

Entrainement 1 : Reprendre l'exercice illustré dans la figure 7 en initialisant le processus de reconstruction par ART avec l'image proposée comme 1° itération dans la figure 8. Pourquoi le résultat diffère-t-il de celui de la figure 7 ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{écart} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 40 \end{pmatrix} = 3 * \begin{pmatrix} 13.33 \\ 26.67 \\ 13.33 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{iter 1} = \begin{pmatrix} 14.33 & 16.33 & 14.33 \\ 29.67 & 30.67 & 29.67 \\ 14.33 & 16.33 & 14.33 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14.33 & 16.33 & 14.33 \\ 29.67 & 30.67 & 29.67 \\ 14.33 & 16.33 & 14.33 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro verticale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 58.33 \\ 63.33 \\ 58.33 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{écart}$$

$$= \begin{pmatrix} -13.33 \\ 26.67 \\ -13.33 \end{pmatrix} = 3 * \begin{pmatrix} -4.44 \\ 8.89 \\ -4.44 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{iter 2} = \begin{pmatrix} 9.89 & 25.22 & 9.89 \\ 25.23 & 39.56 & 25.23 \\ 9.89 & 25.22 & 9.89 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9.89 & 25.22 & 9.89 \\ 25.23 & 39.56 & 25.23 \\ 9.89 & 25.22 & 9.89 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{écart} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{iter 3} = \text{iter 2} = \begin{pmatrix} 9.89 & 25.22 & 9.89 \\ 25.23 & 39.56 & 25.23 \\ 9.89 & 25.22 & 9.89 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9.89 & 25.22 & 9.89 \\ 25.23 & 39.56 & 25.23 \\ 9.89 & 25.22 & 9.89 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro verticale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{écart} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{solution} = \text{iter 2} = \begin{pmatrix} 9.89 & 25.22 & 9.89 \\ 25.23 & 39.56 & 25.23 \\ 9.89 & 25.22 & 9.89 \end{pmatrix}$$

L'algorithme a convergé vers une autre solution possible au problème tomographique qui n'a pas unicité de solution puisque constitué de 6 équations seulement pour un problème à 9 inconnues.

Entrainement 2 : Reprendre l'exercice illustré dans la figure 8 en initialisant le processus de reconstruction par MLEM avec la rétroprojection des projections mesurées. Combien d'itérations faut-il calculer pour obtenir des projections estimées correctement à 0,1 près ?

$$\begin{pmatrix} 15 & 22.5 & 15 \\ 22.5 & 30 & 22.5 \\ 15 & 22.5 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 52.5 \\ 75 \\ 52.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.86 \\ 1.20 \\ 0.86 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 22.5 & 15 \\ 22.5 & 30 & 22.5 \\ 15 & 22.5 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro verticale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 52.5 \\ 75 \\ 52.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.86 \\ 1.20 \\ 0.86 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{iter 1} = \begin{pmatrix} 12.86 & 23.18 & 12.86 \\ 23.18 & 36 & 23.18 \\ 12.86 & 23.18 & 12.86 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12.86 & 23.18 & 12.86 \\ 23.18 & 36 & 23.18 \\ 12.86 & 23.18 & 12.86 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 48.90 \\ 82.36 \\ 48.90 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.92 \\ 1.09 \\ 0.92 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12.86 & 23.18 & 12.86 \\ 23.18 & 36 & 23.18 \\ 12.86 & 23.18 & 12.86 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro verticale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 48.90 \\ 82.36 \\ 48.90 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.92 \\ 1.09 \\ 0.92 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{iter 2} = \begin{pmatrix} 11.83 & 23.3 & 11.83 \\ 23.3 & 39.24 & 23.3 \\ 11.83 & 23.3 & 11.83 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11.83 & 23.3 & 11.83 \\ 23.3 & 39.24 & 23.3 \\ 11.83 & 23.3 & 11.83 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 47.04 \\ 85.84 \\ 47.04 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.05 \\ 0.96 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{iter 3} = \begin{pmatrix} 11.36 & 23.42 & 11.36 \\ 23.42 & 41.20 & 23.42 \\ 11.36 & 23.42 & 11.36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11.36 & 23.42 & 11.36 \\ 23.42 & 41.20 & 23.42 \\ 11.36 & 23.42 & 11.36 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 46.14 \\ 88.04 \\ 46.14 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.98 \\ 1.02 \\ 0.98 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{iter 4} = \begin{pmatrix} 11.13 & 23.42 & 11.13 \\ 23.42 & 42.02 & 23.42 \\ 11.13 & 23.42 & 11.13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11.13 & 23.42 & 11.13 \\ 23.42 & 42.02 & 23.42 \\ 11.13 & 23.42 & 11.13 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 45.68 \\ 88.86 \\ 45.68 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{iter 5} = \begin{pmatrix} 11.02 & 23.42 & 11.02 \\ 23.42 & 42.44 & 23.42 \\ 11.02 & 23.42 & 11.02 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11.02 & 23.42 & 11.02 \\ 23.42 & 42.44 & 23.42 \\ 11.02 & 23.42 & 11.02 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 45.46 \\ 89.28 \\ 45.46 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{iter 6} = \begin{pmatrix} 10.91 & 23.42 & 10.91 \\ 23.42 & 43.29 & 23.42 \\ 10.91 & 23.42 & 10.91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10.91 & 23.42 & 10.91 \\ 23.42 & 43.29 & 23.42 \\ 10.91 & 23.42 & 10.91 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 45.24 \\ 90.13 \\ 45.24 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 1.01 \\ 0.99 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{iter 7} = \begin{pmatrix} 10.80 & 23.42 & 10.80 \\ 23.42 & 43.72 & 23.42 \\ 10.80 & 23.42 & 10.80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10.80 & 23.42 & 10.80 \\ 23.42 & 43.72 & 23.42 \\ 10.80 & 23.42 & 10.80 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 45.02 \\ 90.56 \\ 45.02 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.99 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{iter 7} = \begin{pmatrix} 10.80 & 23.30 & 10.80 \\ 23.30 & 43.28 & 23.30 \\ 10.80 & 23.30 & 10.80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10.80 & 23.30 & 10.80 \\ 23.30 & 43.28 & 23.30 \\ 10.80 & 23.30 & 10.80 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pro horizontale} \begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 45 \end{pmatrix} \text{ versus estimé} = \begin{pmatrix} 44.90 \\ 89.88 \\ 44.90 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rapport} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}, \text{ idem en vertical}$$

$$\Rightarrow \text{solution} = \begin{pmatrix} 10.80 & 23.30 & 10.80 \\ 23.30 & 43.28 & 23.30 \\ 10.80 & 23.30 & 10.80 \end{pmatrix}$$

L'algorithme a convergé vers une autre solution possible au problème tomographique qui s'approche à 0.1 près des projections mesurées après 7 itérations. On trouve encore une autre solution possible (indétermination d'un problème linéaire constitué de 6 équations seulement pour 9 inconnues).