

# RECONSTRUCTION TOMOGRAPHIQUE

F. BEN-BOUALLEGUE et D. MARIANO-GOULART.2017

## Objectifs

---

Ce chapitre explique en quoi la reconstruction d'images tomographiques relève d'un problème linéaire mal conditionné et sur quels principes fonctionnent les algorithmes de rétroprojection filtrée et les techniques itératives de reconstruction. Il exclut tout formalisme mathématique, mais pourra servir d'introduction à l'approfondissement plus complet [1], mais aussi plus scientifique [2] de la tomographie médicale.

## Plan du chapitre

---

- Introduction
- Notion de projection
- Conditionnement
- Modélisation
- Rétroprojection filtrée
- Reconstruction itérative
- Spécificités en tomographie 3D
- L'essentiel à retenir
- Entraînement
- Références bibliographiques

## Introduction

---

Avec W. Röntgen et H. Becquerel, puis la famille Curie, le XIX siècle finissant avait vu éclore une physique des rayonnements ionisants qui permettait pour la première fois de visualiser les organes internes d'un patient de façon non invasive. Le développement de l'imagerie radiologique qui suivit très vite, puis de l'imagerie scintigraphique resta cependant longtemps cantonné à la production d'images de projections où les signaux issus des divers plans perpendiculaires au rayonnement incident se superposaient sur un plan unique, rendant complexe l'interprétation médicale. Les solutions théoriques qui permirent de résoudre cette difficulté et de disposer d'une imagerie volumique ou reconstruite en coupes existaient pourtant dès le début du XX<sup>e</sup> siècle, avec les travaux des mathématiciens J. Radon [3] en 1917 et S. Kaczmarz [4] en 1937. Mais il fallut attendre l'intervention d'un ingénieur

talentueux, GN Hounsfield au tout début des années 1970 [5], le développement des calculateurs numériques qui accompagna la conquête de la Lune, puis le parrainage financier d'une société d'édition musicale qui bénéficiait dans les années 1960 du succès phénoménal de quatre chanteurs à la mode venus de Liverpool pour que naisse la tomographie médicale et que les premiers scanners prennent peu à peu la place qu'on leur connaît de nos jours dans le diagnostic médical.

## Notion de projection

---

Presque universellement numérisées, les techniques d'imagerie médicale modernes visent à mesurer la distribution volumique de certaines caractéristiques physiques d'un patient qui sont supposées uniformes au sein de petits cubes (les voxels) pavant le volume à explorer. La résolution limitée de tout appareil d'imagerie garantit en effet la possibilité de ne perdre aucune information dans ce processus de numérisation à condition de choisir des voxels de dimension égale au plus à la moitié de la résolution de l'appareil d'imagerie utilisé [6].

En imagerie de transmission par rayons X (tomodensitométrie, TDM), on enregistre l'intensité d'un faisceau X polychromatique après la traversée d'une série de voxels (numérotés par le nombre entier  $j$  variant de 1 à  $n$ ) alignés et disposés entre la source de rayonnement et le détecteur X (figure 1). Chaque voxel  $j$  atténue le rayonnement X incident avec une probabilité par unité de longueur définie par le coefficient linéique d'atténuation  $\mu_j$  du tissu contenu dans le voxel. Cette probabilité est proportionnelle à la masse volumique de ce tissu.

Ceci conduit à attribuer au voxel  $j$  de dimension  $d$  une atténuation de l'intensité du rayonnement X incident par un facteur  $\exp(-\mu_j \cdot d)$ . Après la traversée des  $n$  voxels qui séparent le détecteur de rayonnement X de la source, le faisceau d'intensité initiale  $I_0$  est donc atténué d'un facteur  $\exp(-\mu_1 \cdot d) \cdot \exp(-\mu_2 \cdot d) \dots \exp(-\mu_n \cdot d)$ . Si l'on prend en compte le fait que seule une fraction  $r_{i,j}$  (variant entre 0 et 1=100%) du voxel  $j$  contribue à la projection  $i$ , l'intensité qui sera détectée s'exprime sous la forme:

$$I_i = I_0 \cdot \exp[-d \cdot (r_{i,1} \cdot \mu_1 + r_{i,2} \cdot \mu_2 + \dots + r_{i,n} \cdot \mu_n)] \quad (1)$$

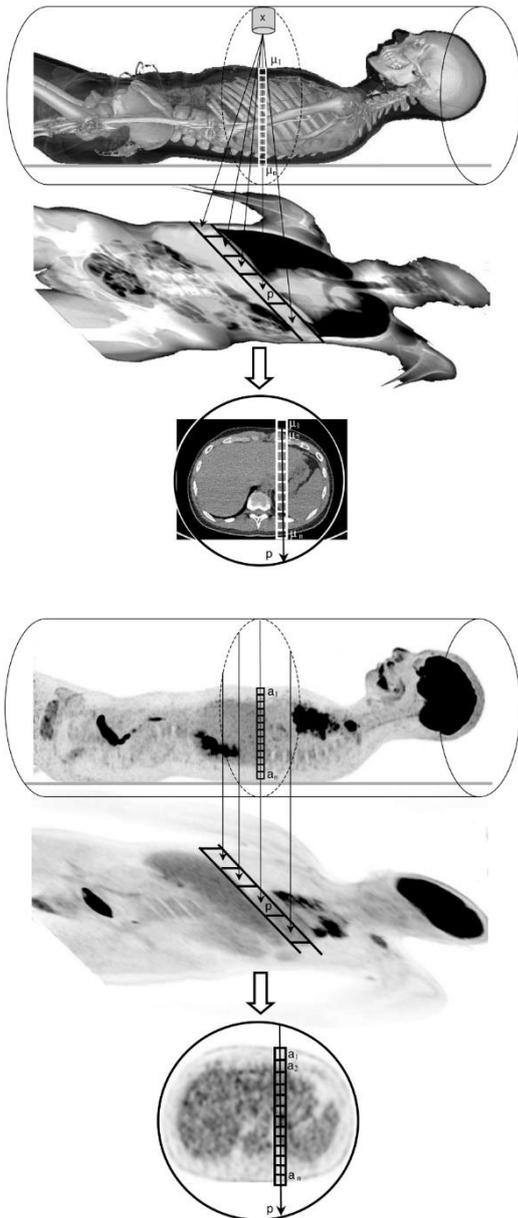


Figure 1. Projections et reconstructions en tomographie et en tomoscintigraphie.

La mesure de l'intensité  $I_i$  du rayonnement X après la traversée de  $n$  voxels de coefficients linéiques d'atténuation  $\mu_1, \dots, \mu_n$  permet ainsi d'accéder à une mesure appelée projection  $p_i = - (1/d) \cdot \ln(I_i/I_0)$  qui d'après la relation (1) s'identifie à la somme pondérée par les coefficients  $r_{i,j}$  des coefficients linéiques d'atténuation  $\mu_j$  le long de la ligne de projection (figure 2):

$$p_i = r_{i,1} \cdot \mu_1 + r_{i,2} \cdot \mu_2 + \dots + r_{i,n} \cdot \mu_n \quad (2)$$

Dans la relation linéaire (2), les valeurs des coefficients  $r_{i,j}$  ne dépendent que de la

géométrie de l'appareil d'imagerie et sont connues, tout comme  $I_0$  et  $d$ , et la valeur de la projection  $p_i$  est issue de la mesure de  $I_i$ . En revanche, les coefficients  $\mu_j$  sont des valeurs inconnues proportionnelles aux densités des voxels explorés. L'objet de la reconstruction tomographique est de déterminer les valeurs de chaque coefficient  $\mu_j$  à partir d'équations linéaires du type (2). Elle permettra de calculer une image de synthèse 3D constituée de coupes axiales 2D dans lesquelles les valeurs de chaque pixel sont proportionnelles aux densités des tissus (figure 1).

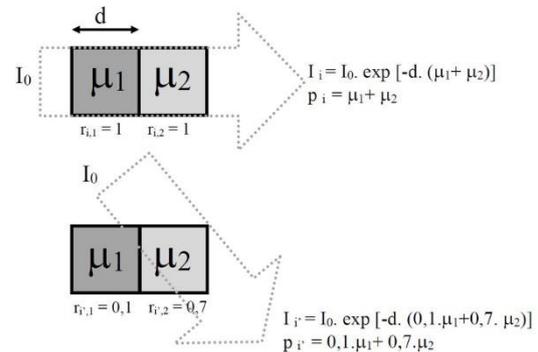


Figure 2. Modélisation de projections.

Dans le cas d'une tomographie par émission monophotonique gamma (TEMP), la nature du signal recueilli est similaire. Lorsque l'image est acquise au moyen d'un collimateur parallèle, chaque élément de détection compte le nombre de photons gamma résultant de l'activité des voxels du patient le long d'une perpendiculaire au détecteur passant par l'élément de détection. Il en découle l'acquisition de projections formellement identiques à l'équation (2):

$$p_i = r_{i,1} \cdot a_1 + r_{i,2} \cdot a_2 + \dots + r_{i,n} \cdot a_n \quad (3)$$

où les inconnues  $a_j$  sont ici proportionnelles à l'activité de chaque voxel  $j$ . En tomographie par émission de positons (TEP), la détection en coïncidence opère une collimation analogue et la relation (3) reste pertinente.

En imagerie tomographique de transmission par rayons X, comme en imagerie scintigraphique, les signaux acquis s'identifient donc à une projection, c'est à dire à la somme pondérée de grandeurs physiques  $f_j$  (les inconnues  $\mu_j$  ou  $a_j$ ) le long d'une certaine direction:

$$p_i = \sum_{j=1}^n r_{i,j} \cdot f_j = r_{i,1} \cdot f_1 + r_{i,2} \cdot f_2 + \dots + r_{i,n} \cdot f_n \quad (4)$$

Reconstruire des coupes axiales (ou un volume) revient à déterminer les grandeurs  $f_j$  pour chaque voxel  $j$ . Dans le cas d'un volume constitué de  $n^3$  voxels et donc de coupes axiales de  $n^2$  pixels, il est nécessaire d'acquérir au moins  $n^2$  équations de projection du type (4) dans chaque coupe pour espérer pouvoir résoudre de façon univoque un système de  $n^2$  équations linéaires à  $n^2$  inconnues. Ceci est réalisé en procédant à des acquisitions de projections au moyen de sources de rayons X ou de détecteurs gamma collimatés qui tournent autour de l'axe cranio caudal du patient (TDM ou TEMP), ou encore en utilisant des détecteurs de rayonnement gamma cylindriques (TEP). Une fois ces nombreuses projections acquises, le problème devient algorithmique et requiert la résolution d'un très grand système d'équations linéaires.

## Conditionnement

En tomographie médicale, les résolutions des appareils d'imagerie conduisent le plus souvent à échantillonner les coupes à reconstruire sur  $64^2$  à  $512^2$  pixels. Les ressources des calculateurs modernes sont capables de gérer de telles quantités d'information, à condition que l'algorithme utilisé pour résoudre de tels systèmes à plusieurs dizaines de milliers d'inconnues ne soit pas trop sensible à de petites fluctuations des mesures de projection. Or ceci est le cas en tomographie médicale du fait de la proximité, donc de la similarité des diverses projections acquises. La figure 3 illustre ce problème dans le cas trivial de la reconstruction d'une coupe constituée de 2 pixels au moyen de deux projections seulement.

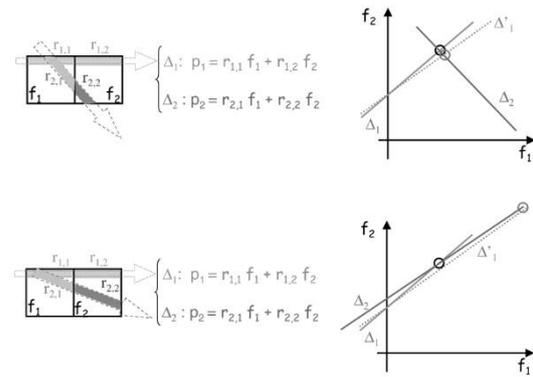


Figure 3: Mauvais conditionnement du problème tomographique illustré dans le cas où une petite fluctuation dans la mesure de la projection  $p_1$  modifie l'équation de la droite  $\Delta_1$  en celle de  $\Delta'_1$ .

En résolvant graphiquement ce système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, on constate que si la solution est stable lorsque les projections diffèrent (cercles dans la partie supérieure de la figure 3), des projections assez similaires telles que celles acquises en imagerie médicale peuvent conduire à une solution très différente en cas de fluctuation minime dans l'acquisition des projections ou dans le modèle des coefficients  $r_{i,j}$ , ou encore en cas d'arrondis lors des calculs (partie inférieure de la figure 3). Ce mauvais conditionnement du problème tomographique va nécessiter l'utilisation d'algorithmes plus complexes que ceux classiquement utilisés en algèbre.

## Modélisation

Deux opérateurs sont à la base de tous les algorithmes tomographiques actuellement utilisés en imagerie médicale. Le premier, l'opérateur de projection a été évoqué dans le paragraphe précédent. Il est possible sans perdre de généralité d'en préciser la nature sur un problème tomographique simple visant à reconstruire une coupe carrée constituée de 9 pixels de valeurs  $f_j$  au moyen de 6 projections  $p_i$ . L'opérateur de projection (figure 4) permet de calculer les projections  $p$  d'une image donnée  $f$  suivant la relation (4).

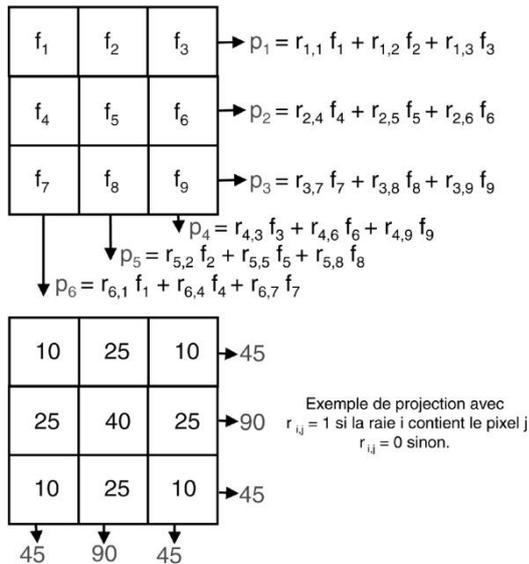


Figure 4. Opérateur de Projection. Dans cet exemple 6 projections seulement (au lieu des 9 nécessaires) sont illustrées.

Un second opérateur appelé rétroprojection consiste à sommer au sein d'un pixel image  $j$  chacune des projections  $i$  auquel il participe, pondérées (par  $r_{i,j}$ ) (figure 5).

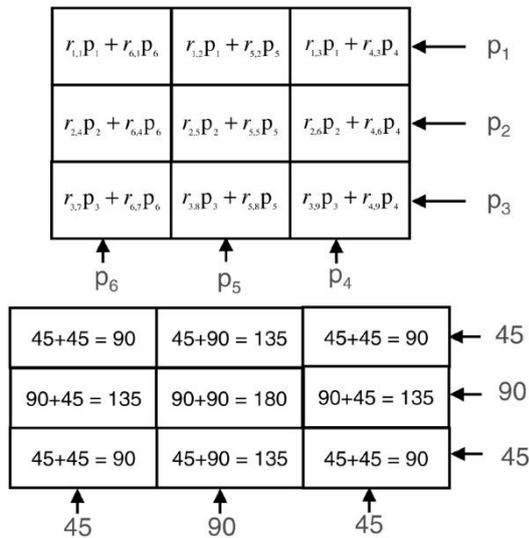


Figure 5. Opérateur de rétroprojection.

Les parties inférieures des figures 4 et 5 donnent un exemple de ces deux opérateurs dans l'hypothèse simple où tous les coefficients  $r_{i,j}$  sont égaux à un si le pixel  $j$  se projette dans la raie  $i$ , et nuls sinon. Nous conserverons cette hypothèse simplificatrice dans les exemples de reconstruction qui suivent (figures 7 à 10).

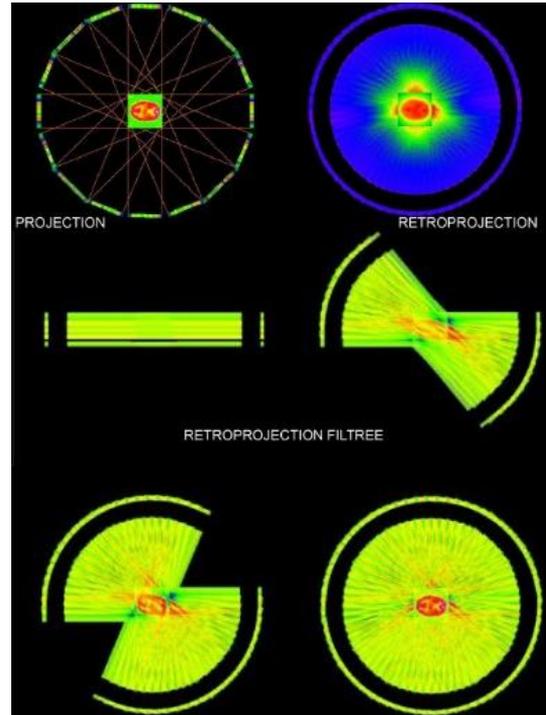


Figure 6. Illustration des opérations de projection, de rétroprojection et de rétroprojection filtrée dans le cas d'une tomoscintigraphie cérébrale.

## Rétroprojection filtrée

Il est intéressant d'observer les similitudes entre les valeurs des pixels  $j$  d'une coupe et ceux d'une rétroprojection des  $P$  projections  $p_i$  de ce pixel  $j$  normalisées par  $P \cdot \sum_i r_{i,j}$ .

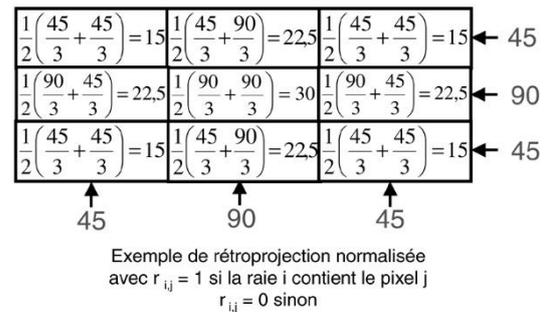


Figure 7. Exemple de rétroprojection de projections normalisées. Compte tenu du modèle utilisé pour les coefficients  $r_{i,j}$ ,  $\sum_i r_{i,j} = 3$  puisque chaque projection  $p_i$  est générée par 3 pixels et  $P=2$  puisque chaque pixel se projette dans deux projections.

Dans notre exemple (Figure 7), on retrouve une valeur maximale pour le pixel central (40 dans la vraie coupe, 30 dans la rétroprojection normalisée), entourée d'une valeur intermédiaire (25 ou 22,5) et de 4 pixels aux 4 coins de l'image de valeur minimale (10 ou 15). Si ces valeurs sont proches, le contraste en revanche est

dégradé dans la rétroprojection normalisée par rapport à l'image recherchée (contraste entre le centre et les coins de  $40/10=4$  dans l'image exacte et de  $30/15=2$  dans la rétroprojection normalisée). Ceci nous amène à rechercher une première façon de résoudre le problème tomographique en filtrant initialement les projections afin d'augmenter le contraste avant de les rétroprojeter. La théorie en a été faite par J. Radon [1,3]. Elle conduit à remplacer chaque projection par une moyenne pondérée des projections voisines. En première approximation, il est possible de présenter cet algorithme appelé rétroprojection filtrée en soustrayant à chaque projection doublée les deux tiers des valeurs des projections voisines, puis en rétrojetant ces projections filtrées. La figure 8 illustre ce procédé dans le cas simple de l'exemple donné en figure 4.

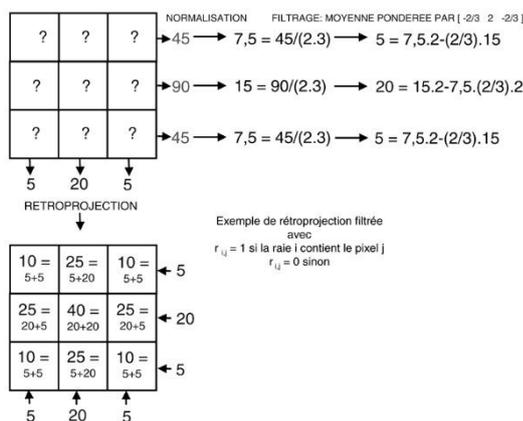


Figure 8: Illustration de l'algorithme de rétroprojection filtrée pour reconstruire la coupe proposée dans la figure 3.

## Reconstruction itérative

La simplicité de l'algorithme de rétroprojection filtrée explique que ce dernier a été universellement utilisé en TDM et en TEMP jusqu'à la fin du XX<sup>e</sup> siècle. Dans les années 70, exploitant des travaux initialement dus au mathématicien polonais S. Kaczmarz, une nouvelle famille d'algorithmes dits itératifs (ou algébriques) s'est peu à peu imposée en imagerie scintigraphique, puis en radiologie. Son développement, rendu possible par la puissance de calcul des ordinateurs modernes, a permis tout à la fois de réduire l'irradiation des patients en radiologie tout en se contentant, en particulier en TEP, de données de projections parfois incomplètes

(ce que l'algorithme de rétroprojection filtrée ne permet pas). Ces techniques permettent en outre de mieux prendre en compte le mauvais conditionnement du problème tomographique (régularisation) et de mieux corriger certains artefacts inhérents aux acquisitions des projections (auto-atténuation en TEMP et TEP en particulier). Le prototype de ce type d'algorithme itératif, ART (Algebraic Reconstruction Technique [7]), procède de la manière suivante: à partir d'une première coupe quelconque, l'algorithme ajuste étape par étape la coupe recherchée au moyen d'une rétroprojection normalisée par  $\sum_i r_{ij}$  de l'écart entre les projections effectivement mesurées et celles déduites de la coupe en cours d'évaluation (figure 9).

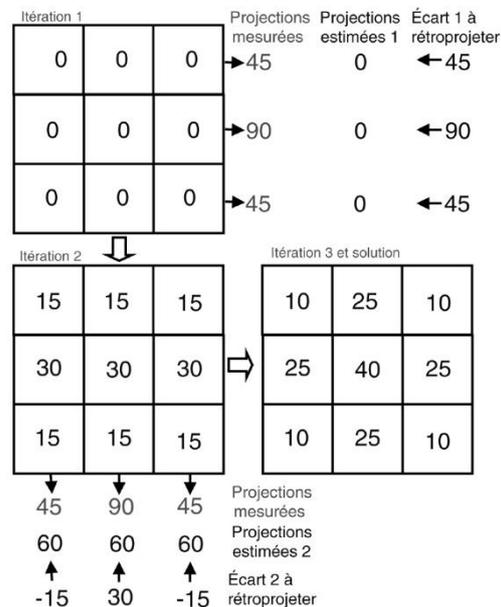


Figure 9: Illustration de la reconstruction de la coupe proposée dans la figure 3 au moyen de 3 itérations d'ART initialisé avec une coupe constituée de valeurs de pixels nulles.

L'algorithme itératif qui s'est imposée depuis les années 2000 en TDM, TEMP et TEP opère itérativement comme ART, mais en multipliant cette fois chaque valeur inconnue de pixel  $i$  par la moyenne pondérée (par les coefficients  $r_{ij}$ ) des rapports entre les projections  $j$  acquises et estimées qui concernent ce pixel  $i$  (figure 10). Il porte le nom de ML-EM (pour Maximum Likelihood - Expectation-Maximisation [8,9]), d'OSEM dans sa version accélérée [10] ou de MAP-OSEM dans sa version régularisée [11].

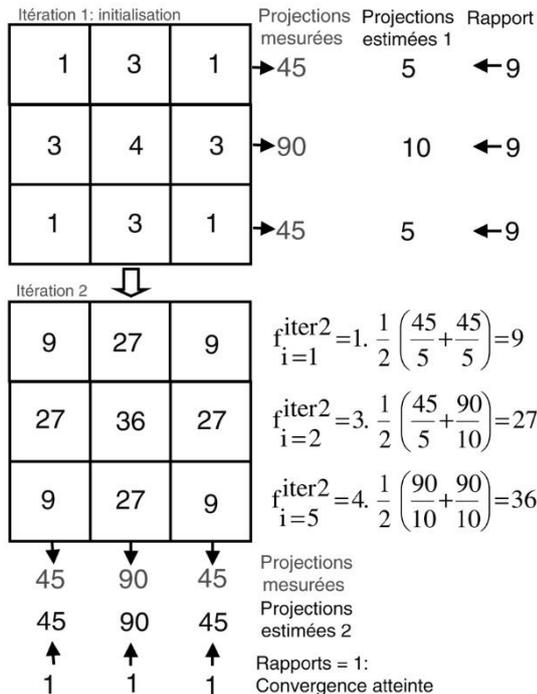


Figure 10: Reconstruction par ML-EM de la coupe proposée dans la figure 3. L'initialisation choisie pour l'itération 1 conduit aux projections attendues mais produit une coupe différente de celle obtenue par ART dans l'exemple précédent (figure 9). Cette absence d'unicité dans les solutions est liée à l'indétermination de notre système d'équations linéaires (6 projections seulement pour 9 inconnues).

## Spécificités en tomographie 3D

Ce qui précède concerne la tomographie dite 2D où les données de projections acquises sur 180° au sein de plans transverses sont nécessaires et suffisantes pour procéder à une reconstruction tomographique dans ces plans. La TEP permet en outre d'acquérir des données de projections dites obliques hors de ces plans (tomographie 3D [12]). Les projections obliques ont deux particularités: elles sont redondantes (ce qui permet de reconstruire un meilleur rapport signal/bruit), et incomplètes (certaines peuvent avoir des directions qui sortent du cylindre tronqué de détection sans interagir avec lui). Ces spécificités ont grandement favorisé la généralisation récente d'algorithmes de type OSEM 3D, mieux adaptés à l'exploitation de données de projection incomplètes.

## L'essentiel à retenir

- 1- Les images acquises en radiologie par rayons X et en scintigraphie (TEMP ou TEP) sont des images de projection.
- 2- Reconstruire une image en coupe revient à résoudre à grand système mal conditionné d'équations linéaires.
- 3- Les techniques de reconstruction incluent l'algorithme de rétroprojection filtrée (et autres techniques analytiques apparentées) et les techniques itératives (ou algébriques) parmi lesquelles MLEM et sa variante OSEM sont les plus utilisées.
- 4- Les techniques itératives présentent divers avantages parmi lesquels la possibilité de reconstruire des coupes à partir de données de projection incomplètes (tomographie 3D), de diminuer l'irradiation du patient en TDM, et de mieux corriger les artefacts d'atténuation en TEP et TEMP.
- 5- L'algorithme MLEM opère itérativement en multipliant chaque valeur de pixel  $j$  de la coupe par la moyenne pondérée (par les coefficient  $r_{i,j}$ ) des rapports entre les projections  $i$  acquises et estimées qui concernent ce pixel  $j$ .

## Entraînement

- 1- Reprendre l'exercice illustré dans la figure 9 en initialisant le processus de reconstruction par ART avec l'image proposée comme 1° itération dans la figure 10. Pourquoi le résultat diffère-t-il de celui de la figure 9 ?
- 2- Reprendre l'exercice illustré dans la figure 10 en initialisant le processus de reconstruction par MLEM avec la rétroprojection des projections mesurées. Combien d'itérations faut-il calculer pour obtenir des projections estimées correctement à 0,1 près ?

## Bibliographie

1. Mariano-Goulart D. Reconstruction tomographique en imagerie médicale. EMC (Elsevier Masson SAS, Paris), Radiodiagnostic - Principes et techniques d'imagerie, 35-105-A-10, 2015.
  2. Natterer F . The Mathematics of Computerized Tomography. New-York: Wiley; 1986.
  3. Radon J. Über die bestimmung von funktionen durch ihre integral-werte längs gewisser mannigfaltigkeiten. Ber Saechsis Akad Wissench. 1917; 69:262-277
  4. Kaczmarz S. Angenährte auflösung von systemen linearer gleichungen. Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A. 1937; 35:355-357
  5. Hounsfield GN. Computerized transverse axial scanning (tomography). Part1. description of system. Br J radiol. 1973;46:1016-22.
  6. Mariano-Goulart D. Introduction au traitement numérique des images médicales. EMC (Elsevier Masson SAS, Paris), Radiodiagnostic - Principes et techniques d'imagerie, 35-100-A-10, 2015.
  7. Gordon R, Blenzer R, Herman GT. Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. J Theor Biol. 1970; 29:471-82.
  8. Dempster A, Laird N, Rubin D. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. Journal of the Royal Statistical Society 1977; 39:1-38.
  9. Shepp LA, Vardi Y. Maximum likelihood for emission tomography. IEEE Trans med imaging. 1982; 1(2):113-122.
  10. Hudson H, Larkin R. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. IEEE Trans Med Imag. 1994;13:601-9.
  11. Green PJ. Bayesian Reconstructions from emission tomography data using a modified EM algorithm. IEEE Trans med imaging 1990; 9:84-93.
  12. Orlov SS. Theory of three dimensional reconstruction. Sov. Phys. Crystallogr. 1976; 20, (3):312-314. et 20(4):429-433.
-