter les effets de volume partiel
 - ◆ en 2D, sous hypothèse d'invariance :
 - par filtrage linéaire de Metz, Wiener,...
 - ◆ En 3D, en prenant en compte la distance au collimateur
 - par modélisation ou principe fréquence-distance

- ◆ ...pour corriger les artefacts liés à la dilution et à la recirculation du bolus radioactif
 - ◆ Application au calcul de temps de transit intra-renal en néphrographie isotopique (cf. cours de modélisation)

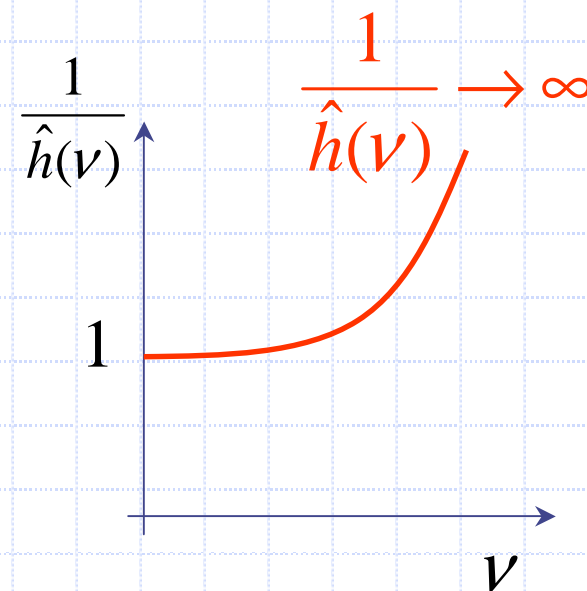
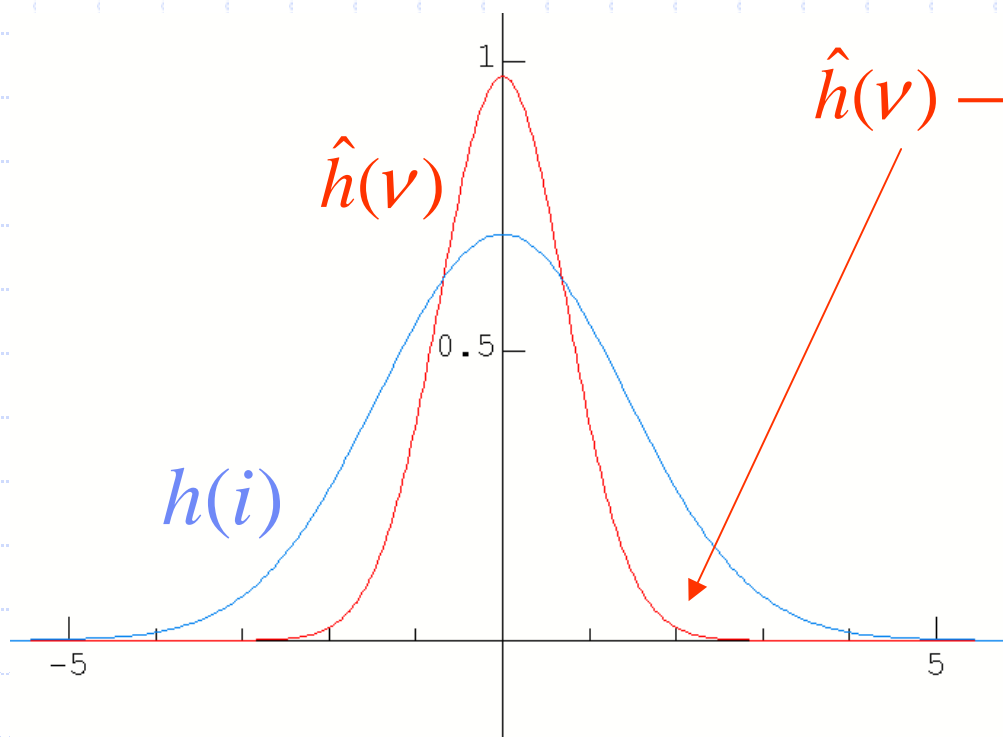
DECONVOLUTION PLANAIRE

Dans une image de projection, la distance entre la source et le détecteur où se forme l'image est inconnue. On néglige donc la dépendance en D de la réponse impulsionnelle.

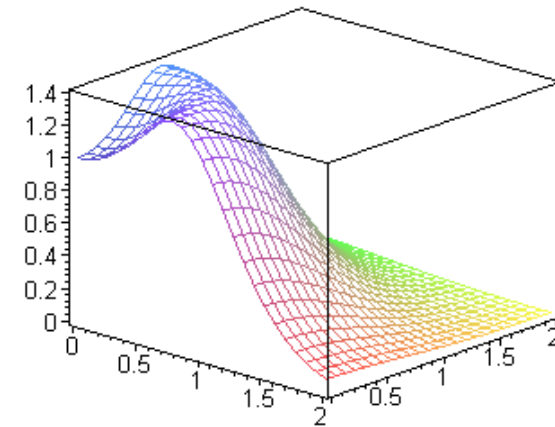
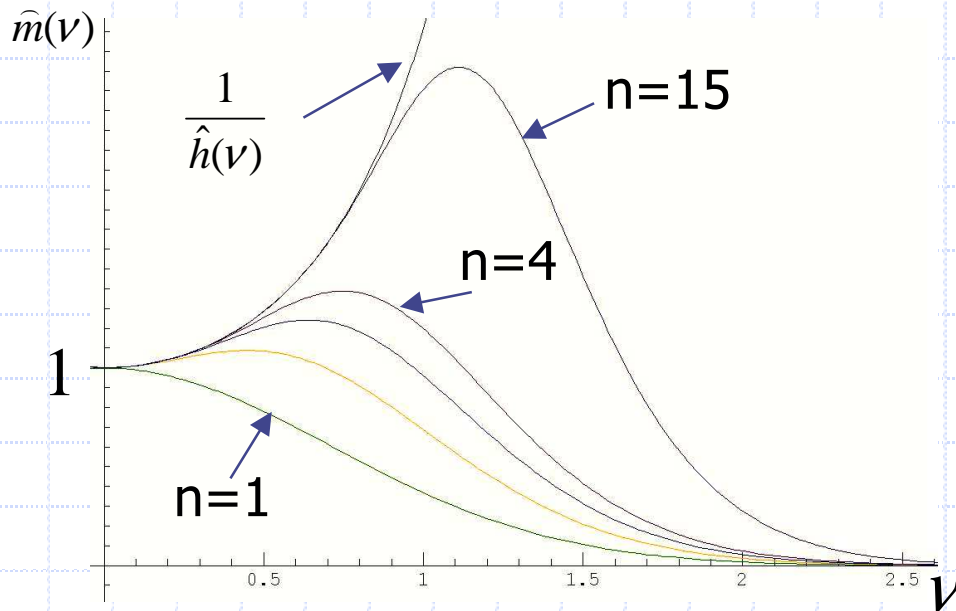
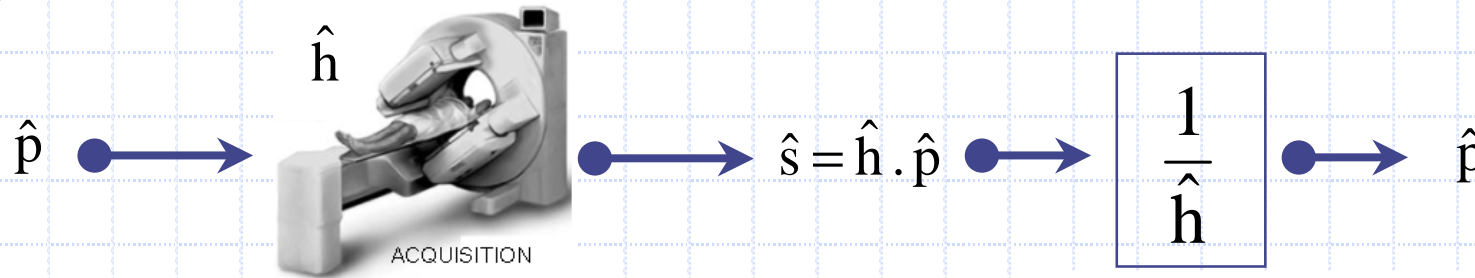


TF D'UNE GAUSSIENNE

$$h(i) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{i^2}{2\sigma^2}} \Leftrightarrow \hat{h}(v) = e^{-\frac{v^2}{2/\sigma^2}}$$



FILTRE DE DECONVOLUTION DE METZ

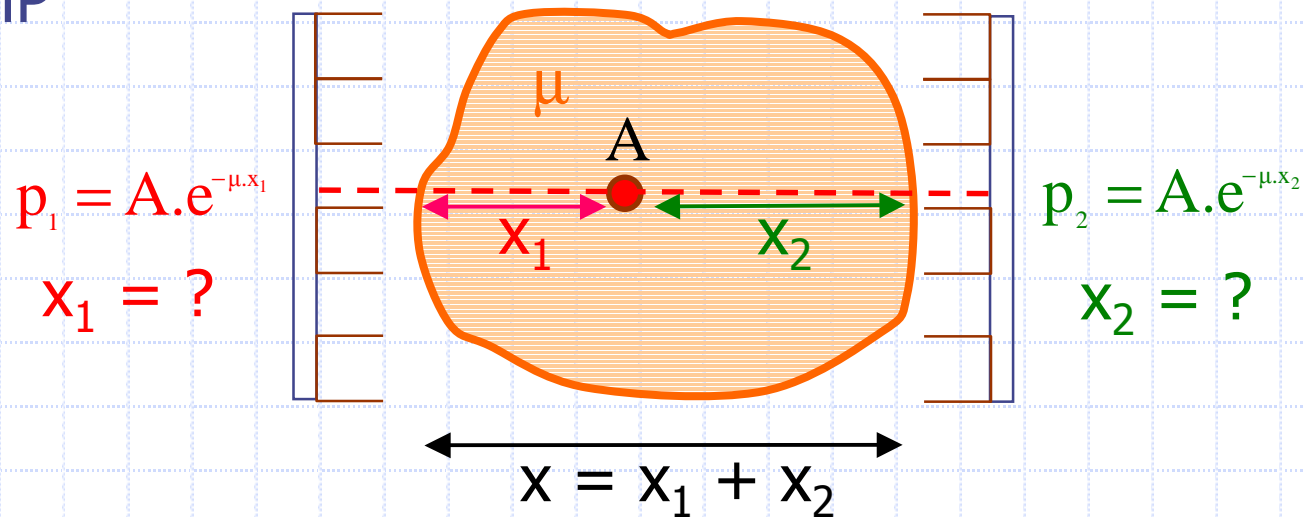


$$\hat{m}(v, v') = \frac{1 - \left[1 - \hat{h}(v, v')^2 \right]^n}{\hat{h}(v, v')}$$

$$n = 0,834 \cdot \ln(C) - 7,774$$

ATTENUATION PHOTOELECTRIQUE (PLANAIRE)

TEMP

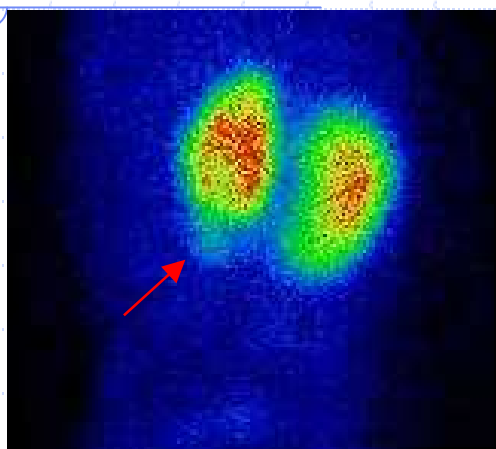


$$p_1 \cdot p_2 = A^2 \cdot e^{-\mu \cdot x_1} \cdot e^{-\mu \cdot x_2} = A^2 \cdot e^{-\mu \cdot (x_1 + x_2)} = A^2 \cdot e^{-\mu \cdot x}$$

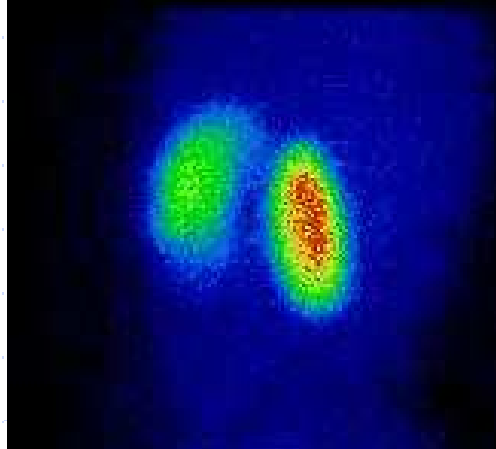
$$A = \sqrt{p_1 \cdot p_2 \cdot e^{\mu \cdot x}} = \sqrt{p_1 \cdot p_2} \cdot e^{\mu \cdot x / 2} \quad \text{Moyenne géométrique}$$

Condition : milieu atténuant homogène de μ connu

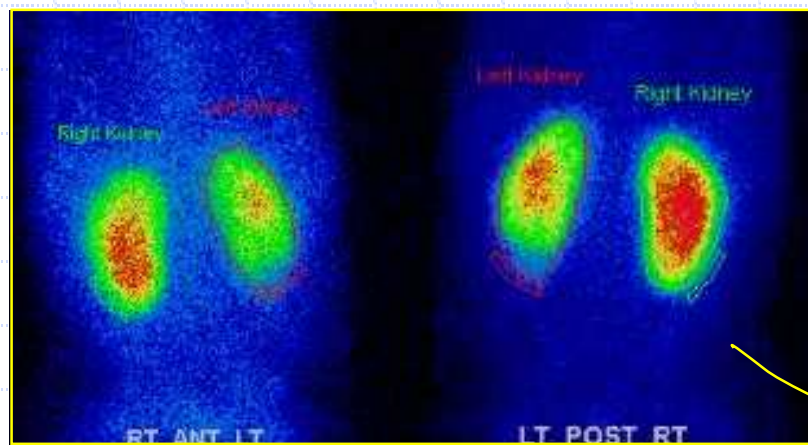
ATTENUATION PHOTOELECTRIQUE (PLANAIRE)



D2 OPG-Tc-99mLPCO



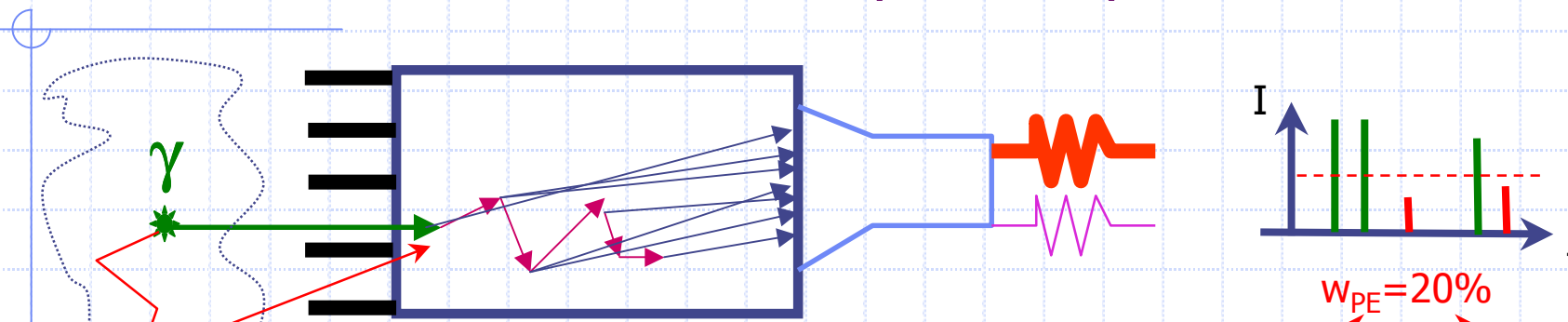
D1 OPG-Tc-99mLPCO



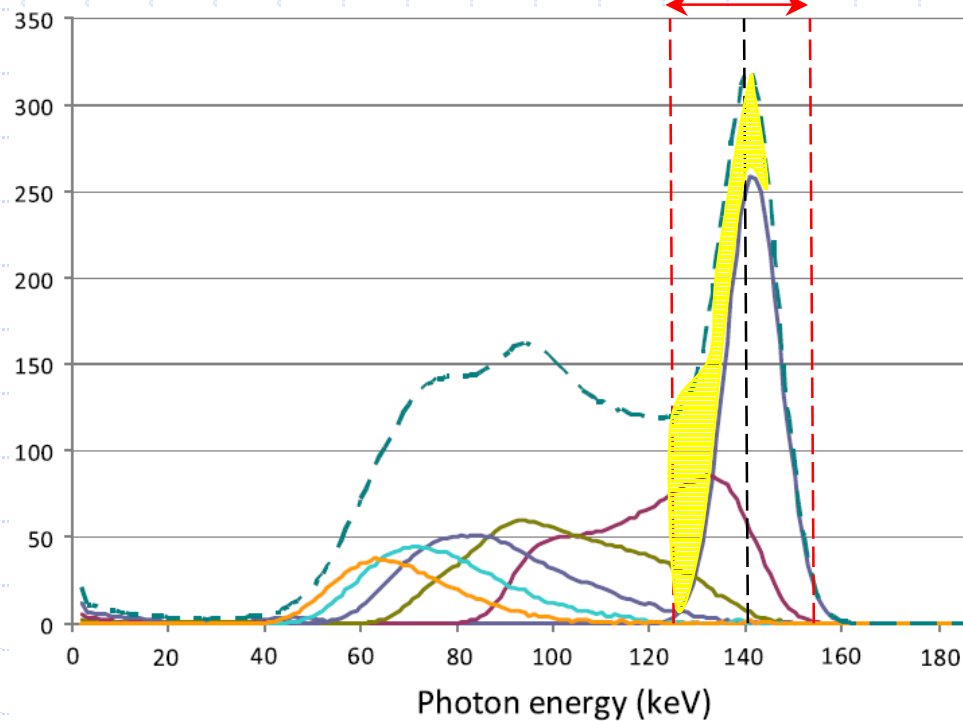
Renal DMSA Uptake

	LEFT	RIGHT
Uptake in % Dose:	16.99 %	21.28 %
% Total Relative Uptake:	44.40 %	55.60 %
% Total Area:	51.73 %	48.27 %
Net Injected Counts (cps):	2314.	
Radiopharmaceutical:	DMSA (Tc-99m)	
Height (cm):	69.00	
Weight (kg):	8.00	
Age (years):	1	
Body thickness (cm):	11.00	
Kidney Counts:	Post: 90657, Ant: 45581	Post: 117461, Ant: 56281
Kidney Area (pixels):	2890, 3033	2923, 2604
Bkgd Counts:	807, 890	823, 1223
Bkgd Area (pixels):	160, 173	128, 159

DIFFUSION COMPTON (PLANAIRE)



Spectrométrie: PE $\pm 10\%$



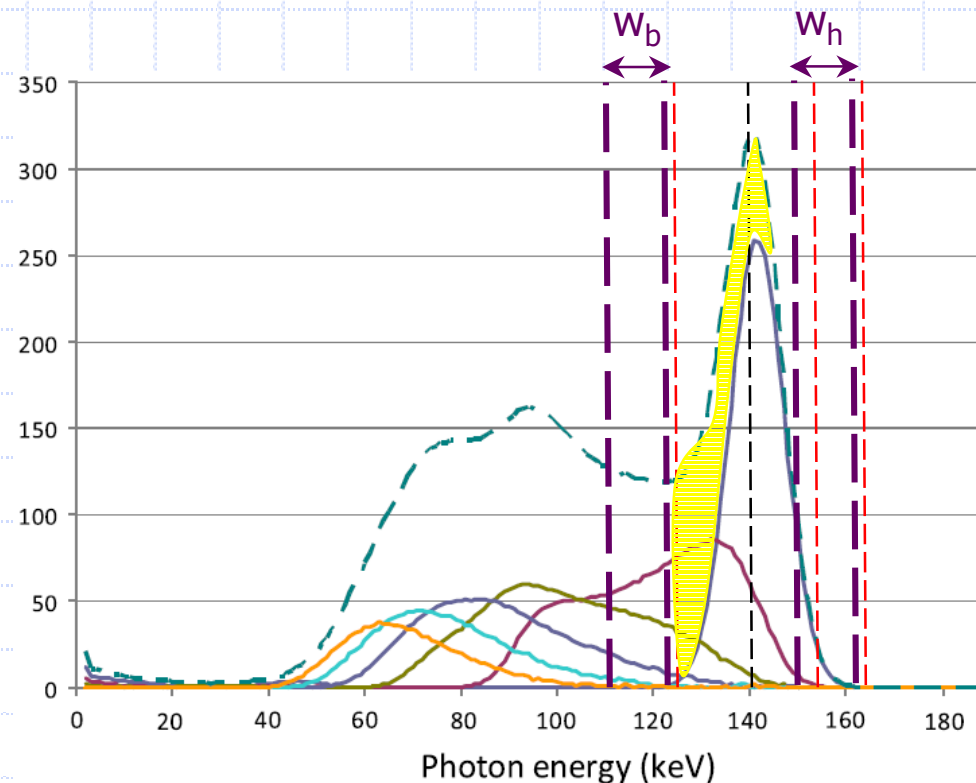
DIFFUSION COMPTON (PLANAIRE)

Spectrométrie: PE $\pm 10\%$

Estimation des photons diffusés dans des fenêtres hors pic puis soustraction.

$$C_d \approx \left(\frac{C_b}{w_b} + \frac{C_h}{w_h} \right) \cdot \frac{w_{PE}}{2}$$

$$C \approx C_{\text{non corrigé}} - C_d$$



D'un signal physique à une image médicale exploitable

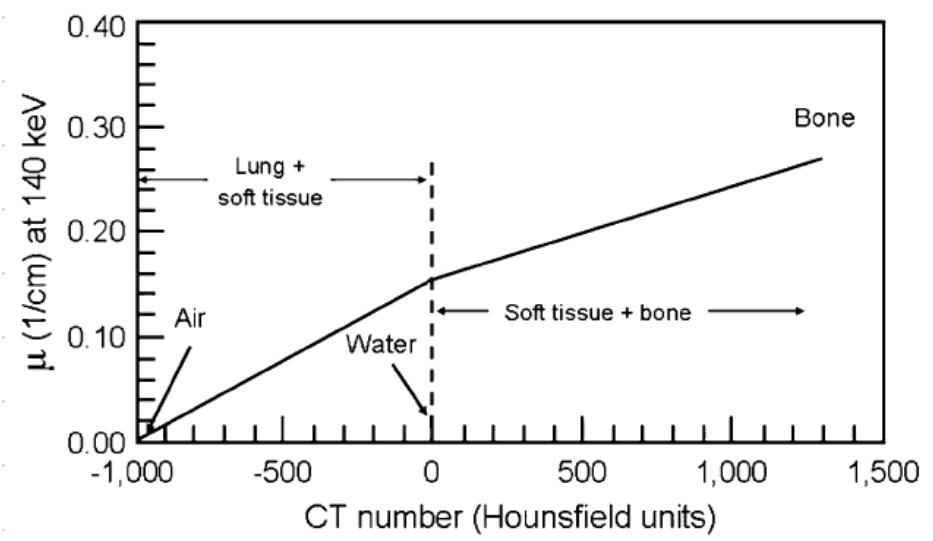
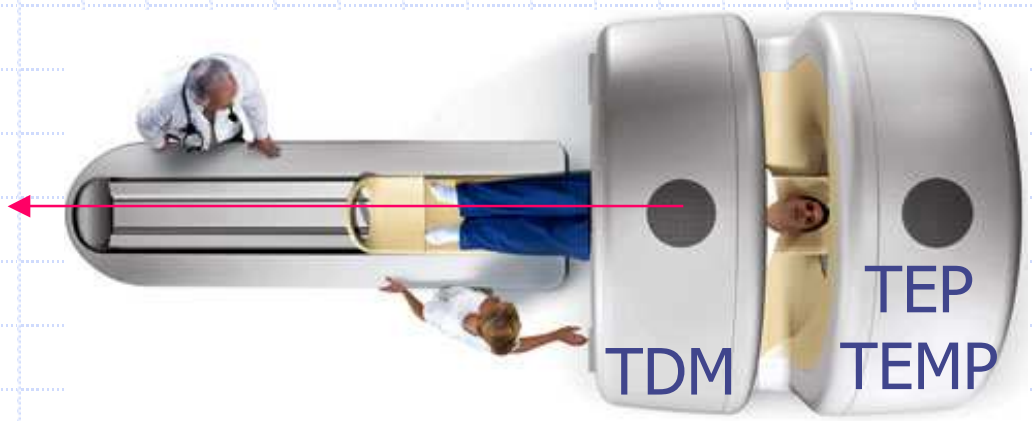
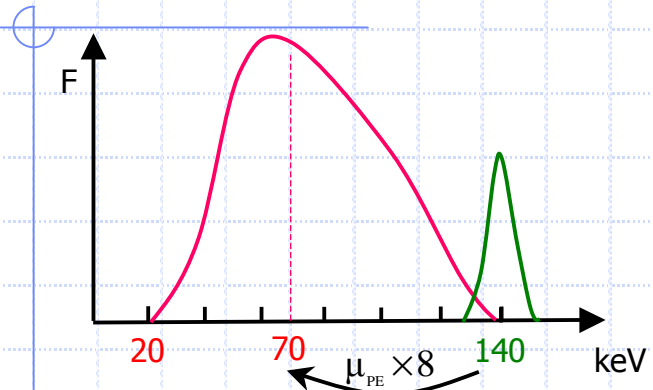
Les artefacts d'acquisition

Correction des artefacts (planaire & tomographie)

Déconvolution & atténuation en mode planaire

Déconvolution & atténuation en mode tomographique

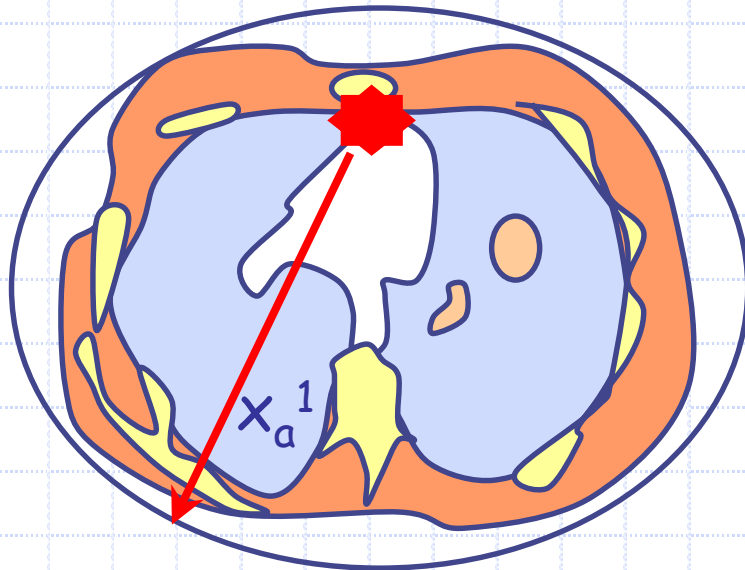
DETERMINATION DES ρ PAR CT



$$H(i, j) = \frac{\mu_T^{\tilde{70}} - \mu_{eau}^{\tilde{70}}}{\mu_{eau}^{\tilde{70}}} \cdot 1000$$

CORRECTION DE L'EFFET PHOTO-ELECTRIQUE

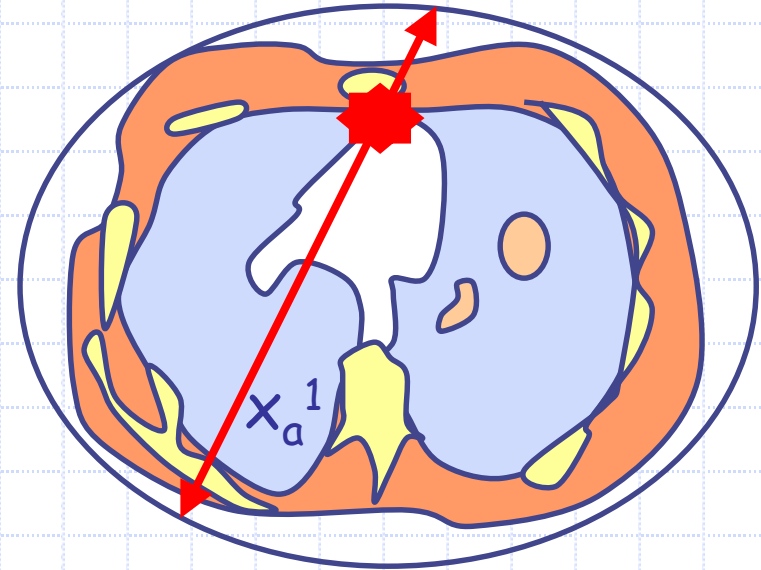
TEMP



$$k_1 = \exp(-\mu_o x_o^1 - \mu_{tm} x_{tm}^1 - \mu_a x_a^1) = I_1/I_o$$

La correction multiplicative nécessite la détermination des x^1 donc de reconstruire la coupe

PET $k_2 = \exp(-\mu_o x_o^2 - \mu_{tm} x_{tm}^2 - \mu_a x_a^2)$

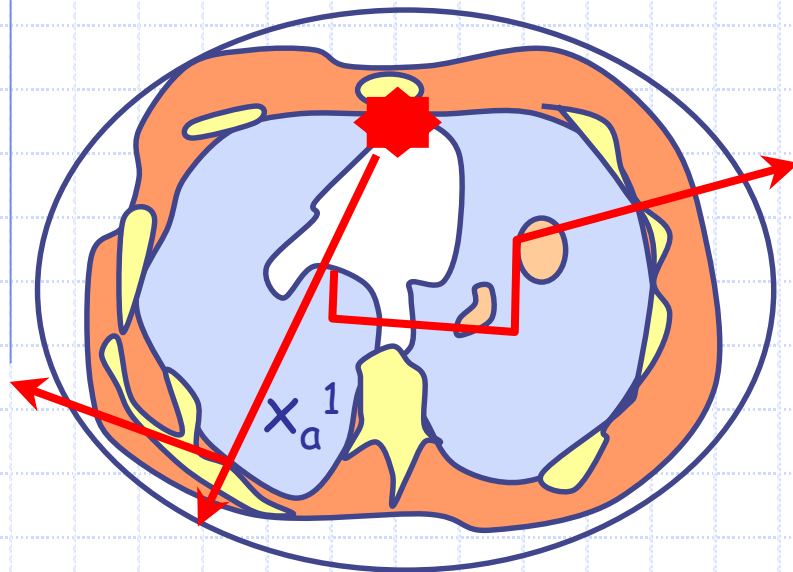


$$k_1 = \exp(-\mu_o x_o^1 - \mu_{tm} x_{tm}^1 - \mu_a x_a^1) = I_1/I_o$$

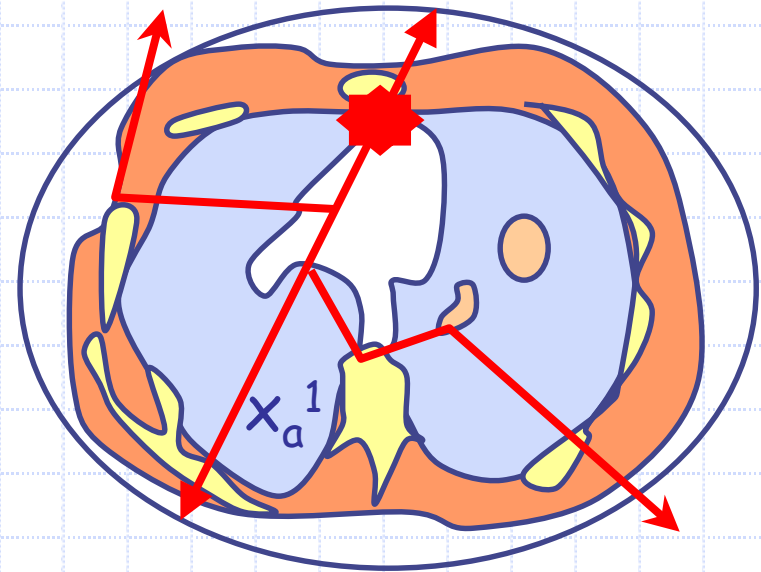
Correction multiplicative avant reconstruction sur chaque LOR par $\exp(\mu_{os} x_{os} + \mu_{mou} x_{mou} + \mu_{air} x_{air})$

CORRECTION DE L'EFFET COMPTON

TEMP



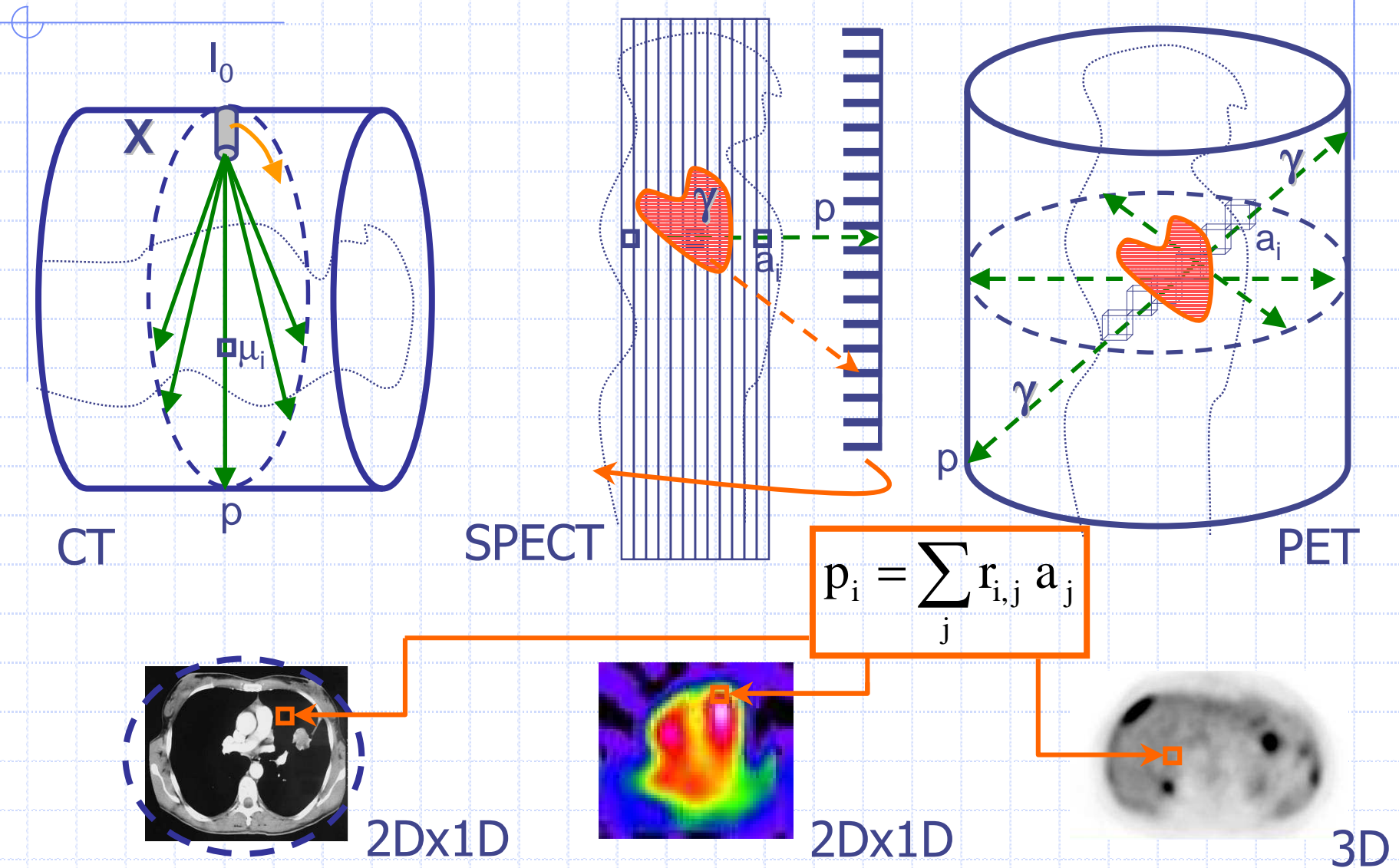
PET



Simulation de Monte-Carlo

Dans les deux cas,
la correction nécessite
de reconstruire la coupe

TOMOGRAPHIE: SYSTEME LINEAIRE



LIMITES DES TECHNIQUES ANALYTIQUES (RPF)

◆ Nécessité de données sur 180°

- ◆ Problème important en TEP 3D.
- ◆ L'inversion directe / RPF impossibles si données tronquées.

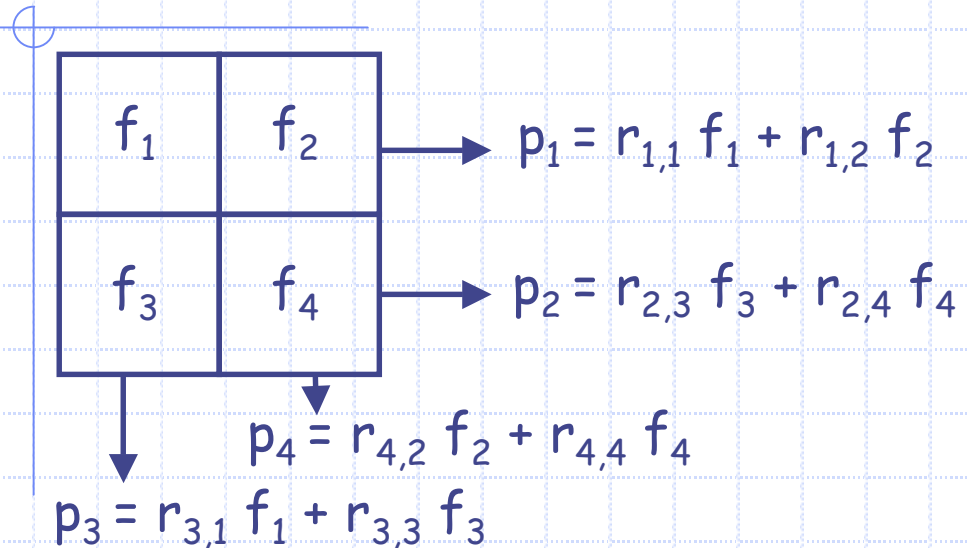
◆ Prise en compte des artefacts en SPECT et PET :

- ◆ Dans le théorème de la coupe centrale, $f(x)$ et non pas $f(x,s,\phi)$
- ◆ Difficulté majeure d'introduire des facteurs du type $\exp(-\mu L_{x,s,\phi})$
- ◆ Problème pour corriger les artefacts d'atténuation (photoélectrique, Compton).
- ◆ En revanche, une déconvolution de la réponse impulsionnelle est faisable.

◆ Ajustement de la fréquence de coupure délicate

- ◆ Nécessité d'un filtre passe-bas associé au filtre valeur absolue

MODELISATION ALGEBRIQUE



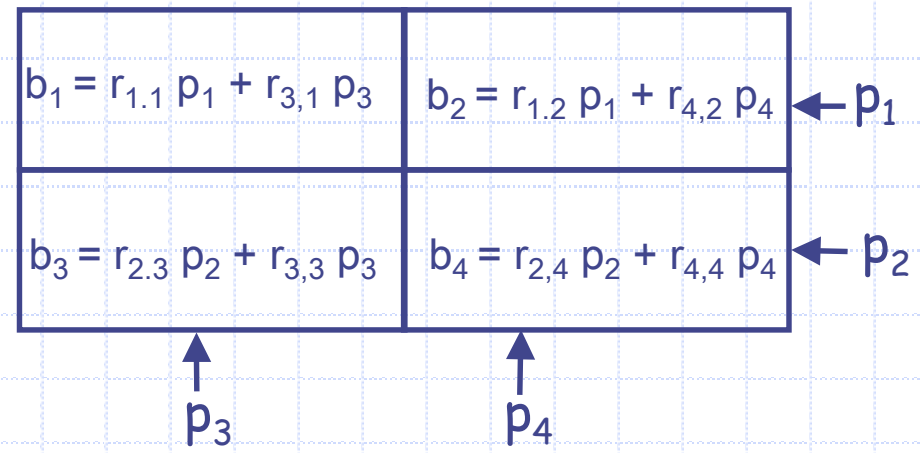
$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & r_{1,4} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & r_{2,4} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & r_{3,4} \\ r_{4,1} & r_{4,2} & r_{4,3} & r_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

$r_{i,j}$ = % du pixel j intersecté par la projection i

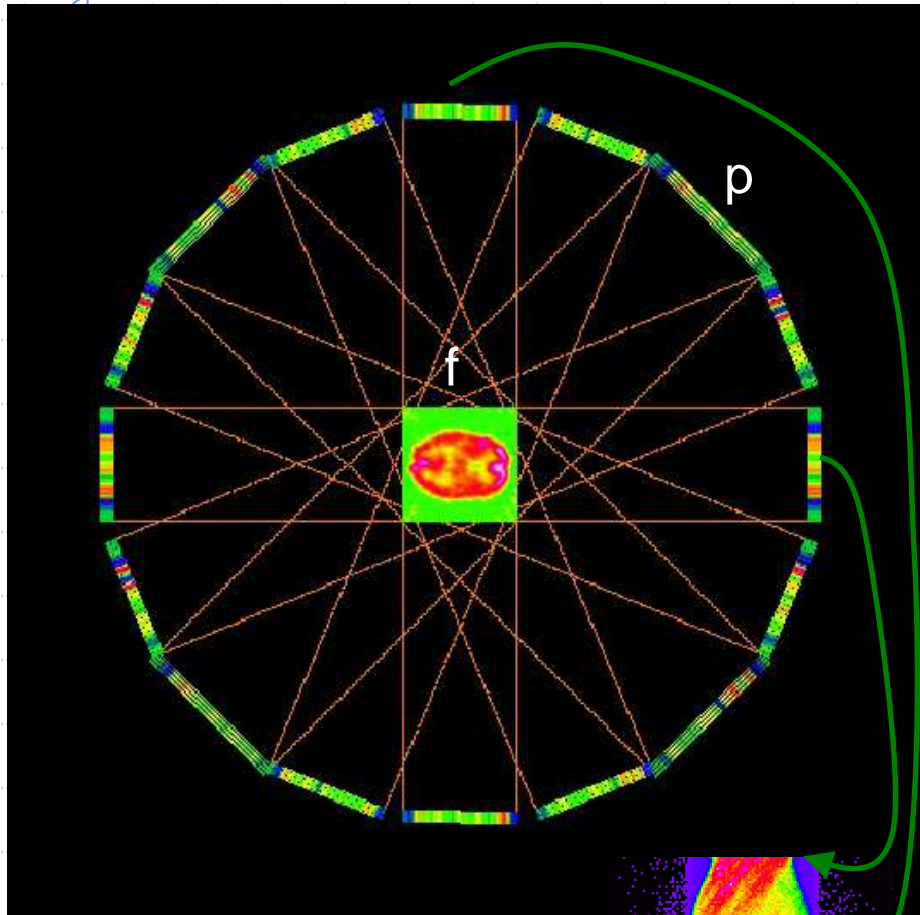
$$\mathbf{R} \cdot \vec{f} = \vec{p}$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{2,1} & r_{3,1} & r_{4,1} \\ r_{1,2} & r_{2,2} & r_{3,2} & r_{4,2} \\ r_{1,3} & r_{2,3} & r_{3,3} & r_{4,3} \\ r_{1,4} & r_{2,4} & r_{3,4} & r_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

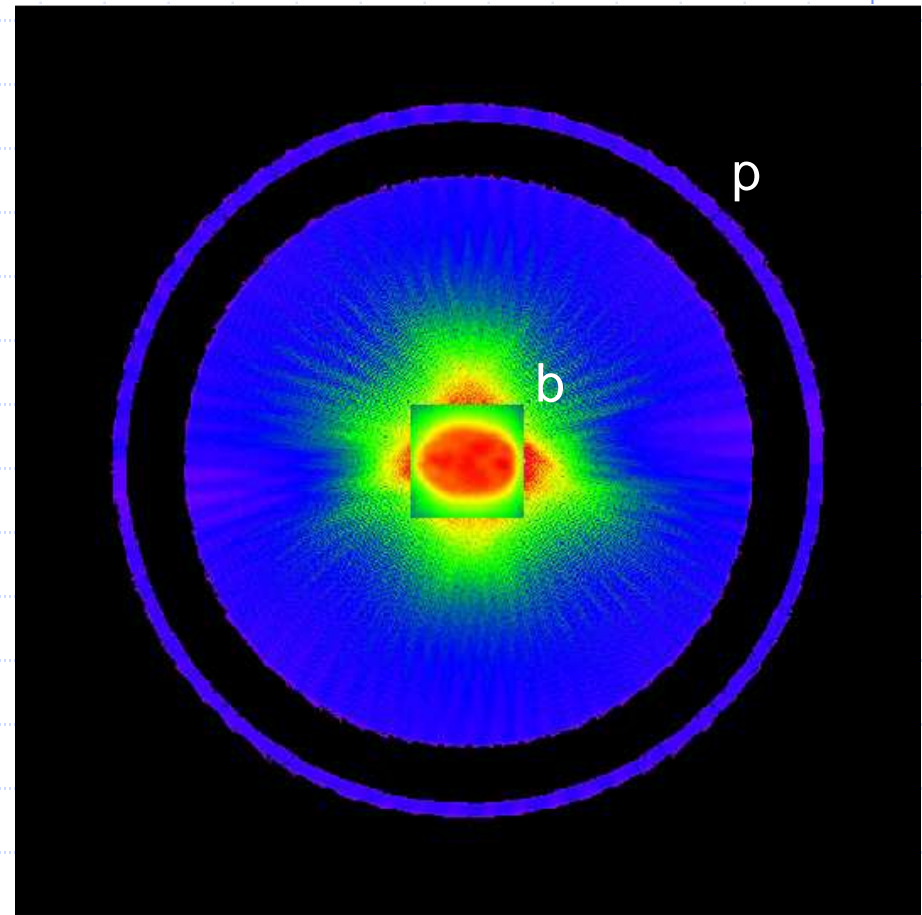
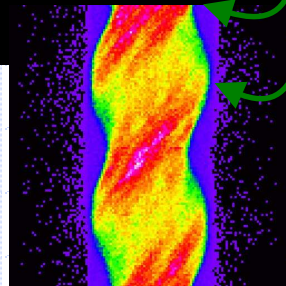
$${}^t\mathbf{R} \cdot \vec{p} = \vec{b}$$



Projection / Rétroprojection

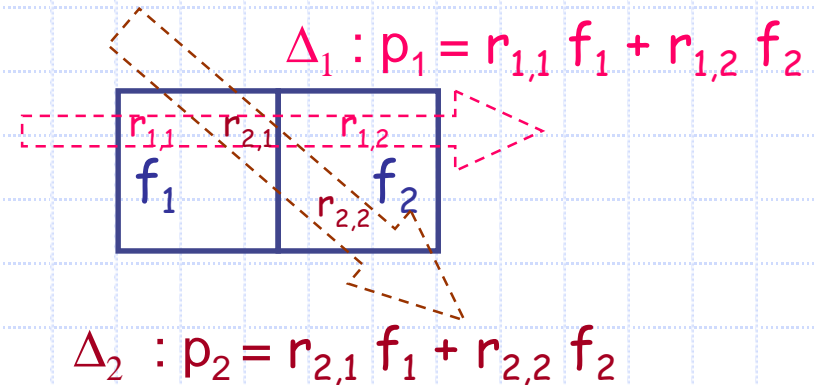
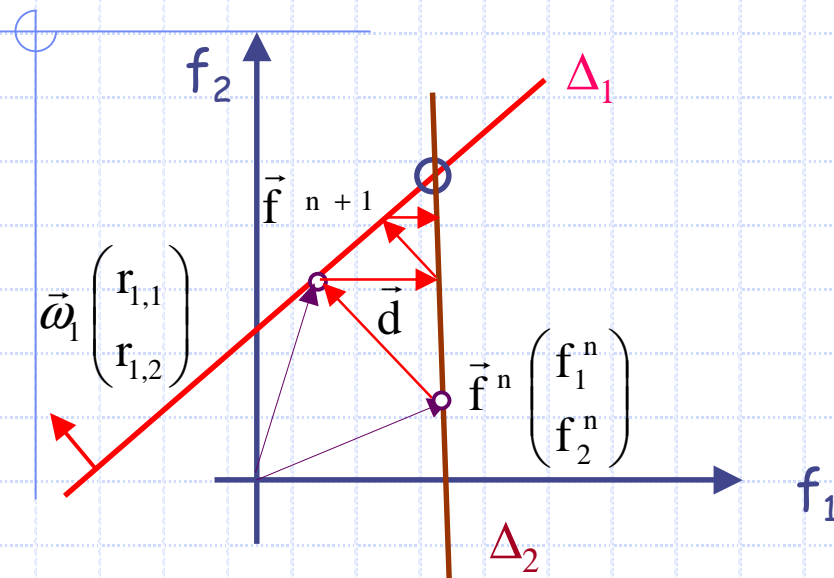


$$\mathbf{R} \cdot \vec{f} = \vec{p}$$



$${}^t\mathbf{R} \cdot \vec{p} = \vec{b}$$

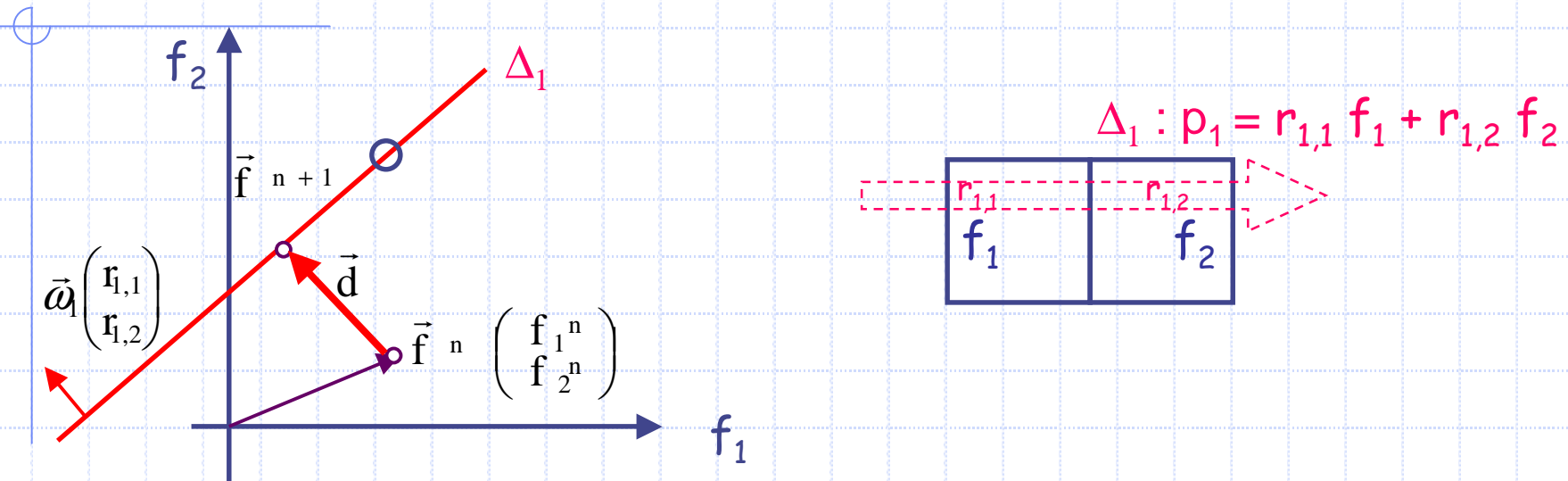
Algebraic Reconstruction Technique (I)



S. Kaczmarz
1895-1940

On construit une suite de coupes \vec{f}^n en projetant chaque itéré sur l'un puis l'autre hyperplan.

Algebraic Reconstruction Technique (II)



La distance d d'un point f^n à une droite Δ_1 est :

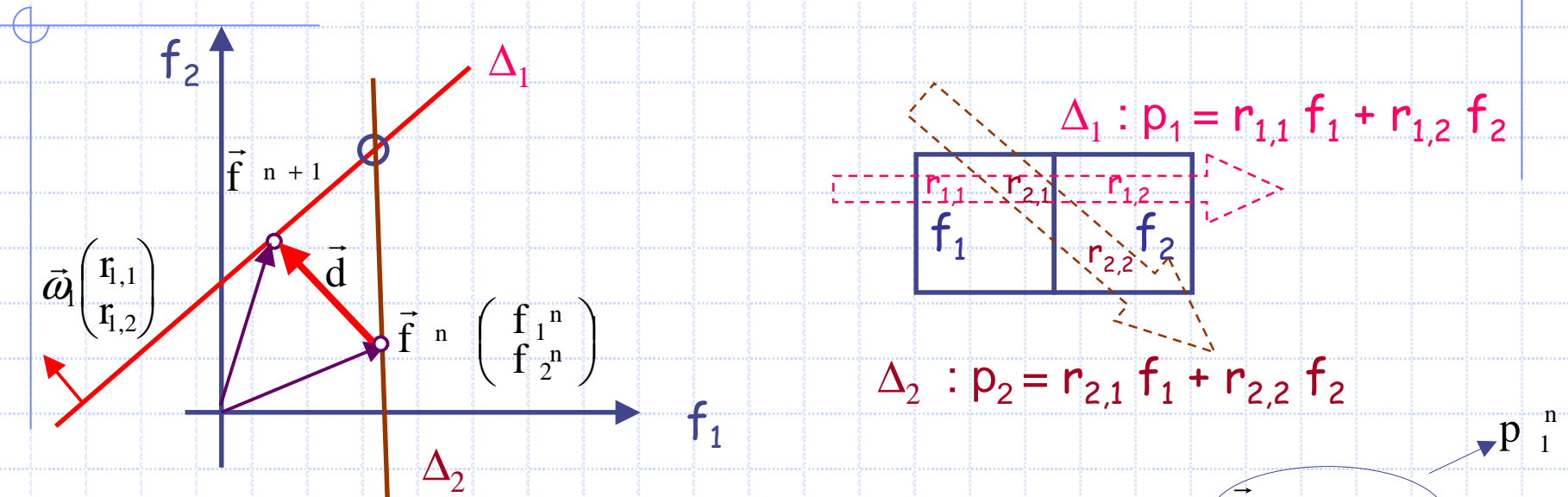
$$d = \frac{p_1 - \vec{f}^n \cdot \vec{\omega}_1}{\|\vec{\omega}_1\|} = \frac{p_1 - p_1^n}{\|\vec{\omega}_1\|}$$

$p_1^n = r_{1,1} f_1^n + r_{1,2} f_2^n$, projection qui serait mesurée si f^n était la solution



S. Kaczmarz
1895-1940

Algebraic Reconstruction Technique (II)



$$\vec{f}^{n+1} = \vec{f}^n + d \frac{\vec{\omega}_1}{\|\vec{\omega}_1\|} \quad d = \frac{p_1 - \vec{f}^n \cdot \vec{\omega}_1}{\|\vec{\omega}_1\|}$$

$$\vec{f}^{n+1} = \vec{f}^n + \frac{p_1 - p_1^n}{\|\vec{\omega}_1\|^2} \vec{\omega}_1$$

$$\vec{f}^{n+1} = \vec{f}^n + R^* (p_1 - p_1^n)$$



S. Kaczmarz
1895-1940

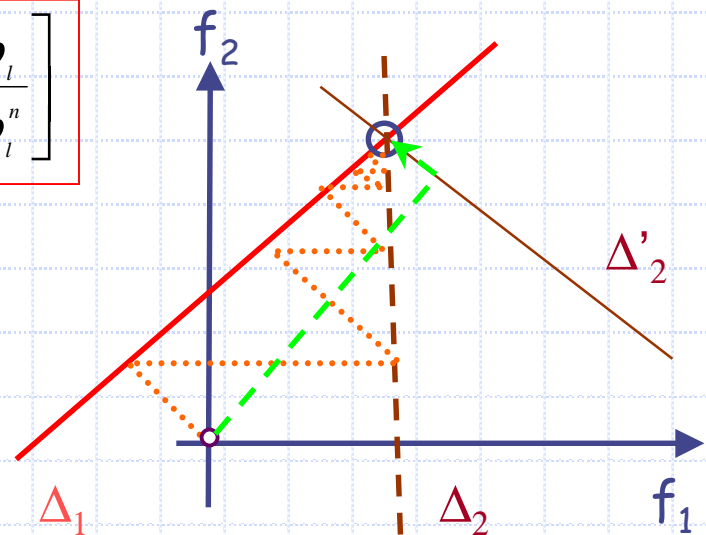
AUTRES ALGORITHMES ALGEBRIQUES

- ART: $\vec{f}^{n+1} = \vec{f}^n + R^* (p_1 - p_1^n)$
- MLEM: $P(\vec{f} / \vec{p}) = P(\vec{p} / \vec{f}) \cdot P(\vec{f}) / P(\vec{p}) = P(\vec{p} / \vec{f}) \cdot P(\vec{f}) \max_{\vec{f}}$
 $\vec{f} = \arg \min_{\vec{f}} \left[-\log P(\vec{p} / \vec{f}) - \log P(\vec{f}) \right]$

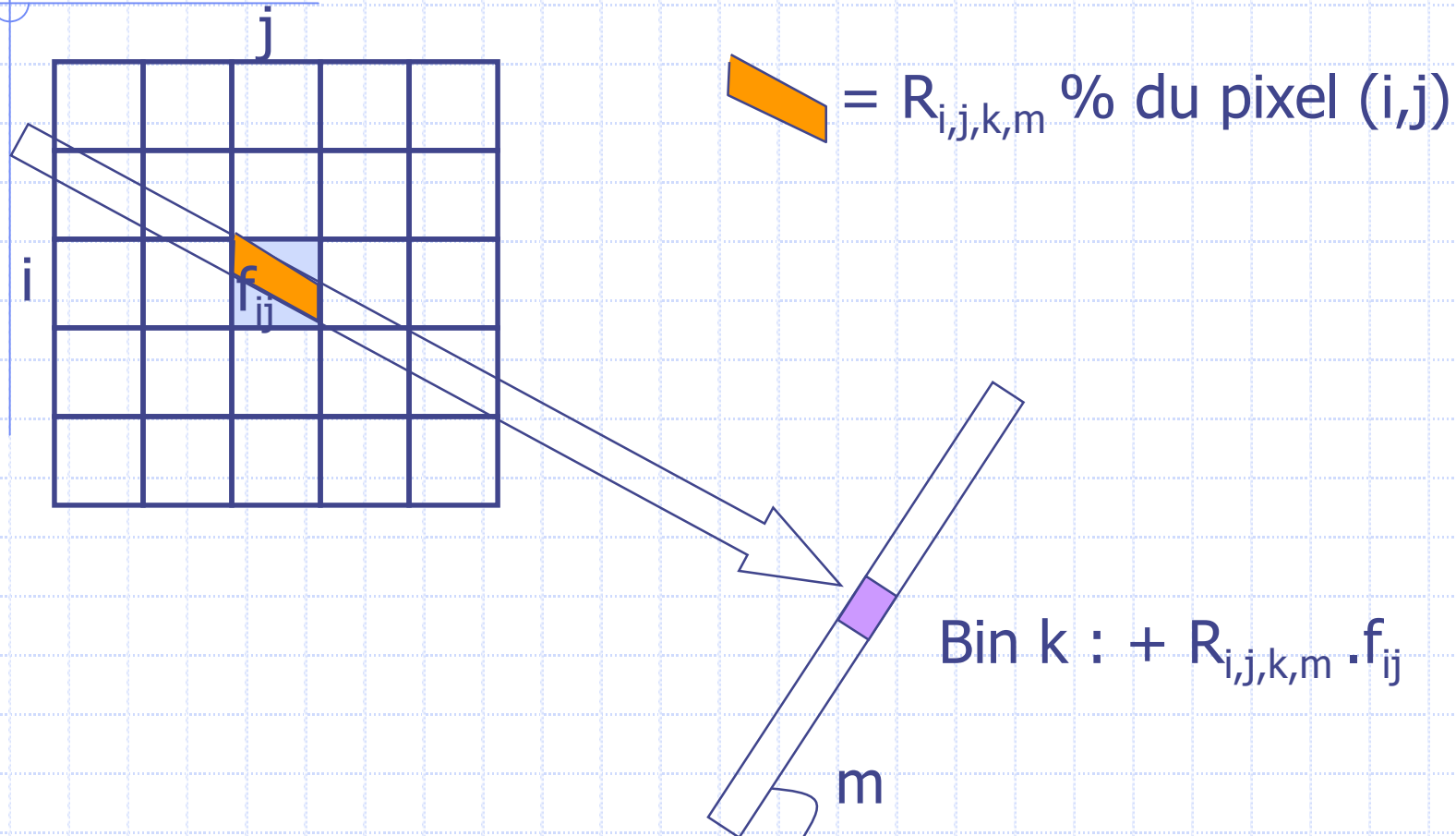
↓ Stat. de Poisson sur $P(\vec{p} / \vec{f})$

$$f_i^{n+1} = f_i^n \cdot \frac{1}{\sum_{l=1}^P r_{l,i}} \sum_{l=1}^P r_{l,i} \frac{p_l}{\sum_{s=1}^N r_{l,s} f_s^n} \Rightarrow f_i^{n+1} = k_i \cdot f_i^n \cdot R^* \left[\frac{p_l}{p_l^n} \right]$$

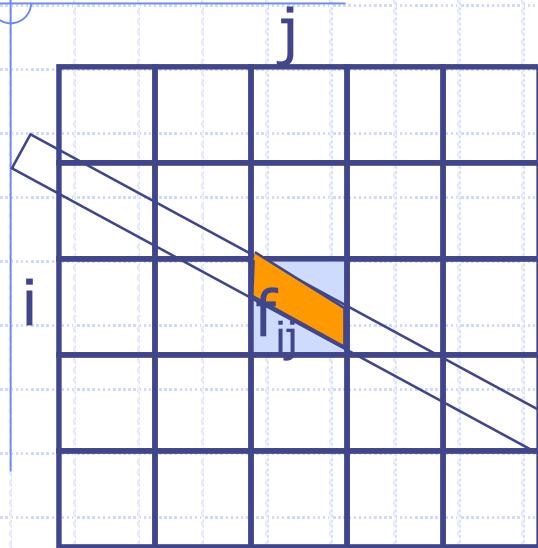
- OSEM:



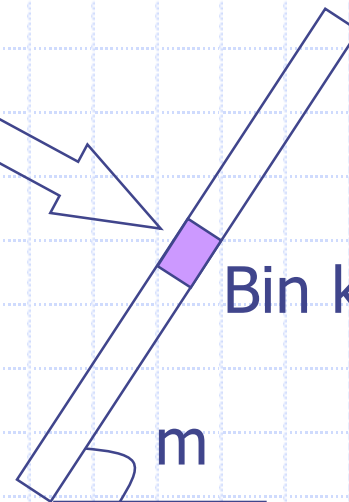
MODELISATION DES ARTEFACTS



MODELISATION DE L'ATTENUATION



 = $R_{i,j,k,m}$ % du pixel (i,j)

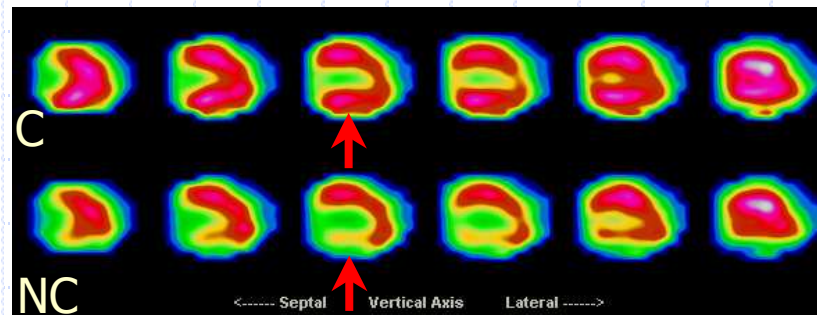
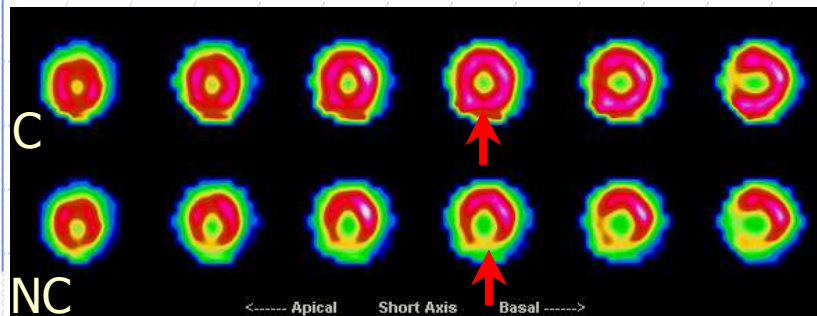


Bin k : $+ R_{i,j,k,m} \cdot f_{ij} \cdot k_{i,j}$

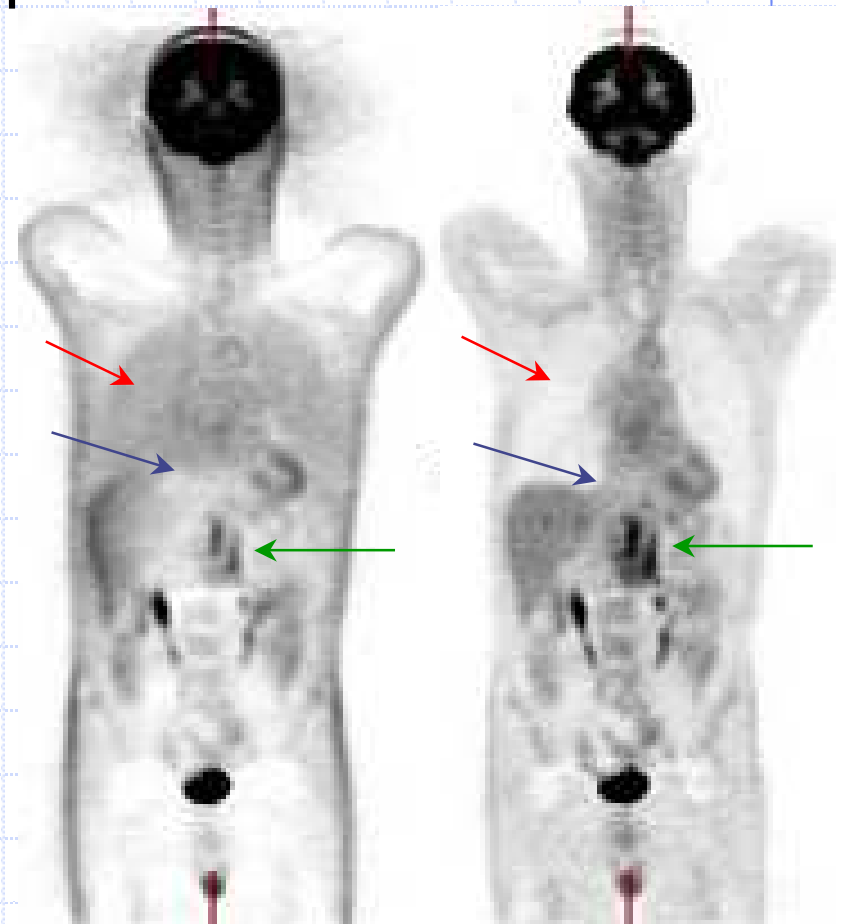
$$k_{i,j} = \exp(\mu_o x_o^{i,j} + \mu_{tm} x_{tm}^{i,j} + \mu_a x_a^{i,j}) \cdot K_{i,j}^d$$

CORRECTION D'ATTENUATION PAR CT

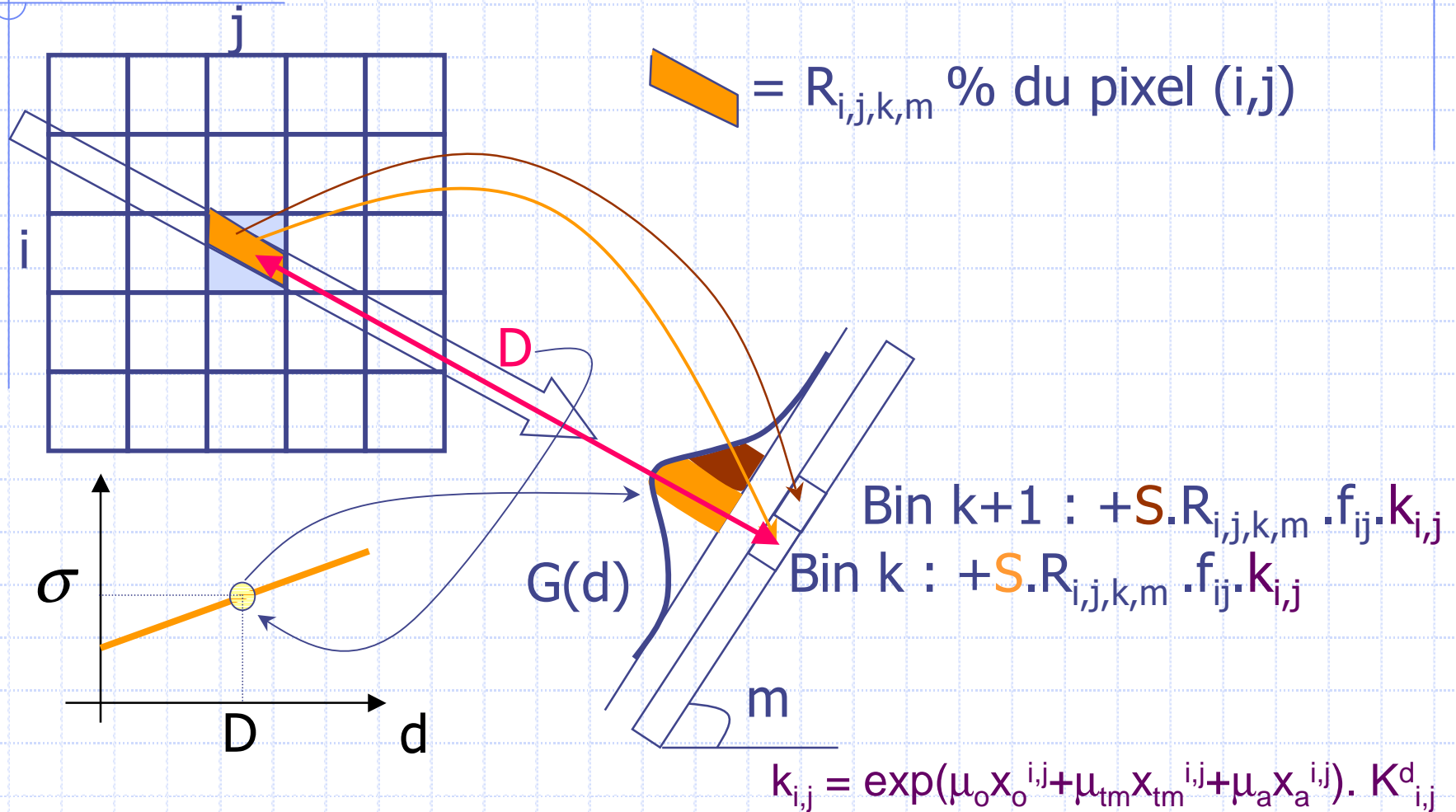
TEMP



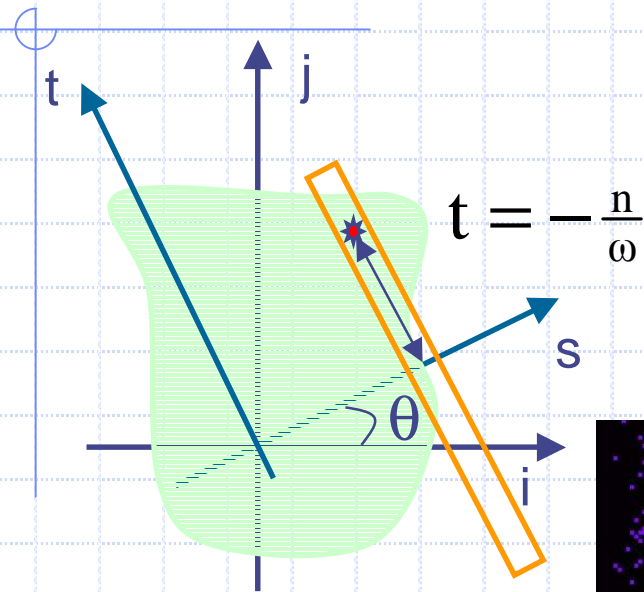
PET



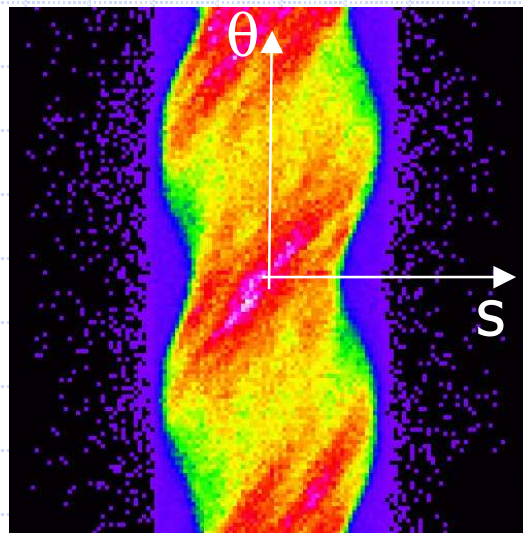
MODELISATION DE LA REponse GAUSSIENNE



RELATION FREQUENCE DISTANCE

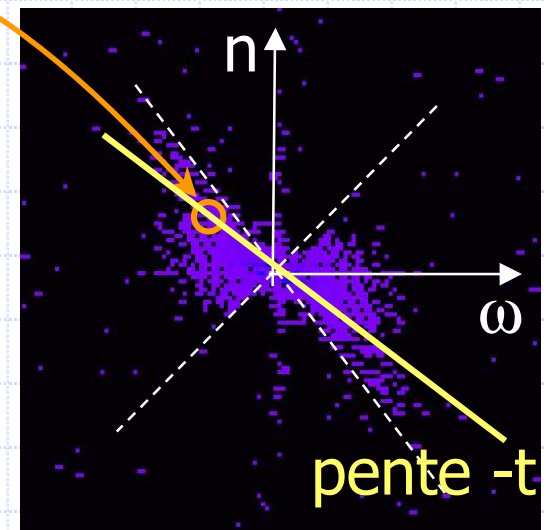


Une désintégration contribue à $\hat{p}_c(\omega, n)$ quand θ permet que $t = -\frac{n}{\omega}$



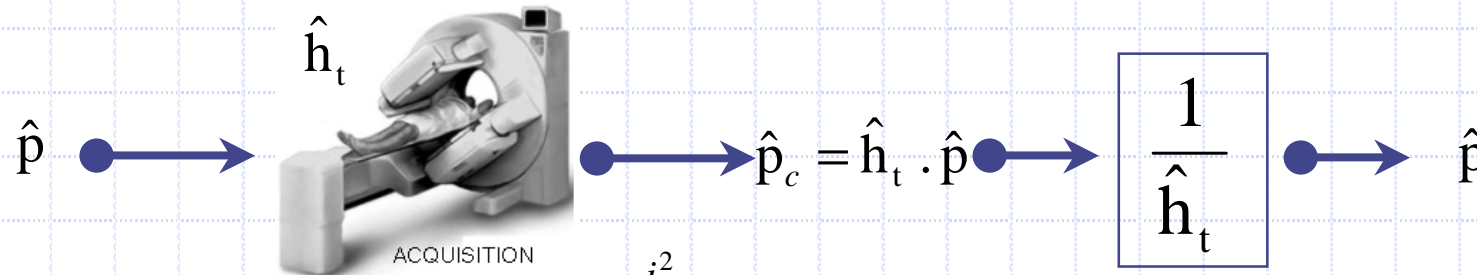
$$p_c(s, \theta) = \int f(i, j).dt$$

TF₂



$$\hat{p}_c(\omega, n)$$

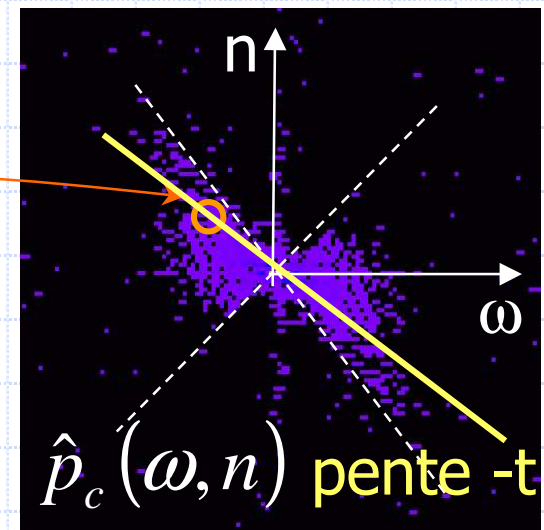
FILTRE DE METZ EN SPECT



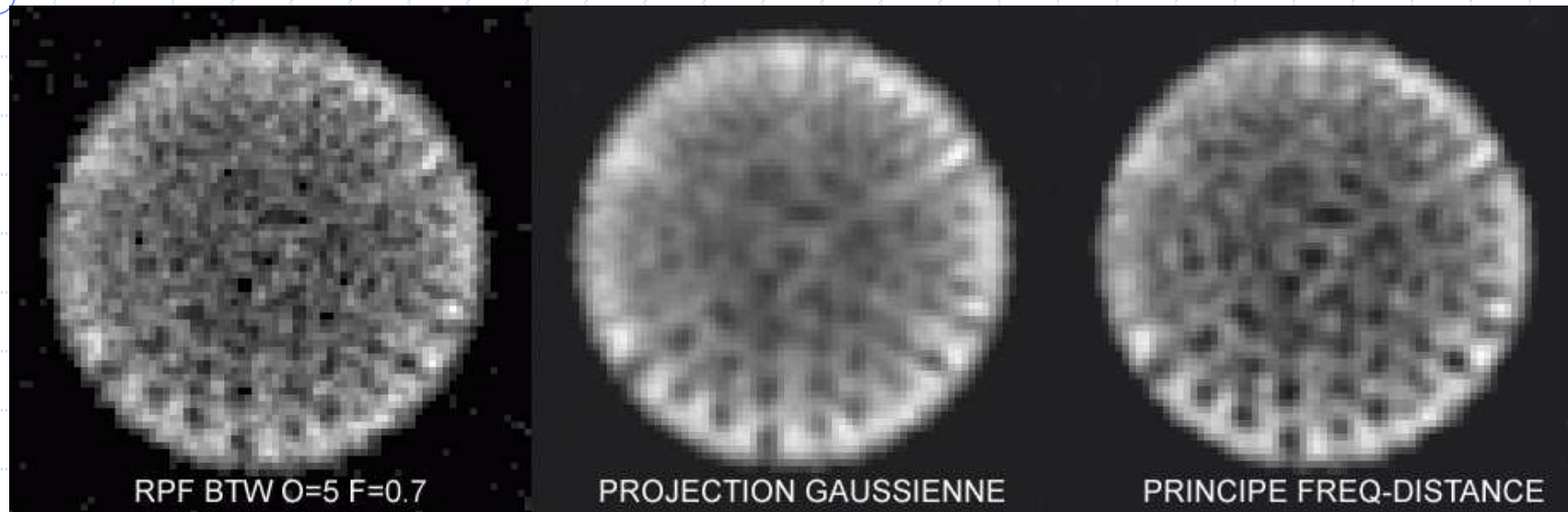
$$h_t(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{i^2}{2\sigma_t^2}}$$

$$\hat{p}_c(\omega, n) = \hat{h}_{\frac{n}{\omega}}(\omega) \cdot \hat{p}(\omega, n)$$

$$\hat{p}(\omega, n) = \frac{1}{\hat{h}_{\frac{n}{\omega}}(\omega)} \cdot \hat{p}_c(\omega, n)$$

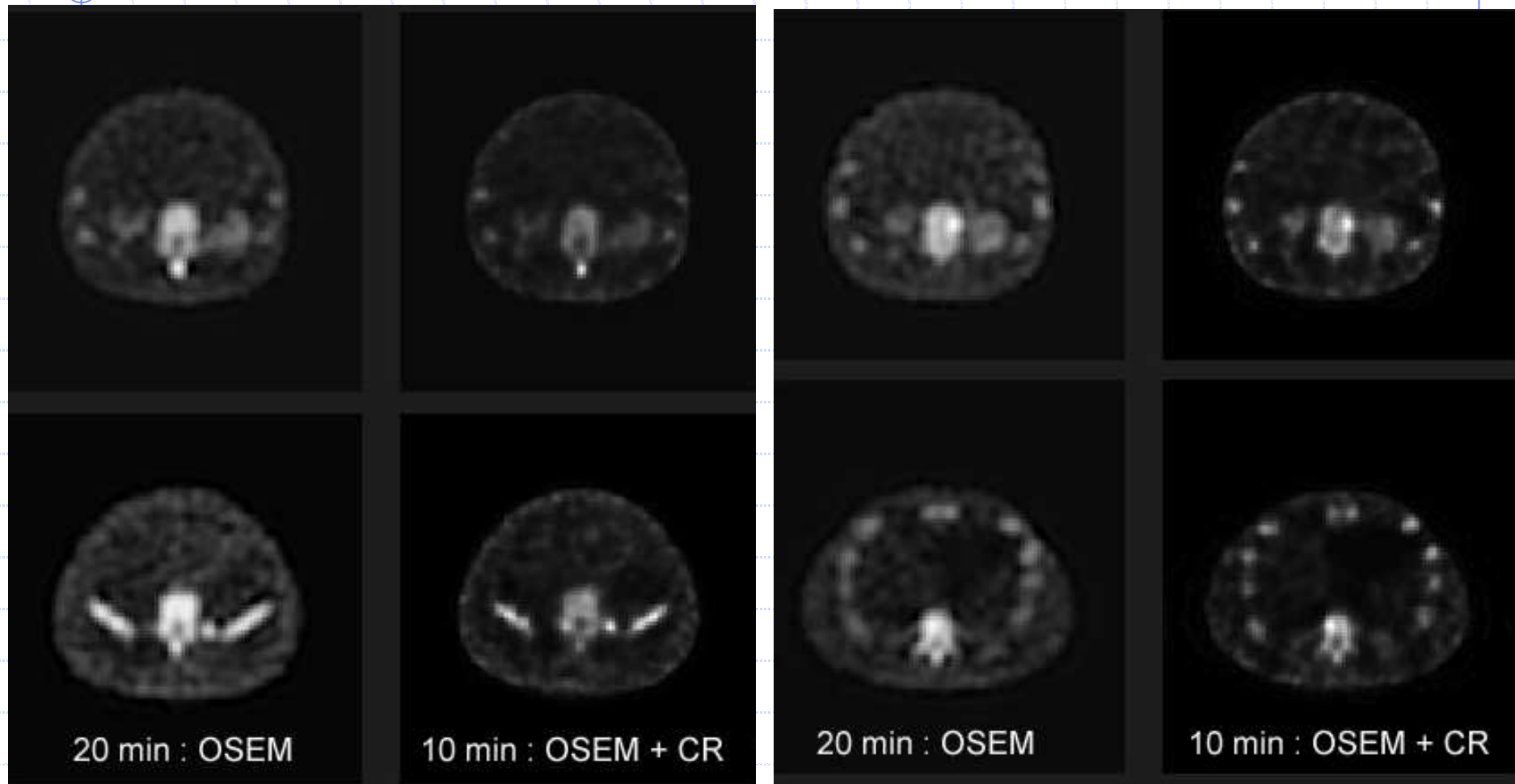


EXEMPLE DE DECONVOLUTION

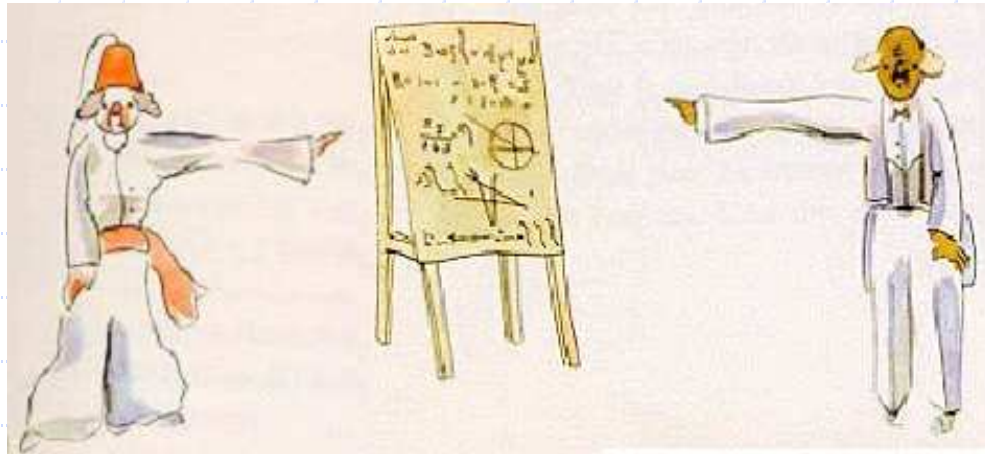


Résultats comparables pour les deux méthodes

EXEMPLE DE DECONVOLUTION



Applications cliniques : restore[®], evolution for bone[®]...



Bibliographie :

Introduction au traitement numérique des images médicales. D. Mariano-Goulart.

Encyclopédie Médico-chirurgicale, 35-100-A-10, 2015.

Reconstruction tomographique en imagerie médicale. D. Mariano-Goulart

Encyclopédie Médico-chirurgicale, 35-105-A-10, 2015.

The Mathematics of Computerized Tomography.

F. Natterer. 2001. SIAM.

Merci de votre attention...

denis.mariano-goulart@univ-montp1.fr

<http://scinti.edu.umontpellier.fr>