

LE DOMAINE DE L'OPTIQUE

Cours 2017 - 2018

UE3 : Organisation des appareils et des systèmes :
bases physiques des méthodes d'exploration

Pr. D. MARIANO-GOULART

<http://scinti.edu.umontpellier.fr/enseignements/cours/>

- Nature et propriétés de la lumière: dualité ondes-particules
 - Lois de propagation, diffraction de la lumière

BO n°45 du 3/12/2009 p. 43

Prête au vrai maintenant une oreille attentive,
Nette de tout souci, aiguise ton esprit,
Et mes dons, apprêtés avec un soin fidèle,
Garde d'en faire fi avant d'y rien comprendre,
Car je vais t'exposer les hautes lois du ciel
Et des dieux, dévoiler d'où procèdent les choses,

Lucrece, De la nature des choses, Chant 1, vers 50-55

Traduction d'Olivier Sers, Belles lettres, Paris, 2012.

PACES



OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Maîtriser les concepts physiques liés :
 - aux ondes électromagnétiques,
 - à la mécanique ondulatoire.
- Pour être capable
 - de fonder la chimie sur un modèle d'atome
 - d'évaluer les intérêts et risques des rayonnements en santé :
 - Physiologie de la vision et de l'audition,
 - Techniques diagnostiques : spectrométries et imagerie
 - Thérapeutiques : irradiations et lasers.

*Pré-requis : **programme de math & physique des classes scientifiques des lycées.**
Ce cours est lui-même un prérequis pour les cours de PACES de chimie, pour ceux sur les rayonnements **X, γ et particulaires** et pour ceux de biophysique sensorielle et d'imagerie en L2-L3*



PLAN DU COURS (I)

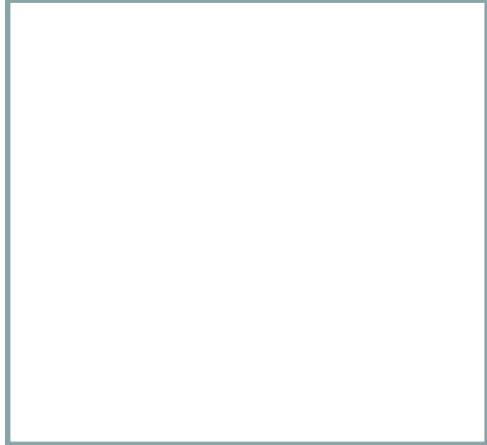
ASPECT ONDULATOIRE DE LA LUMIERE

1. ONDE PROGRESSIVE
2. ONDE ELECTROMAGNETIQUE
3. LOIS DE PROPAGATION DE LA LUMIERE

ASPECT CORPUSCULAIRE DE LA LUMIERE

ATOME DANS LE MODELE STANDARD

ONDE PROGRESSIVE: DEFINITION

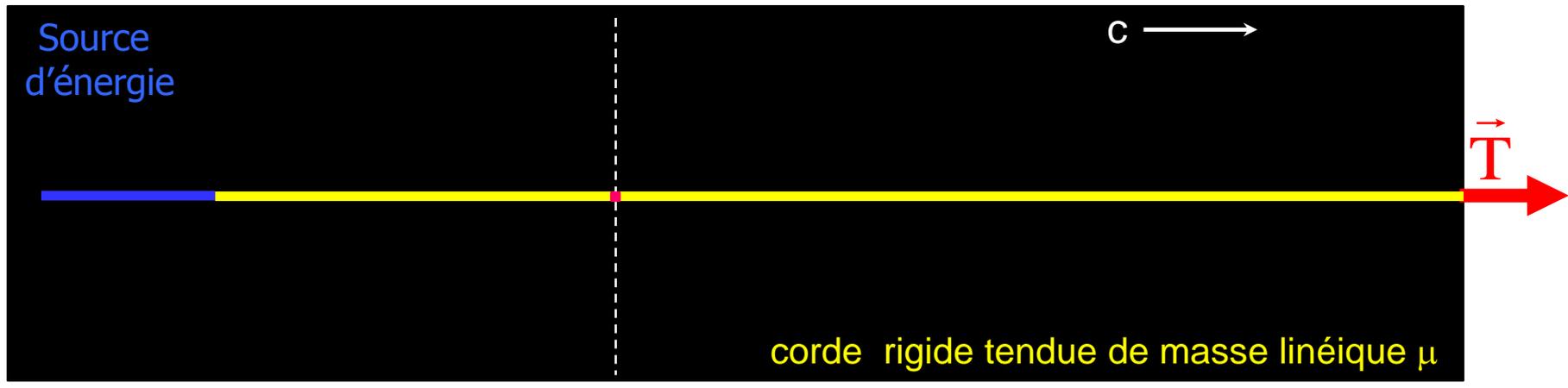


Propagation d'une perturbation des caractéristiques physiques du milieu



modification locale de position, pression, température, champ électrique, magnétique,...

Exemple : propagation d'une modification périodique de la position verticale d'une corde



ONDE PROGRESSIVE: DEFINITION

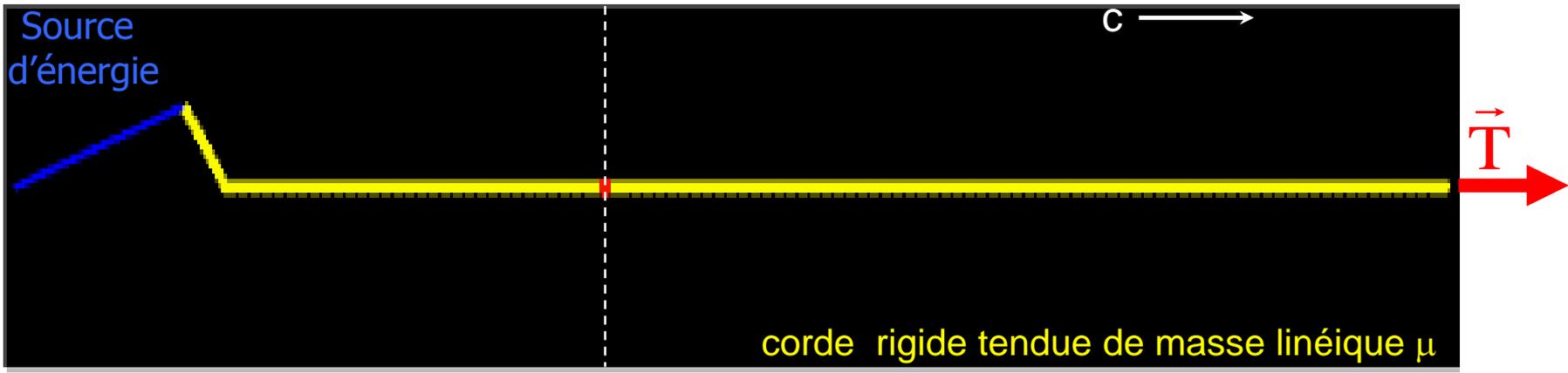


Propagation d'une perturbation des caractéristiques physiques du milieu



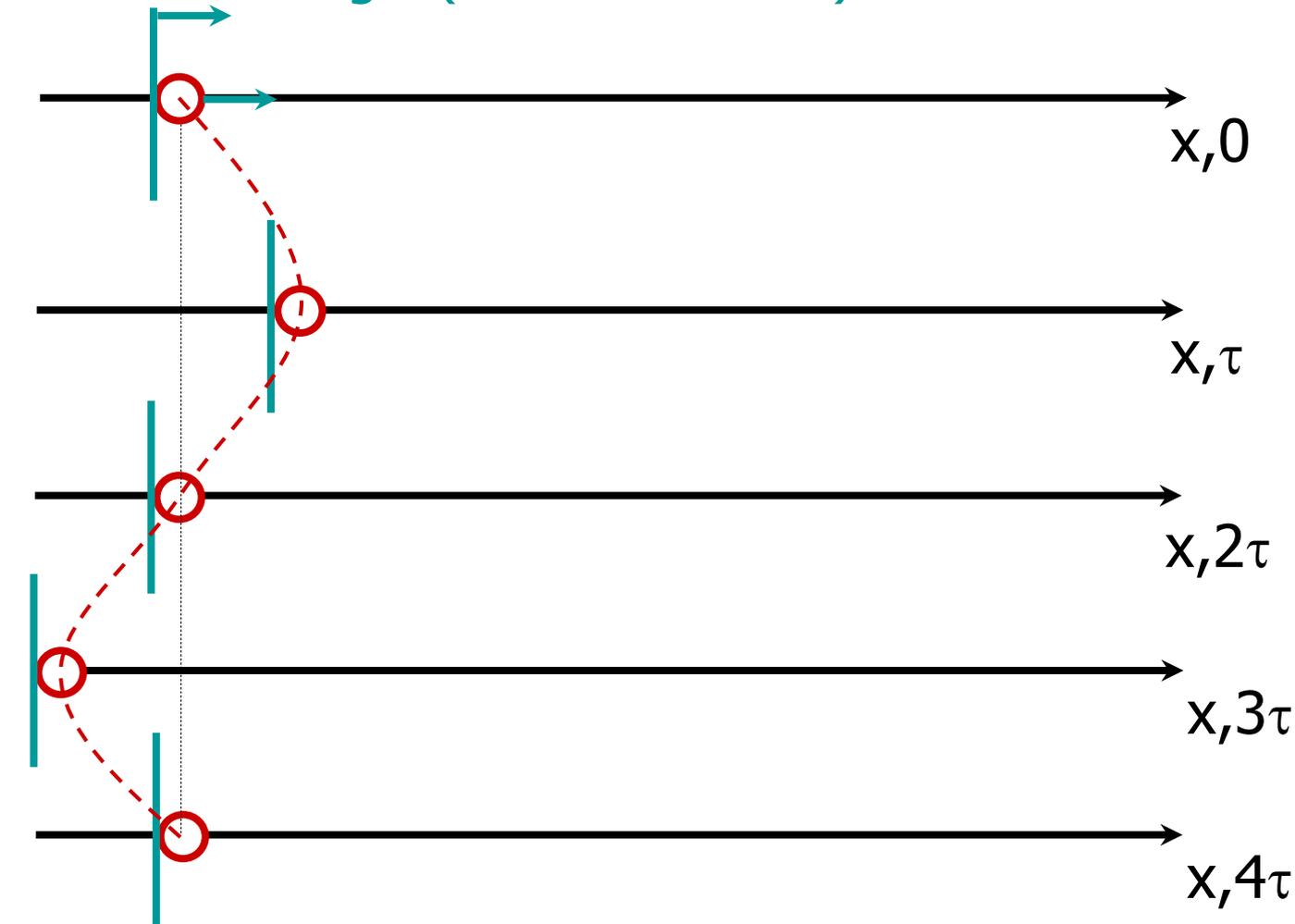
modification locale de position, pression, température, champ électrique, magnétique,...

Exemple : propagation d'une modification périodique de la position verticale d'une corde



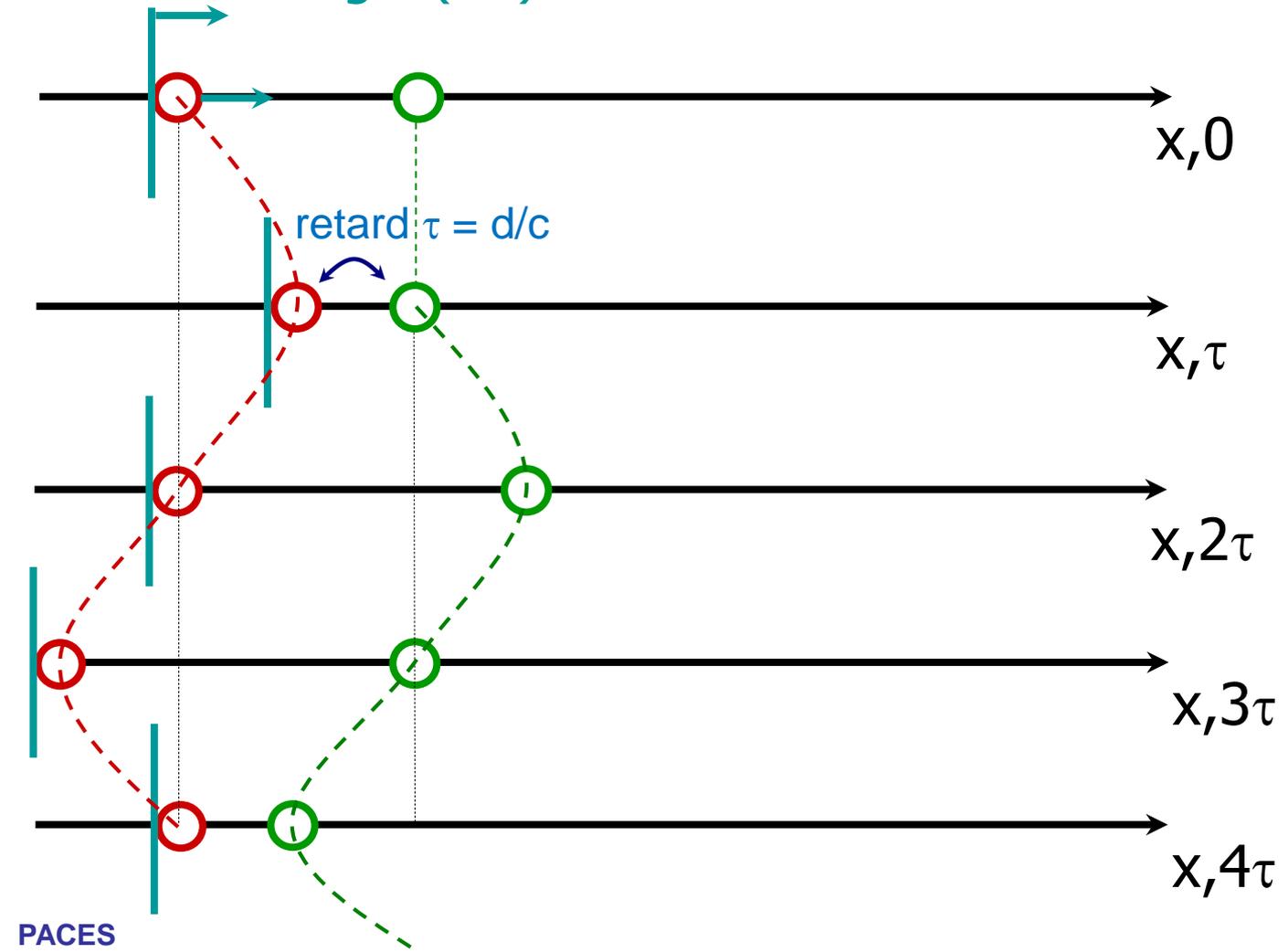
ONDE PROGRESSIVE: EXEMPLES

Source d'énergie (HP dans de l'air)

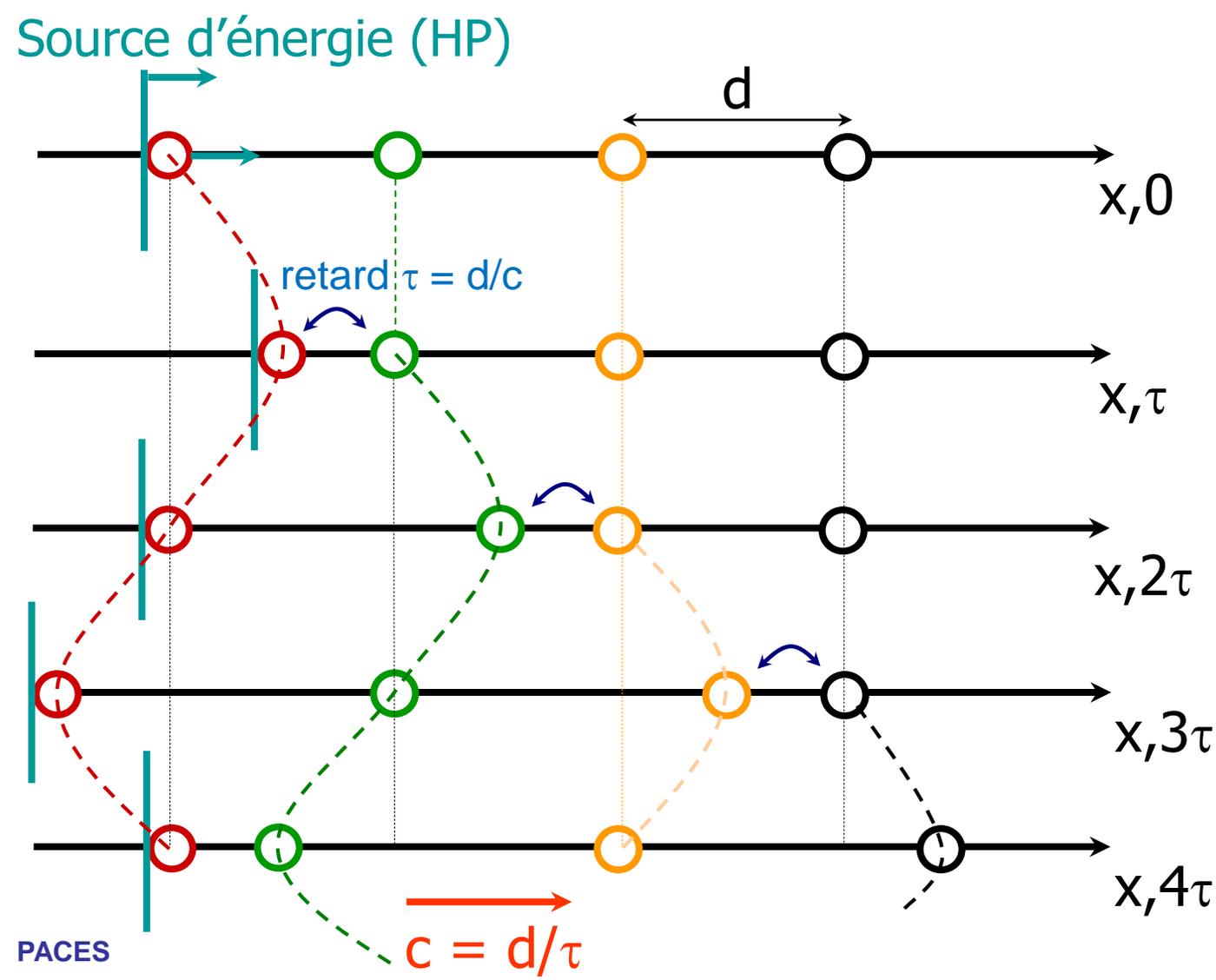


ONDE PROGRESSIVE: EXEMPLES

Source d'énergie (HP)



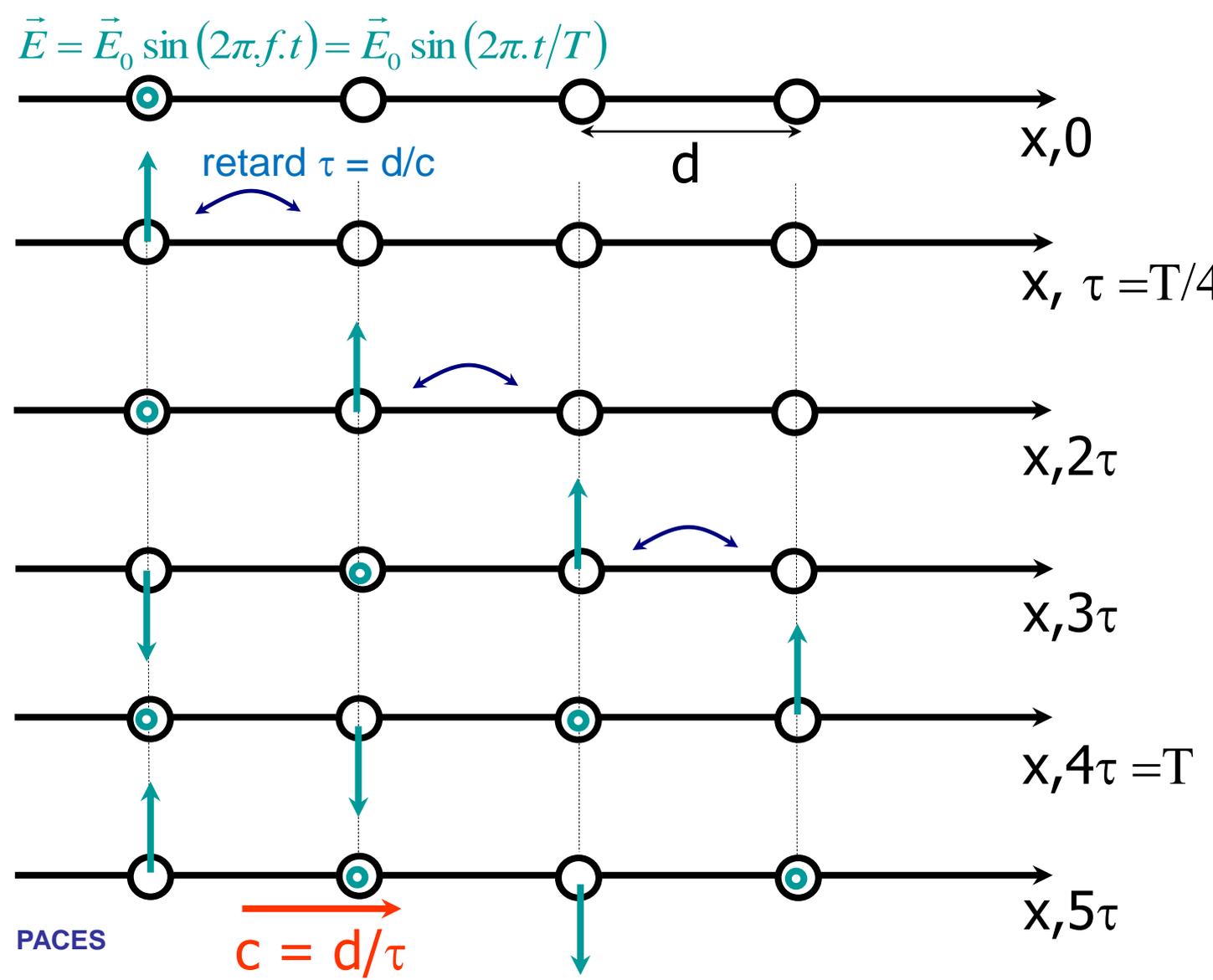
ONDE PROGRESSIVE: EXEMPLES



Son
=
Onde
progressive
scalaire
de vibration
longitudinale
(de surpression)



ONDE PROGRESSIVE: EXEMPLES



$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{1}{4f} = \frac{\pi}{2\omega}$$

avec $\omega = 2\pi \cdot f$

champ
électromagnétique
=
Onde progressive
vectorielle
transversale



LA CELERITE PAR LES DIMENSIONS

La célérité c de l'onde doit dépendre :

- de la **facilité** avec laquelle le milieu se transforme localement pour transmettre la perturbation
- de l'**inertie** que le milieu oppose à cette transmission

Dans le cadre d'une corde vibrante, $c \uparrow$ si $T \uparrow$ et si $\mu \downarrow$:

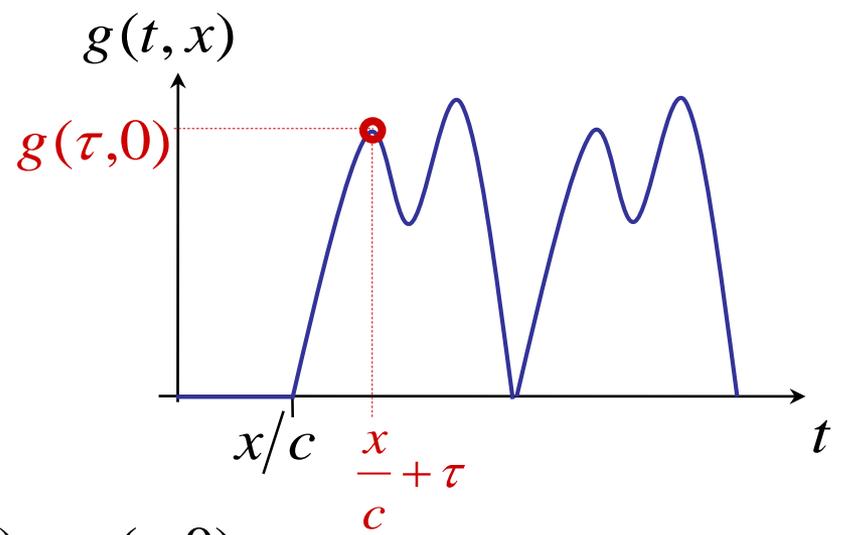
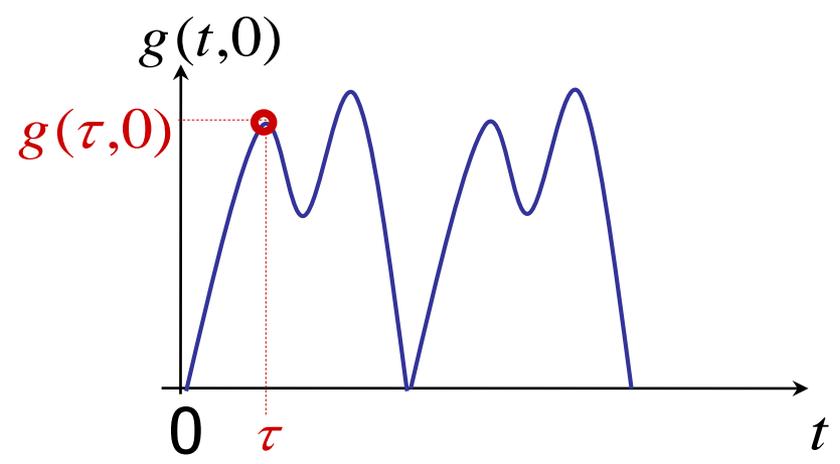
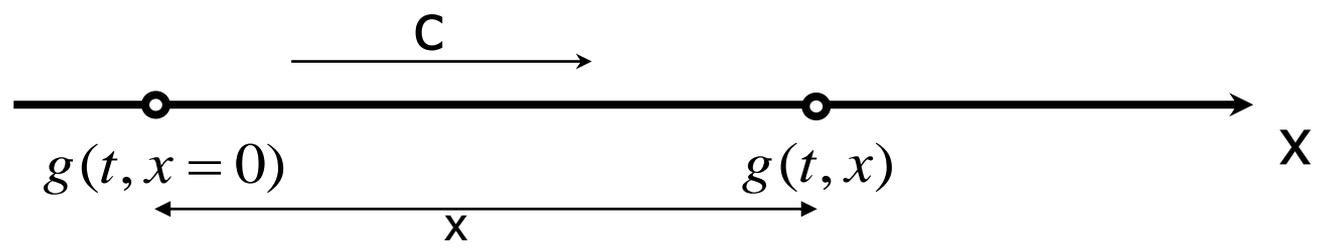
$$\left. \begin{array}{l} [T] = [M] \cdot [L] \cdot [T]^{-2} \\ [\mu] = [M] \cdot [L]^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\frac{T}{\mu} \right] = [L]^2 \cdot [T]^{-2} = [L \cdot T^{-1}]^2 = [c]^2$$

$$\Rightarrow c = k \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (\text{on peut montrer que } k = 1)$$

Dans le cas d'un son, dans un solide $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ et dans de l'air $c = K \cdot \sqrt{\frac{P}{\rho}}$



ONDE PROGRESSIVE: MODELISATION

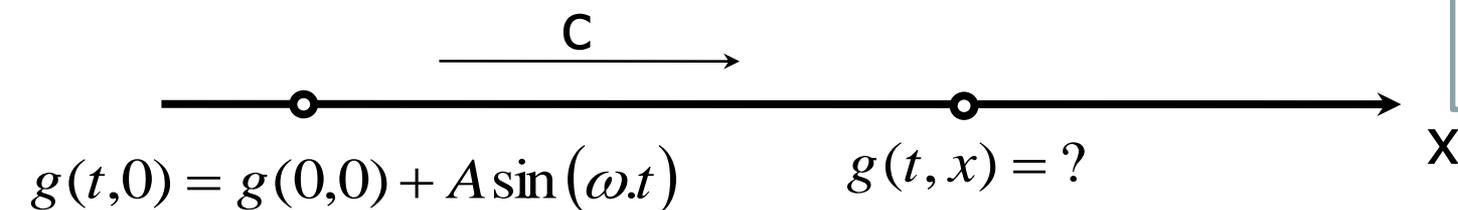


$$g\left(\tau + \frac{x}{c}, x\right) = g(\tau, 0)$$

$$g(t, x) = g\left(t - \frac{x}{c}, 0\right)$$



ONDE PROGRESSIVE SINUSOIDALE



$$g(t, x) = g(0, x) + A \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

grandeur physique avant la perturbation

perturbation retardée de x/c

- Définitions :
- ω (rad.s⁻¹) = pulsation propre = $2.\pi.f = 2.\pi / T$
 - f (Hertz = Hz = s⁻¹) : fréquence
 - T (s) : période (temporelle)



EQUATION DE D'ALEMBERT

La **dérivée partielle** $\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}$ d'une fonction $g(t,x)$ suivant la variable x est la dérivée de g par rapport à x calculée en supposant l'autre variable t constante.

La **dérivée partielle seconde** est notée : $\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2}$

$$g(t,x) = A \sin\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right] \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \pm \left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot A \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right] \text{ et } \frac{\partial g}{\partial t} = \omega \cdot A \cos\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot g(t,x) \end{array} \right.$$

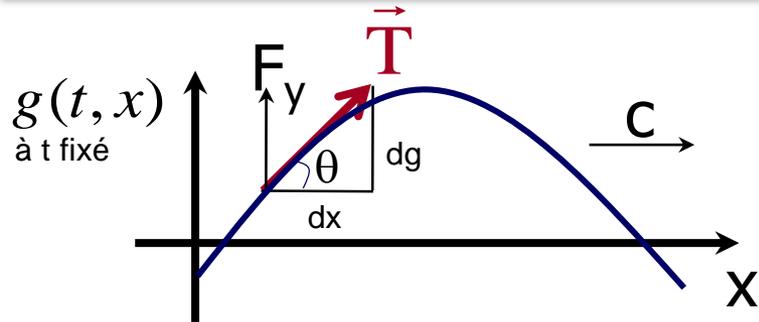
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot g(t,x) \Rightarrow \frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial t^2} \end{array} \right.$$



Jean Le Rond d'Alembert
1717-1783

Equation de d'Alembert caractéristique d'une onde progressive, permet de calculer c à partir d'une modélisation de l'onde

IMPEDANCE D'UN MILIEU DE PROPAGATION



On définit l'impédance Z par le rapport entre la force

qui cause la déformation (F_y) et la vitesse de vibration v (effet) : $Z = \left| \frac{F_y}{v} \right|$

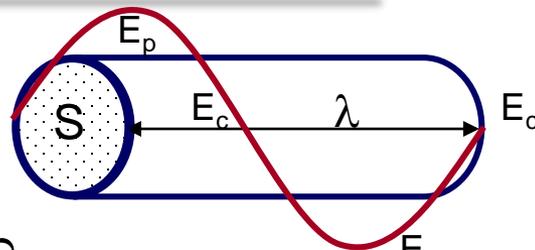
$$F_y = T \cdot \sin \theta \approx T \frac{\partial g}{\partial x} = T \frac{\partial \left[A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right]}{\partial x}$$

$$\Rightarrow F_y = -\frac{T}{c} \cdot A \cdot \omega \cdot \cos \left[\omega \left(t \pm \frac{x}{c} \right) \right] = -\frac{T}{c} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{T}{c} \cdot v \Rightarrow Z = \left| \frac{F_y}{v} \right| = \frac{T}{c} = \frac{T}{\sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \sqrt{T \cdot \mu} = \mu \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \mu \cdot c$$

$$\Rightarrow Z = \left| \frac{F_y}{v} \right| = \frac{T}{c} = \mu \cdot c$$

Pour un son dans l'air: $Z = \frac{P}{v} = \rho \cdot c = K \cdot \sqrt{P \cdot \rho}$ où $c = K \cdot \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

INTENSITE D'UNE ONDE



$$E = \bar{E}_c + \bar{E}_p = 2 \cdot \bar{E}_c$$

$$g(t, x) = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \Rightarrow v = \frac{\partial g}{\partial t} = \omega \cdot A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot A^2 \text{ et } m = \mu \cdot \lambda = \mu \cdot \frac{2\pi \cdot c}{\omega} \Rightarrow \bar{E}_c = \left(\frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \frac{2\pi \cdot c}{\omega}\right) \left(\frac{1}{2} \omega^2 \cdot A^2\right)$$

$$\Rightarrow \bar{E}_c = \pi^2 \cdot \mu \cdot c \cdot f \cdot A^2 \Rightarrow E = 2\pi^2 \cdot \mu \cdot c \cdot f \cdot A^2$$

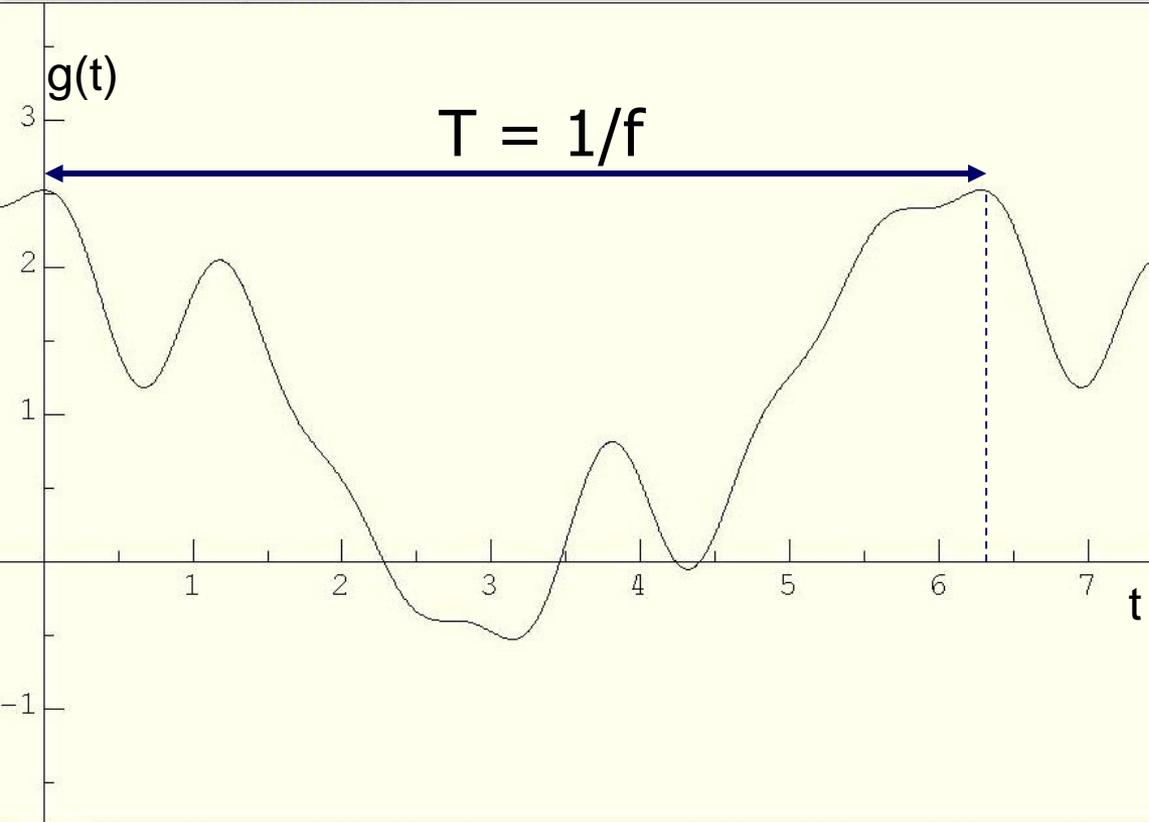
$$\Rightarrow P = 2\pi^2 \cdot \mu \cdot c \cdot f^2 \cdot A^2 \quad (\text{puissance} = \text{énergie/sec})$$

$$\Rightarrow I = P/S = \frac{2\pi^2}{S} \cdot \mu \cdot c \cdot f^2 \cdot A^2$$

$$I = \frac{P}{S} = \left(\frac{2\pi^2}{S}\right) \cdot Z \cdot f^2 \cdot A^2$$

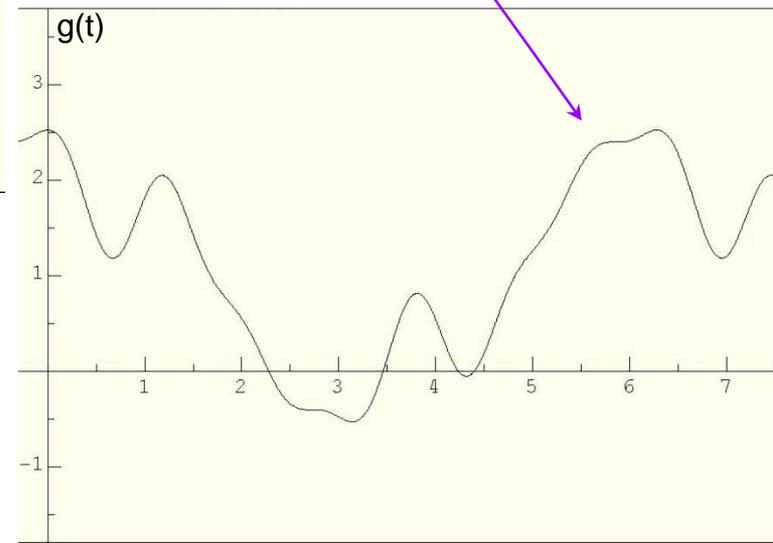
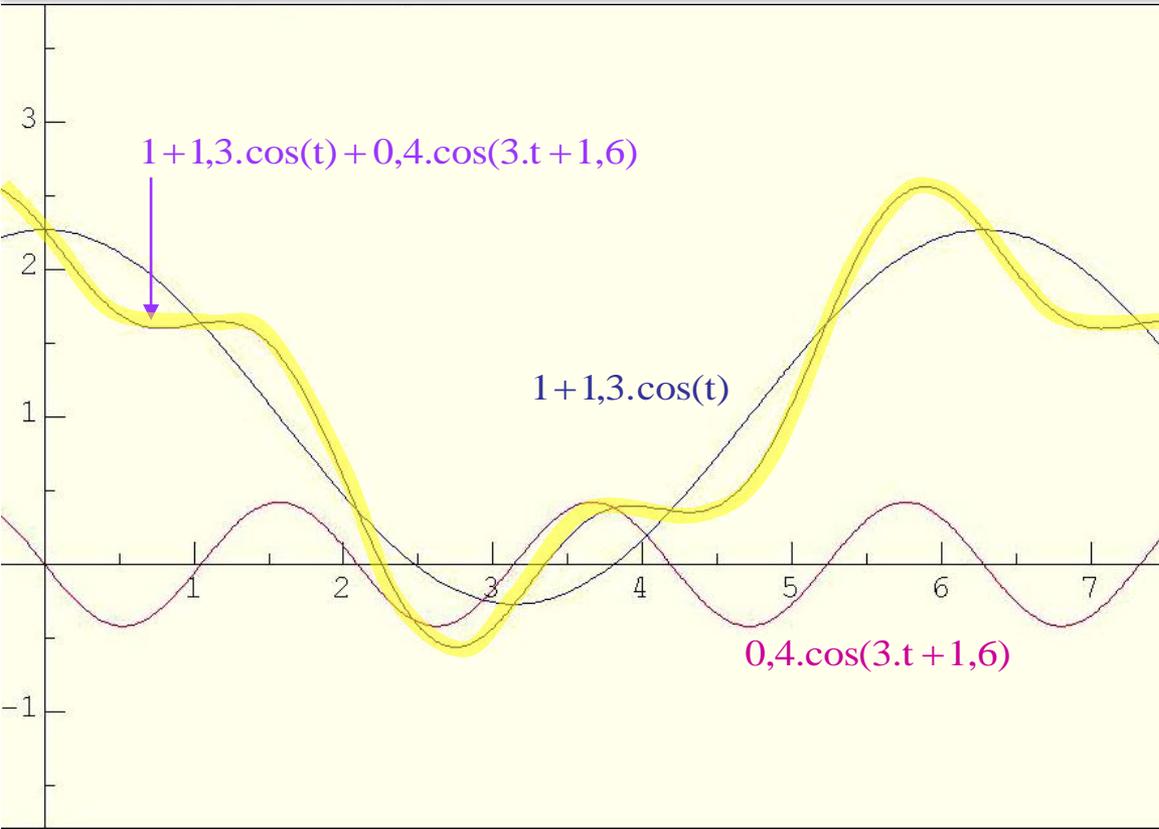
L'intensité (puissance surfacique) transportée par l'onde est proportionnelle au produit des carrés de l'amplitude et de la fréquence.

DECOMPOSITION EN OPS

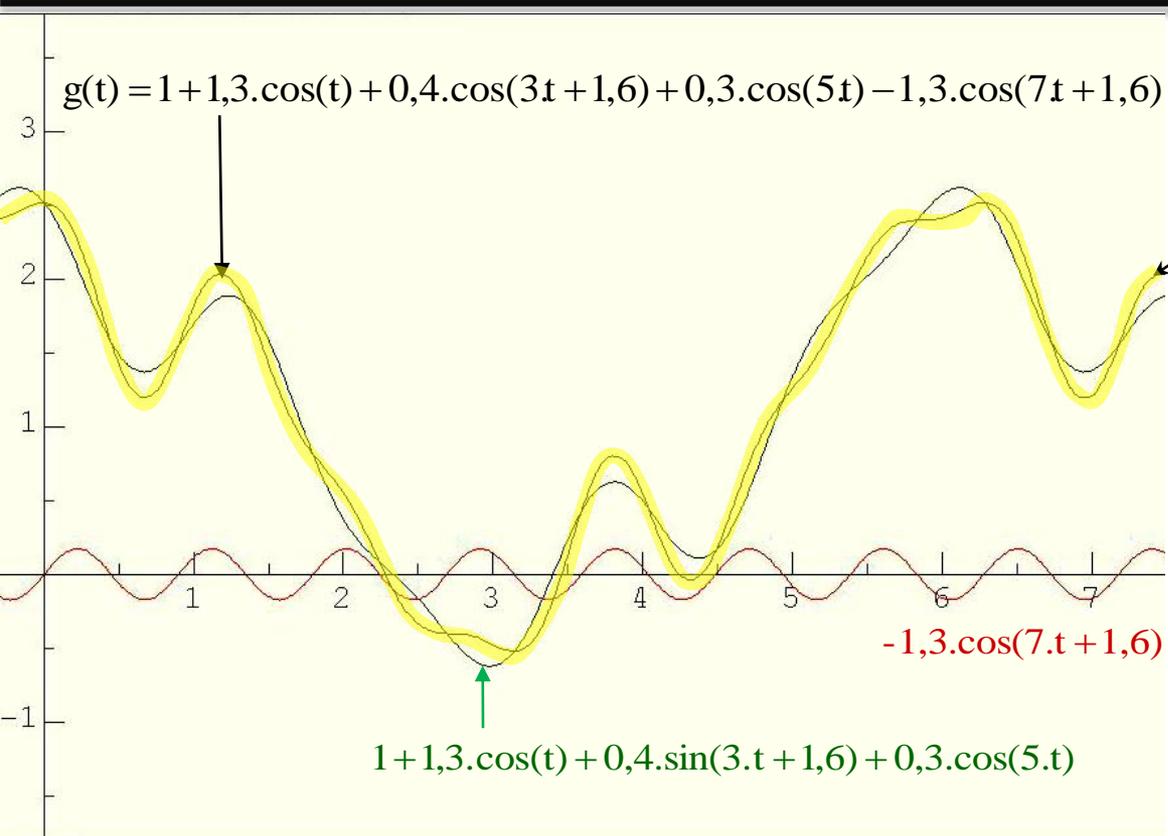


dans cet exemple :
 $T = 2\pi$ et $\omega = 1$

DECOMPOSITION EN OPS



DECOMPOSITION EN OPS

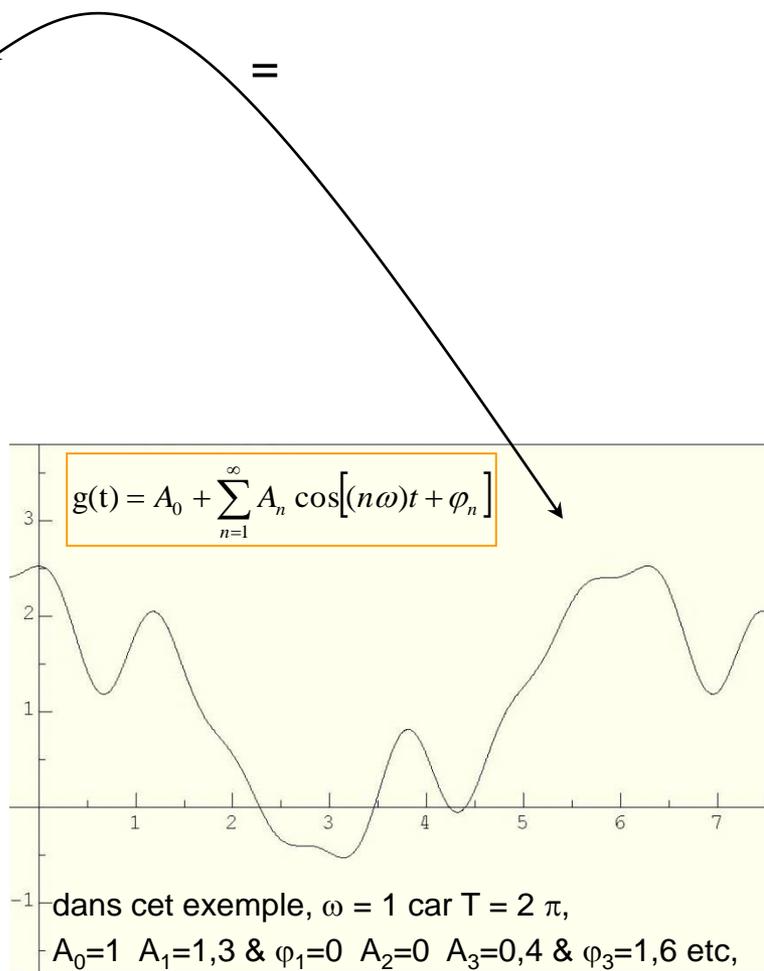


$g(t) = 1 + 1,3 \cdot \cos(t) + 0,4 \cdot \cos(3t + 1,6) + 0,3 \cdot \cos(5t) - 1,3 \cdot \cos(7t + 1,6)$

$g(t) = 1 + 1,3 \cdot \sin(t + 1,6) + 0,4 \cdot \sin(3 \cdot t + 3,1) + 0,3 \cdot \sin(5 \cdot t + 1,6) + 0,2 \cdot \sin(7 \cdot t)$

rappel: $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$

PACES



SERIE DE FOURIER : CAS GENERAL

Pour toute fonction $g(t)$ intégrable de période $T=2\pi/\omega$:

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\omega)t + \varphi_n]$$



J FOURIER 1768-1830

Les composantes de cette somme sont les **harmoniques** de fréquence $f = \omega/(2\pi)$

Onde portant une fréquence unique: **sinusoïdale = pure = monochromatique = radiation**

Onde caractérisée par une somme d'harmoniques : **onde complexe = polychromatique**

Les coefficients A_n et φ_n se calculent suivant (*ces formules ne sont pas à apprendre par cœur*):

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ sauf } A_0 = \frac{a_0}{2}$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cdot \cos(n\omega t) \cdot dt$$

$$\text{tg } \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

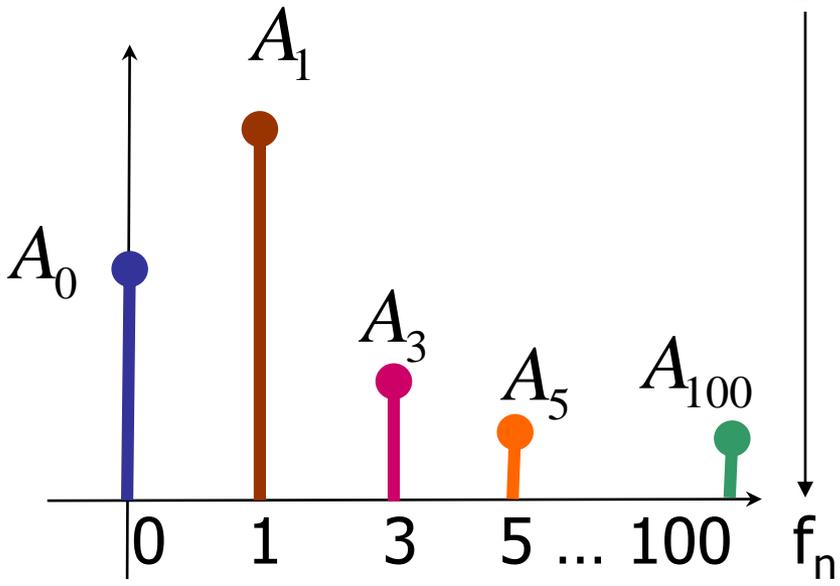
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cdot \sin(n\omega t) \cdot dt$$

SPECTRE D'UNE ONDE COMPLEXE

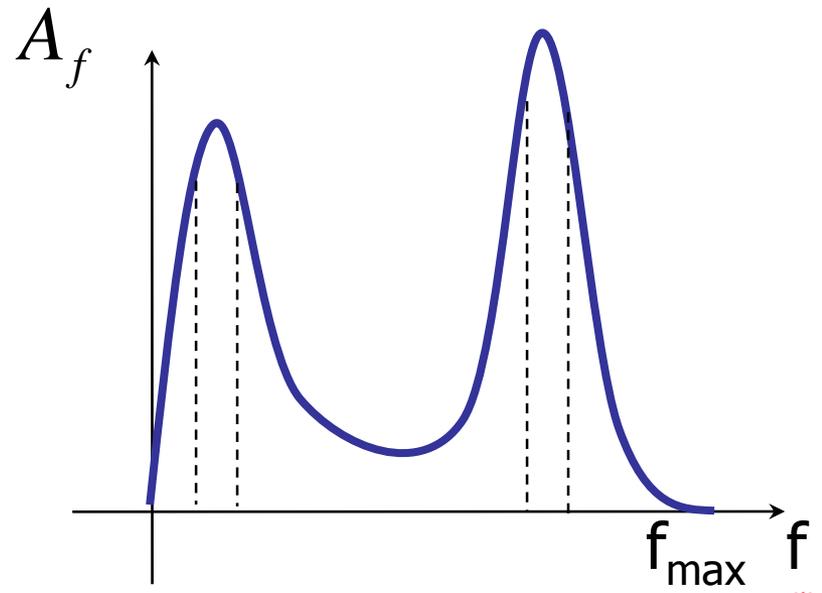
$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\omega)t + \varphi_n]$$

amplitude de l'harmonique

harmonique n de fréquence f_n
 $f_n = n \cdot \omega / 2\pi = n \cdot f$



Spectre discret



Spectre continu



CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

$$g(t, x) = A \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

- **Célérité** c ,
dans ce cas, propagation dans la direction x positifs
- **Amplitude** $= A$ (même unité que la grandeur g)
- **Pulsation propre** : ω en rad/s
- **Fréquence** f en Hertz ($\text{Hz} = \text{s}^{-1}$) : $\omega = 2\pi f$
 ω ou f déterminent la nature de l'onde et ses modes d'interaction avec l'environnement...

CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

$$g(t, x) = A. \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

• Périodes

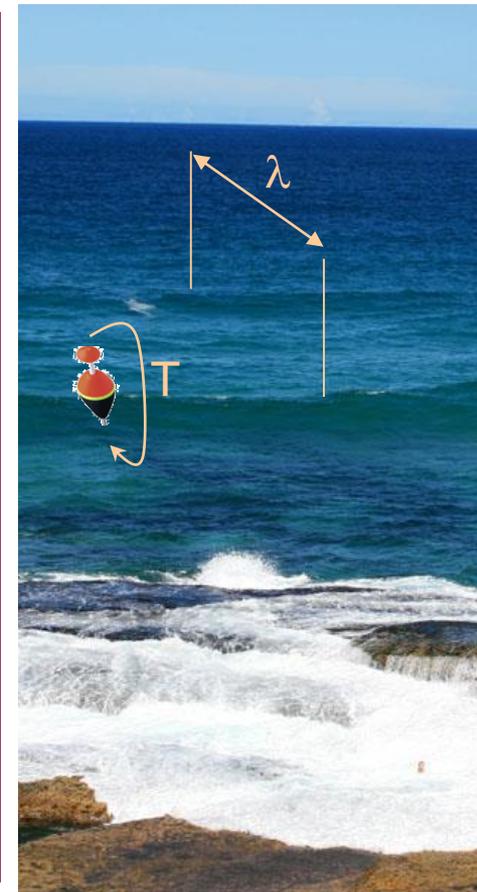
- Par rapport au temps : $T = 1/f = 2\pi/\omega$ en s
 - Pour x fixé, $g(t,x) = g(t+T,x)$

- Par rapport à l'espace : **longueur d'onde**

$$A. \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A. \sin \left[\omega \left(t - T - \frac{x}{c} \right) \right] = A. \sin \left[\omega \left(t - \frac{c.T + x}{c} \right) \right]$$

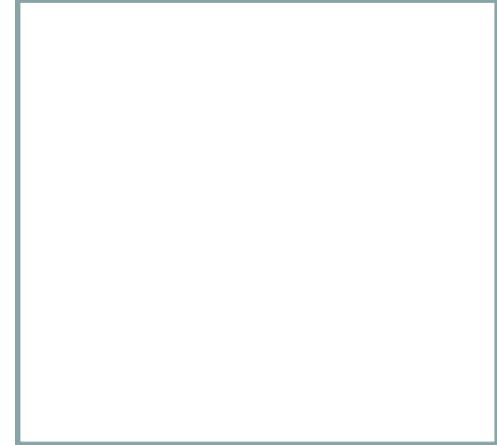
pour t fixé, $g(t, x) = g(t, x + c.T) = g(t, x + \lambda)$

- $\lambda = cT = c/f = 2\pi c / \omega$
- λ est la distance parcourue par l'onde en T secondes.

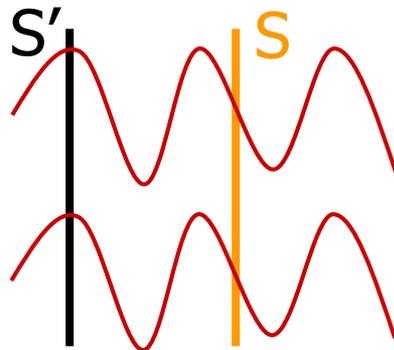


CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

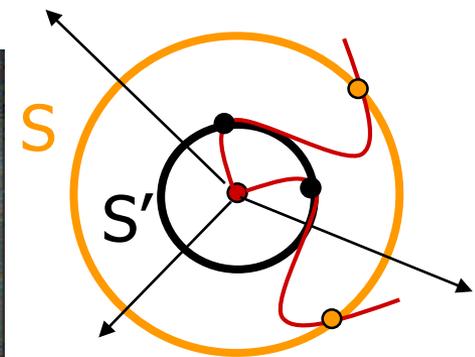
$$g(t, x) = A \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \cdot \sin [\omega t - \phi]$$



- **Phase** : $\phi = \omega x / c = 2\pi f x / c = 2\pi x / \lambda$
- **Surfaces d'onde** : surfaces connexes contenant l'ensemble des points de même phase



Onde plane



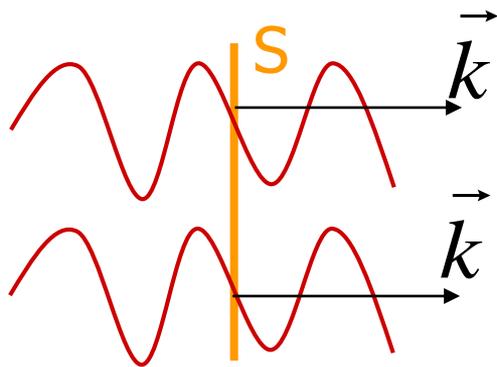
Onde sphérique

CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

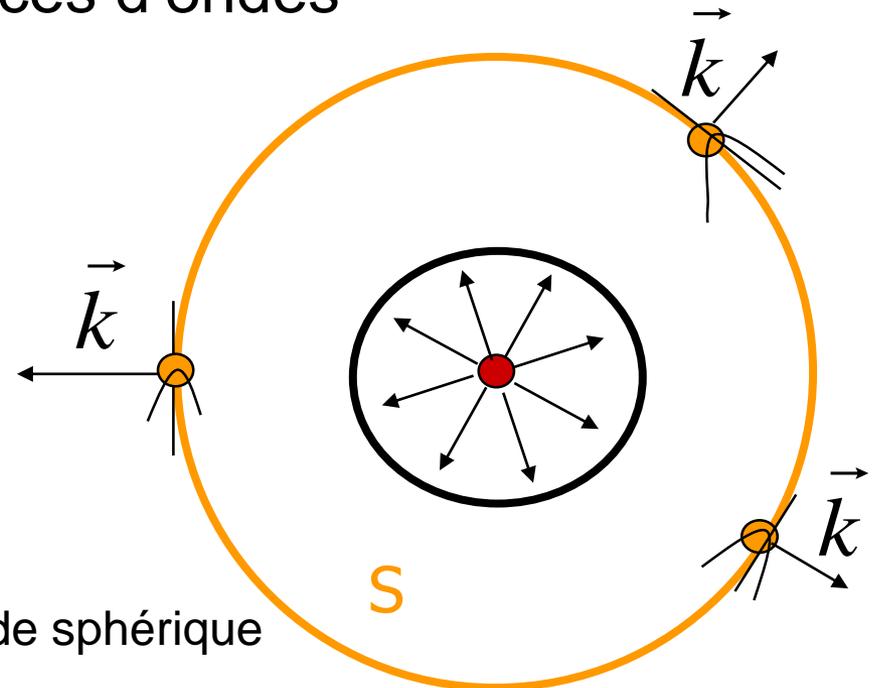
$$g(t, x) = A \cdot \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] = A \cdot \sin [\omega t - \phi] = A \cdot \sin [\omega t - kx]$$

Vecteur d'onde : \vec{k}

- perpendiculaire aux surfaces d'ondes
- de norme $k = \omega/c = \phi/x$



Onde plane

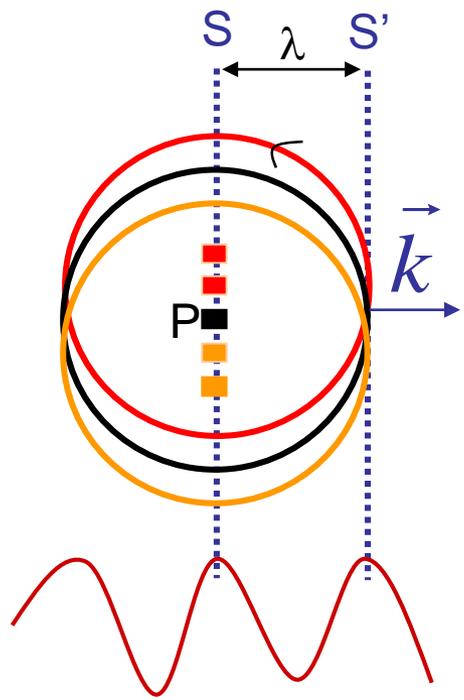


Onde sphérique

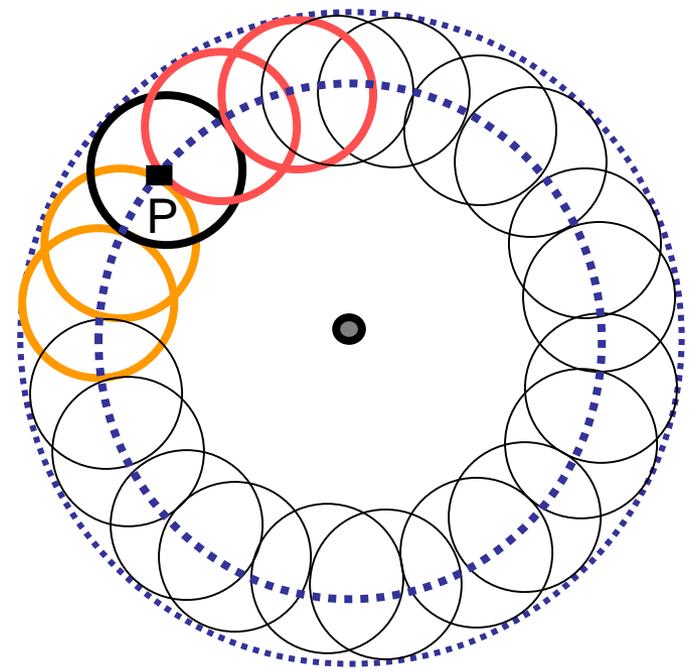
PRINCIPE DE HUYGENS-FRESNEL

Principe de Huygens-Fresnel :

chaque point d'une surface d'onde agit comme une source ponctuelle émettant en phase



Propagation d'une onde plane



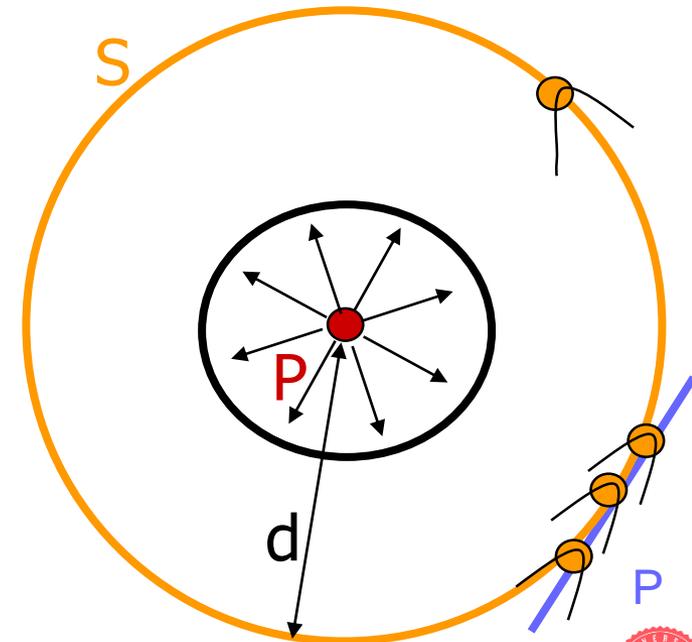
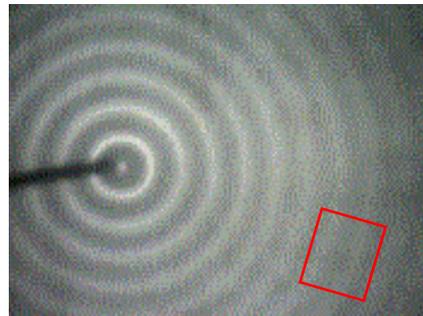
Propagation d'une onde sphérique

ONDE SPHERIQUE PURE

Une **source ponctuelle** émettant de façon **isotrope** produit une **onde sphérique** (dans un milieu homogène).

$$\phi = \frac{\omega}{c} d$$

Localement et loin de la source, la surface d'onde peut être approchée par un plan P : on parle alors d'**approximation en onde plane**



ONDE SPHERIQUE PURE

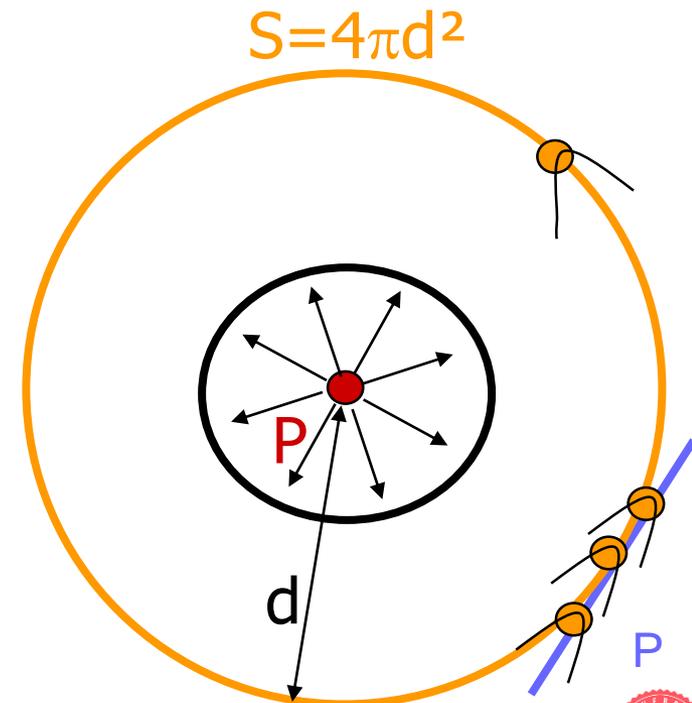
Une **source ponctuelle** émettant de façon **isotrope** produit une **onde sphérique**.

A une distance d de la source, la puissance émise P se répartit uniformément sur la surface d'une sphère de rayon d :

$$I(\text{Wm}^{-2}) = \frac{P}{4\pi d^2}$$

$$P = 2\pi^2 \cdot Z \cdot f^2 \cdot A^2 \text{ pour une radiation}$$

La puissance surfacique reçue à la distance d varie donc comme $1/d^2$



LOI EN $1/d^2$

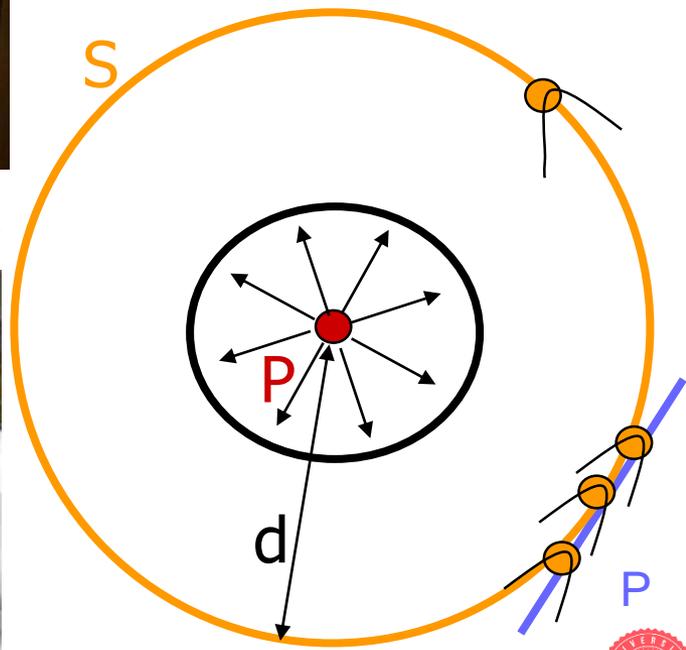
A distance d d'une **source ponctuelle isotrope** :

$$I(Wm^{-2}) = \frac{P}{4\pi d^2}$$



Doubler la d diminue I d'un facteur 4

↪ Radioprotection



ONDES COHERENTES

- Deux ondes de λ différentes ou dont la phase dépend du temps ne peuvent pas superposer leurs extrema de façon stable
 - Pour ces sources incohérentes, seules les intensités s'ajoutent
 - Exemple : lampe à incandescence

• Définition d'une onde cohérente :

- Même longueur d'onde et déphasage constant dans le temps

$$g_1(t, x) = A \cdot \sin[\omega t - kx - \phi_1]$$

$$g_2(t, x) = A \cdot \sin[\omega t - kx - \phi_2]$$

ϕ_1, ϕ_2 indépendants de t

- Particularité : **Peuvent s'additionner algébriquement** (donc conduire à une onde somme d'intensité inférieure, égale ou inférieure aux ondes avant addition)

OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 1

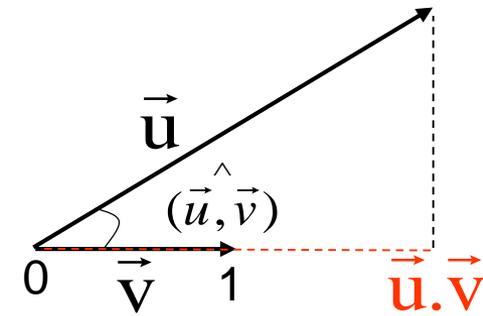
- **Savoir définir** : onde progressive, onde pure, onde complexe, harmoniques, spectres et ondes cohérentes.
- **Savoir manipuler les caractéristiques d'une onde** : ω , f , T , λ , ϕ , S_{onde} , \vec{k}
- **Savoir modéliser une onde pure** :
 - $g(t,x) = A \cdot \sin[2\pi \cdot f(t-x/c)]$
 - Savoir manipuler ce modèle
- **Savoir utiliser le principe d'Huygens-Fresnel**
- **Savoir exploiter la loi en $1/d^2$ à des fins de radioprotection**

RAPPELS MATHÉMATIQUES

- **PRODUIT SCALAIRE**

$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

Propriété: si $\|\vec{v}\| = 1$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est la longueur de la projection de \vec{u} sur la direction de \vec{v}

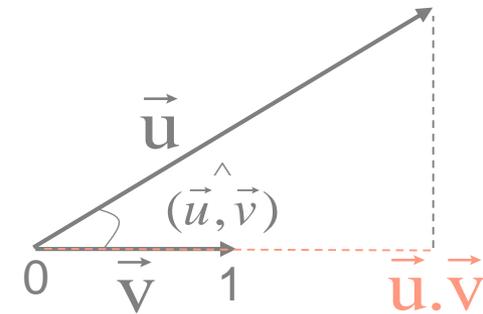


RAPPELS MATHÉMATIQUES

- **PRODUIT SCALAIRE**

$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

Propriété: si $\|\vec{v}\| = 1$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est la longueur de la projection de \vec{u} sur la direction de \vec{v}

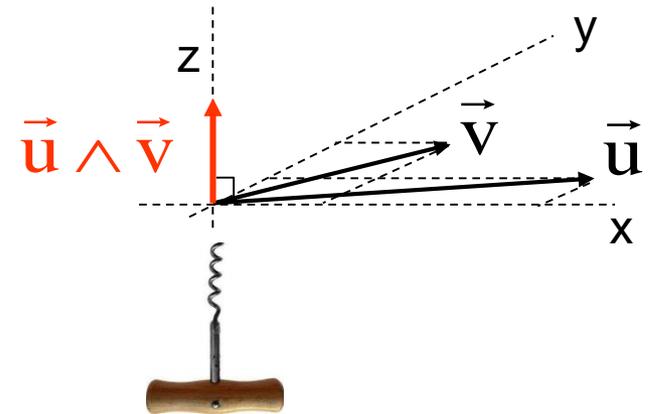


- **PRODUIT VECTORIEL**

$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \text{PLAN}(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ direct}$$



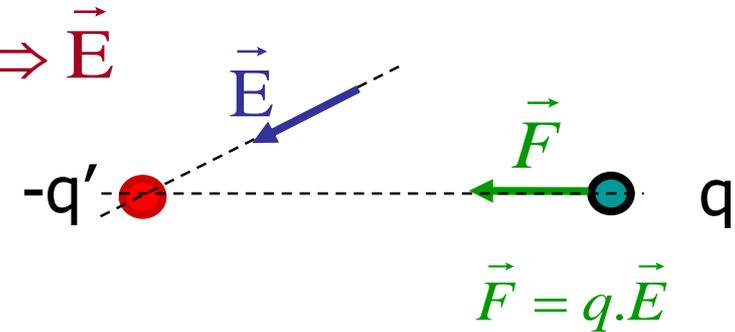
RAPPELS ELECTRO ET MAGNETOSTATIQUE

Champs statiques = créés par des distributions de charges ou de courants constants dans le temps = permanents.

- Charge ponctuelle permanente $\Rightarrow \vec{E}$

$$\|\vec{E}(\mathbf{r})\| = \frac{q'}{4\pi\epsilon r^2}$$

Permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon_r \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

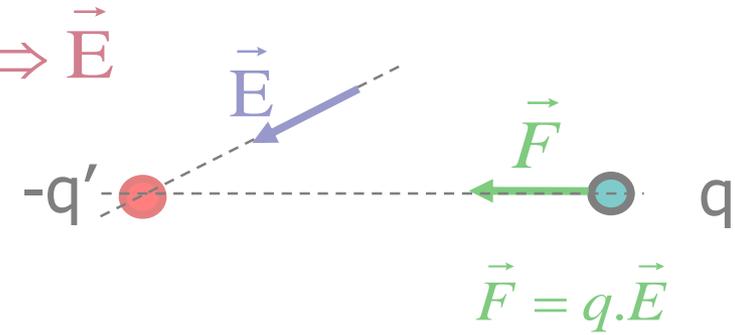


RAPPELS ELECTRO ET MAGNETOSTATIQUE

Exemples de **champs statiques** (créés par des distributions de charges ou de courants électriques **constants dans le temps**)

- Charge ponctuelle permanente $\Rightarrow \vec{E}$

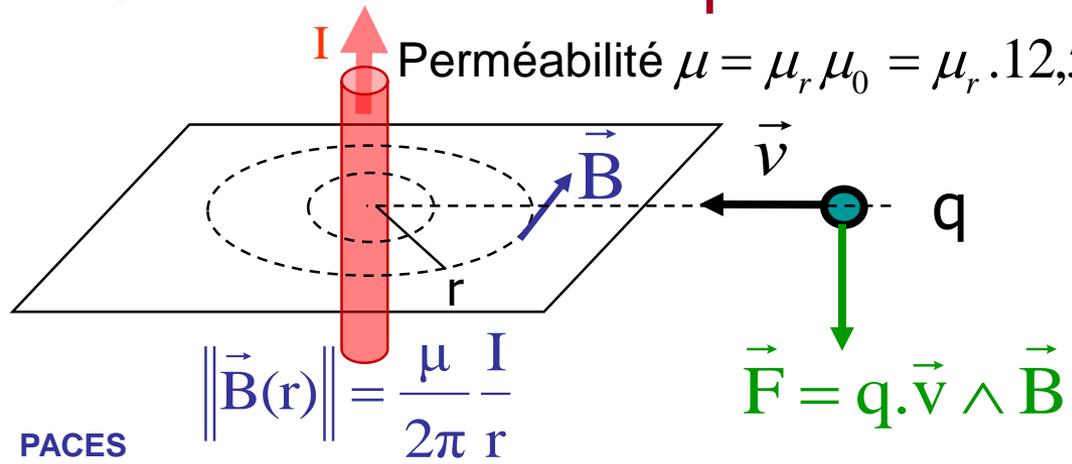
$$\|\vec{E}(r)\| = \frac{q'}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$



Permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon_r \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

- Circuit de courant permanent $\Rightarrow \vec{B}$

Perméabilité $\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_r \cdot 12,57 \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$



$$\|\vec{B}(r)\| = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r}$$

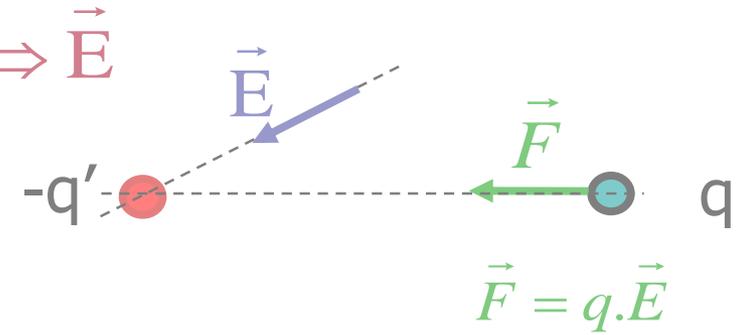


RAPPELS ELECTRO ET MAGNETOSTATIQUE

Exemples de **champs statiques** (créés par des distributions de charges ou de courants électriques **constants dans le temps**)

- Charge ponctuelle permanente $\Rightarrow \vec{E}$

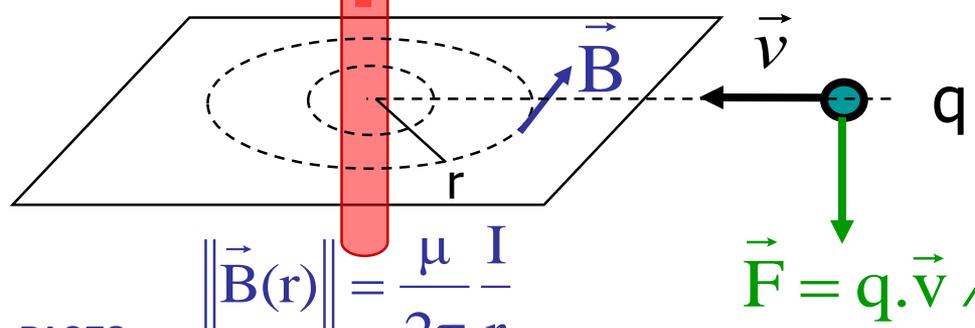
$$\|\vec{E}(r)\| = \frac{q'}{4\pi\epsilon r^2}$$



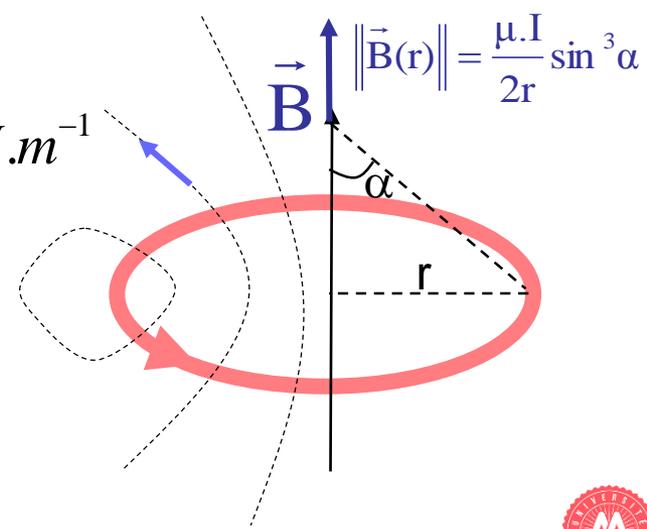
Permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon_r \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$

- Circuit de courant permanent $\Rightarrow \vec{B}$

Perméabilité $\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_r \cdot 12,57 \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$

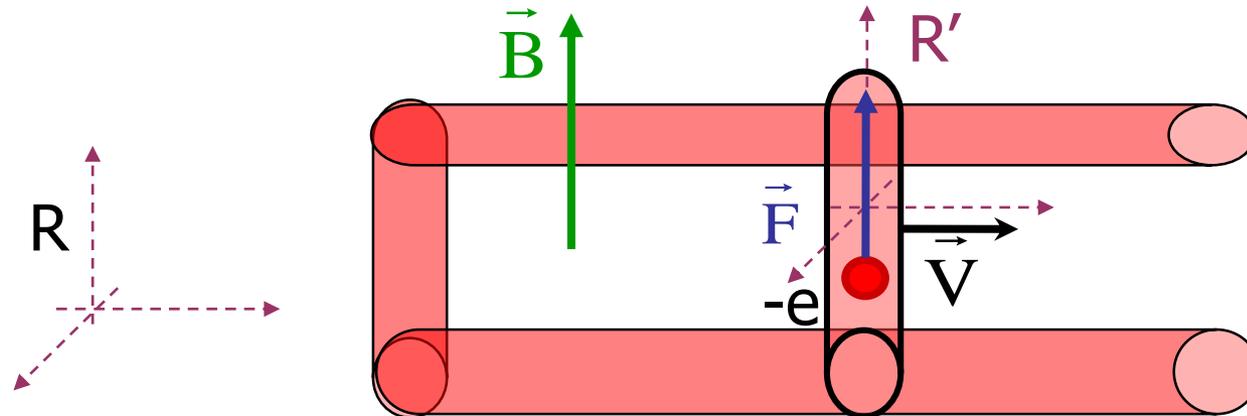


$$\|\vec{B}(r)\| = \frac{\mu I}{2\pi r}$$



LIEN ELECTRICITE / MAGNETISME

(Romagnosi 1802, Ørsted 1820)



$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{F}' = -e(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

Dans R fixe , champ (\vec{E}, \vec{B})
 déplacement de charges dans
 un champ magnétique $(\vec{v} = \vec{V})$
 sans champ électrique $(\vec{E} = \vec{0})$

$$\vec{F} = -e \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$$

Dans R' mobile, champ (\vec{E}', \vec{B}')
 charges statiques $(\vec{v}' = \vec{0})$, donc
 pas de force magnétique :

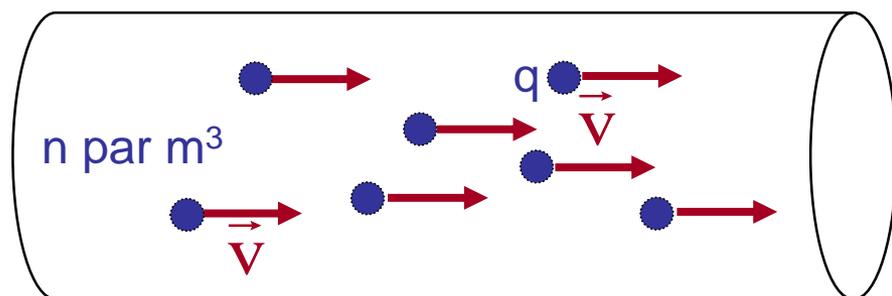
$$\vec{F}' = -e \cdot \vec{E}'$$

donc $\vec{E}' = \vec{V} \wedge \vec{B}$

DENSITES DE CHARGES ET DE COURANTS

Soient n particules par unité de volume, de charge q et de vitesse v . On définit :

- la densité de charge $\rho = n \cdot q$ en $C \cdot m^{-3}$
- la densité de courant $j = n \cdot q \cdot v = \rho \cdot v$ en $A \cdot m^{-2}$

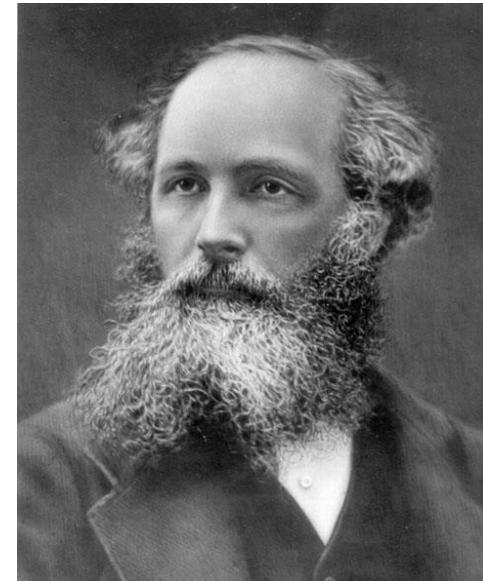


Le principe de conservation de la charge donne un lien entre ces deux densités :

$$\vec{j} = j \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE

- Si les densités de charges ρ et de courants j ne dépendent pas du temps, alors E et B sont permanents et indépendants l'un de l'autre.
- Si les densités de charges ρ et de courants j varient au cours du temps, les champs électriques et magnétiques sont **couplés**: E variable \Leftrightarrow B variable
 - **Equations de Maxwell**: synthèse empirique puis conséquence théorique de la relativité restreinte.



JC Maxwell
1831-1897

LES EQUATIONS DE MAXWELL

Un champ électromagnétique est caractérisé par un couple de vecteurs $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ et $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ satisfaisants:

- Charges électriques \Rightarrow champ électrique

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

- Pas de « charge » magnétique

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

- Couplage électro-magnétique

Variation de \vec{B} dans le temps $\Rightarrow \vec{E}$

Variation de \vec{E} dans le temps $\Rightarrow \vec{B}$
ou courant permanent

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

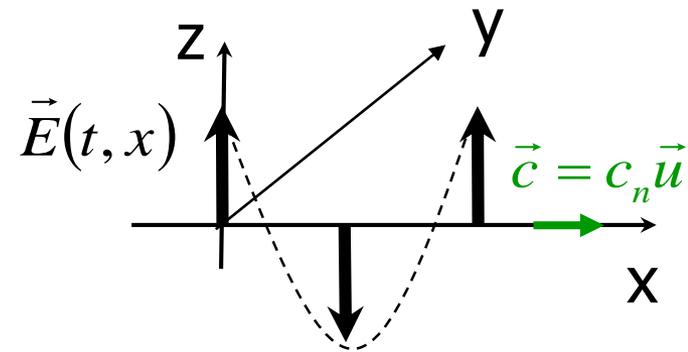


LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

APPLICATION :

- Soit une onde électrique

$$\vec{E}(t, x) = (0, 0, E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_n} \right) \right])$$



- 1° relation de couplage de Maxwell :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \Rightarrow B_x = B_z = 0 \text{ et } \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

seul B_y est non nul

LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

$$\vec{E}(t, x) = \left(0, 0, E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_n} \right) \right] \right)$$

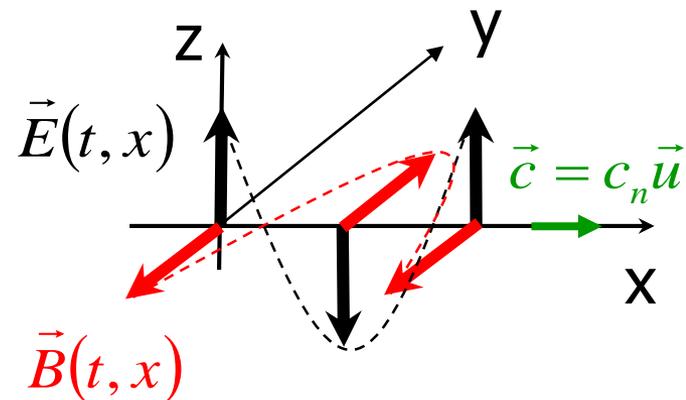
Maxwell $\Rightarrow B_x = B_z = 0$ et

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c_n} \omega \cdot E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_n} \right) \right]$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{1}{c_n} E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_n} \right) \right]$$

$$\vec{B}(t, x) = \left(0, -B_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c_n} \right) \right], 0 \right)$$

Généralisation : $\vec{B} = \frac{1}{c_n} \vec{u} \wedge \vec{E}$



avec $B_0 = \frac{1}{c_n} E_0$

CELERITE DE LA LUMIERE

Dans notre cas particulier

$$\begin{cases} \vec{E}(t, x) = (0, 0, E_0 \sin[\omega(t - \frac{x}{c_n})]) \\ \vec{B}(t, x) = (0, -\frac{E_0}{c_n} \sin[\omega(t - \frac{x}{c_n})], 0) \end{cases}$$

4° équation de Maxwell (en l'absence de courant):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{E_0}{c_n} \sin[\omega(t - \frac{x}{c_n})] \right) = \epsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(E_0 \sin[\omega(t - \frac{x}{c_n})] \right) \Rightarrow \left(-\frac{\omega}{c_n} \right) \cdot \left(-\frac{E_0}{c_n} \right) = \epsilon\mu \cdot \omega \cdot E_0$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$



ONDE ELECTRO-MAGNETIQUE

- $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{c}_n$
- \vec{E} et \vec{B} en phase, même f
- $B = E/c_n$
- $c_n = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = c/n$
- indice de réfraction : $n = \frac{c}{c_n} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} > 1$

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2,998.10^8 \text{ ms}^{-1}$$

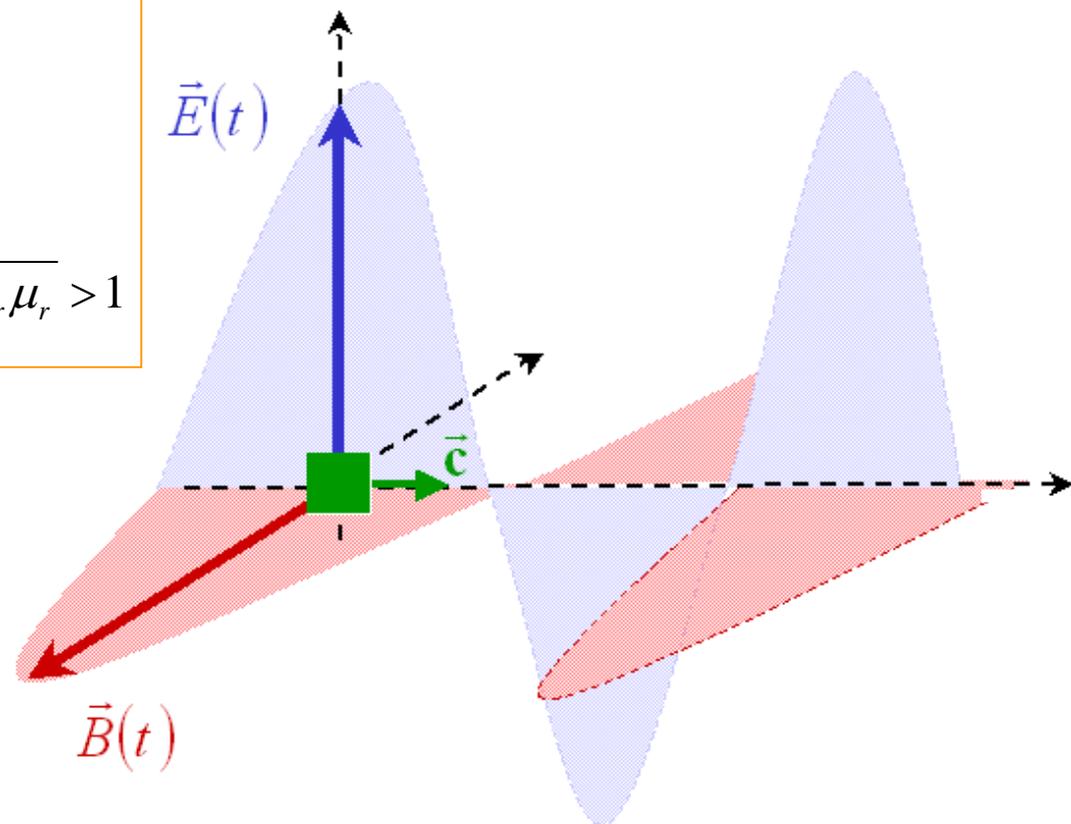
Perméabilité $\mu = \mu_r \mu_0$

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H/m}$$

Permittivité $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi.c^2} \text{ F/m}$$

Impédance : $Z = \mu.c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \mu \frac{E}{B}$



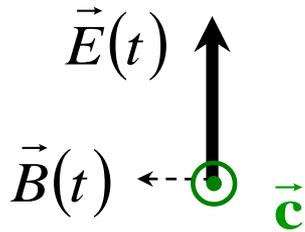
OP vectorielle transversale



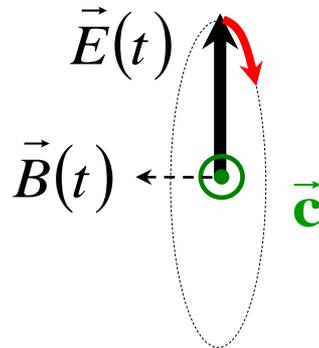
POLARISATION

Si la direction de \vec{E} (donc de \vec{B}) est :

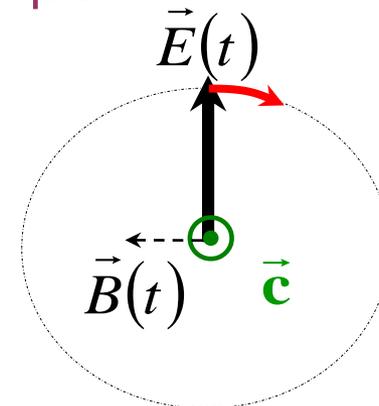
- fixe : polarisation rectiligne
- tourne à vitesse angulaire constante
 - en décrivant un cercle : polarisation circulaire
 - en décrivant une ellipse: polarisation elliptique



rectiligne

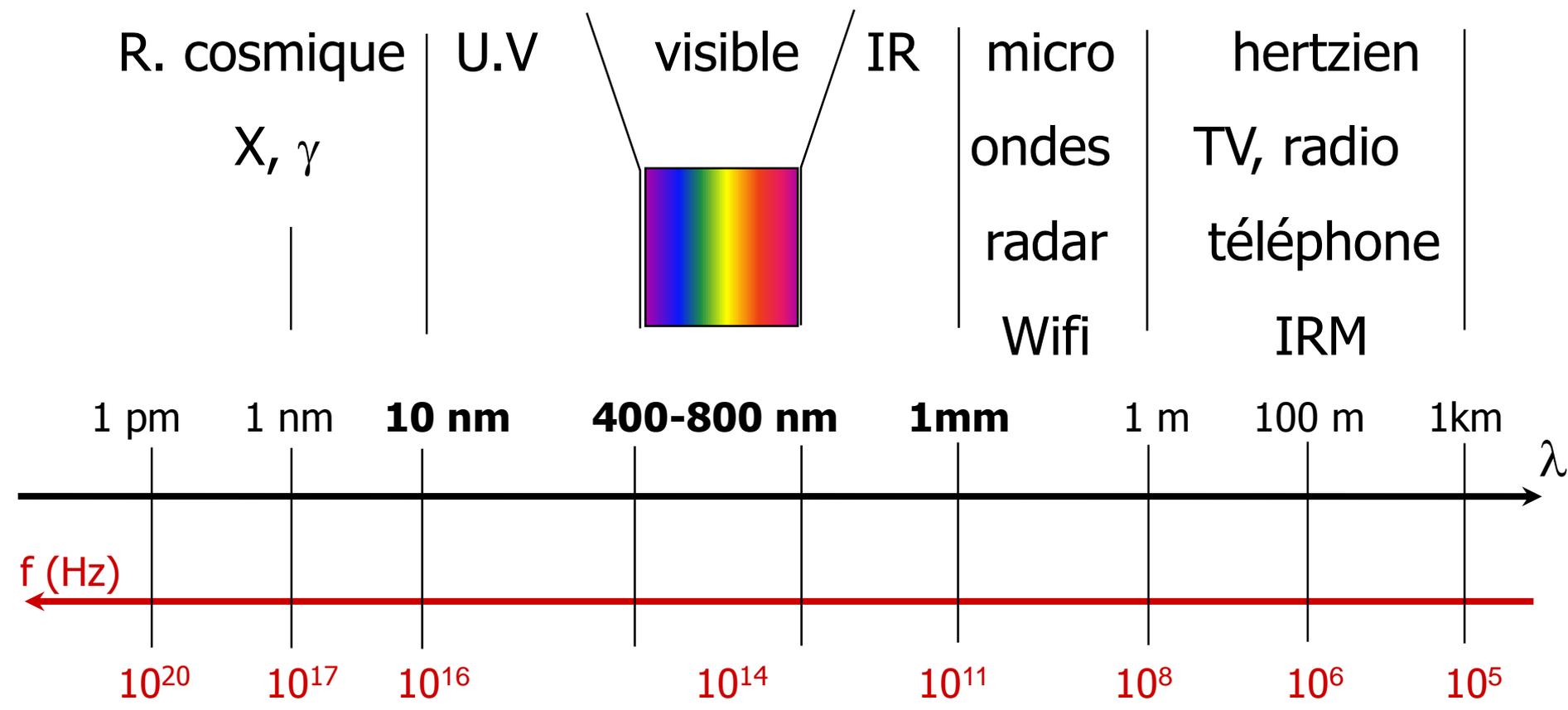
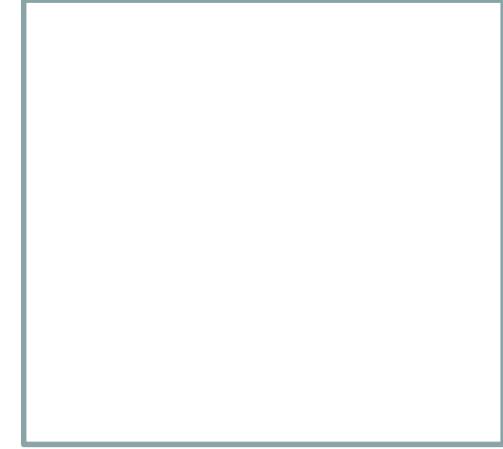


elliptique

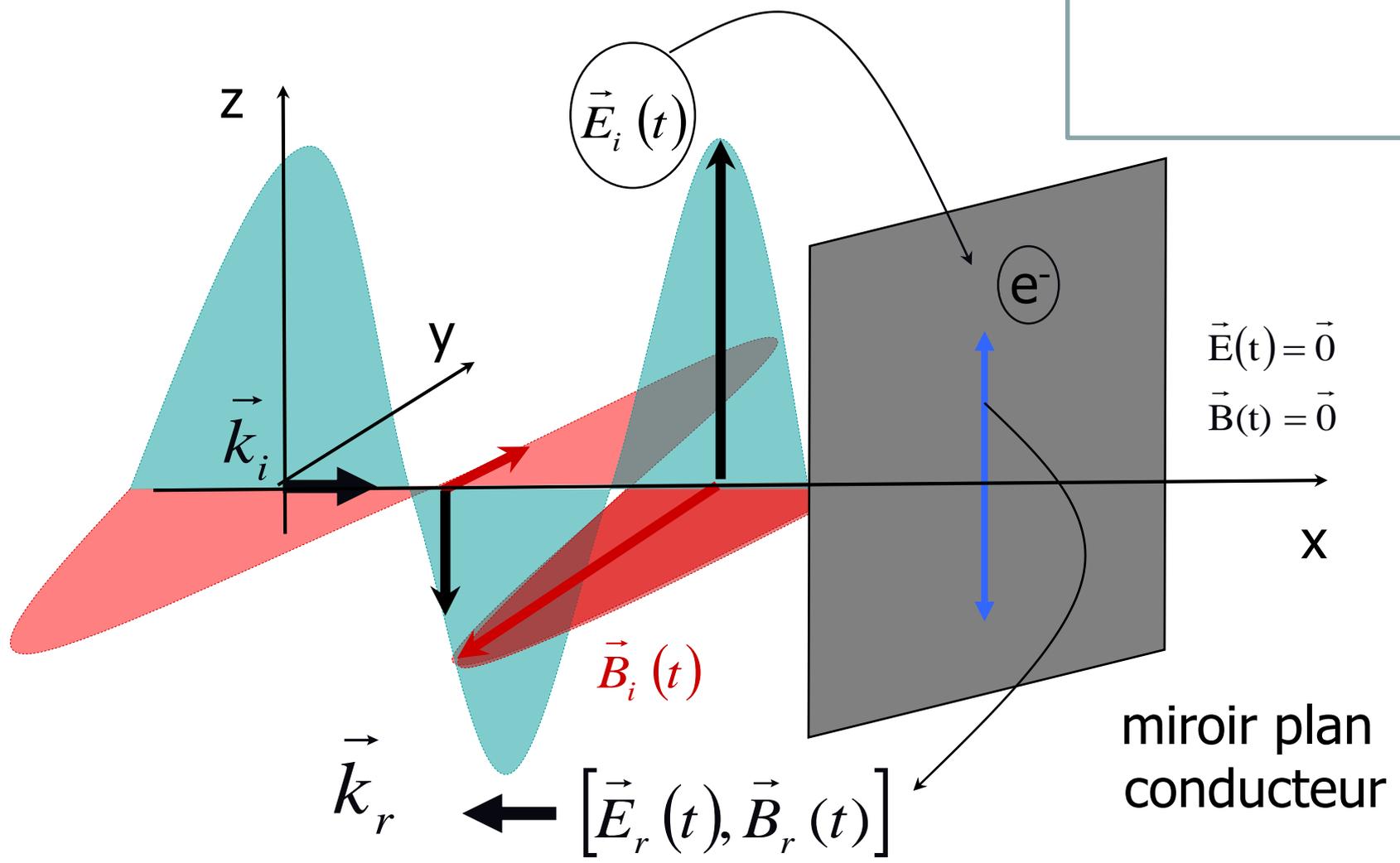


circulaire

CLASSIFICATION SIMPLIFIEE



LOIS DE PROPAGATION DE LA LUMIERE



REFLEXION ET REFRACTION

Ces phénomènes peuvent être abordés de deux façons équivalentes. La première correspond à une approche « optique physique », la seconde à une approche « optique géométrique ».

- Conséquence des équations de Maxwell
- Conséquence du **principe de Fermat**
 - Principe de moindre action pour les ondes
 - **Entre deux points de l'espace, le vecteur d'onde suit la trajectoire la plus rapide** (ce principe a trouvé une justification avec les travaux de R. Feynman en mécanique quantique¹).



CHEMIN OPTIQUE

- **Principe de Fermat** : La lumière suit la trajectoire qui minimise le temps de parcours t_n entre deux points A et B dans un milieu d'indice de réfraction n :

$$t_n = \frac{\text{dist}(A, B)}{c_n} \Rightarrow c.t_n = \frac{c}{c_n} . \text{dist}(A, B) = n . \text{dist}(A, B)$$

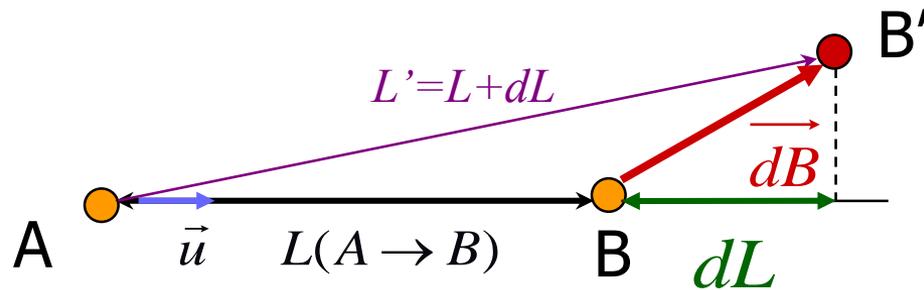
- **Chemin optique L** entre deux points d'un milieu d'indice n



$$L(A \rightarrow B) = n . \text{dist}(A, B) = n . \vec{u} . \overrightarrow{AB} \quad \text{où} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

VARIATION DE CHEMIN OPTIQUE

Supposons un petit déplacement de B en B' et calculons la petite variation de chemin optique (on néglige la modification de \vec{u})



$$L' = n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB'} = n \cdot \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{dB})$$

$$L' = n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{dB}$$

$$L' = L + n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{dB}$$

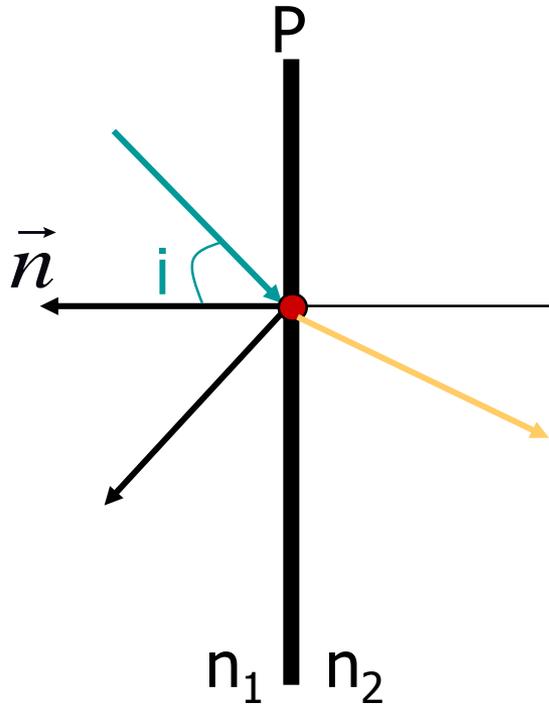
$$dL = n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{dB}$$

Si B subit un déplacement dB ,
L varie de :

$$dL = n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{dB}$$

projection
de \overrightarrow{dB} sur \vec{u}

LOIS DE SNELL -DESCARTES



Quelles sont les directions du rayon réfléchi et du rayon transmis par rapport au rayon incident ?



Willebrord Snell
(1580-1626)

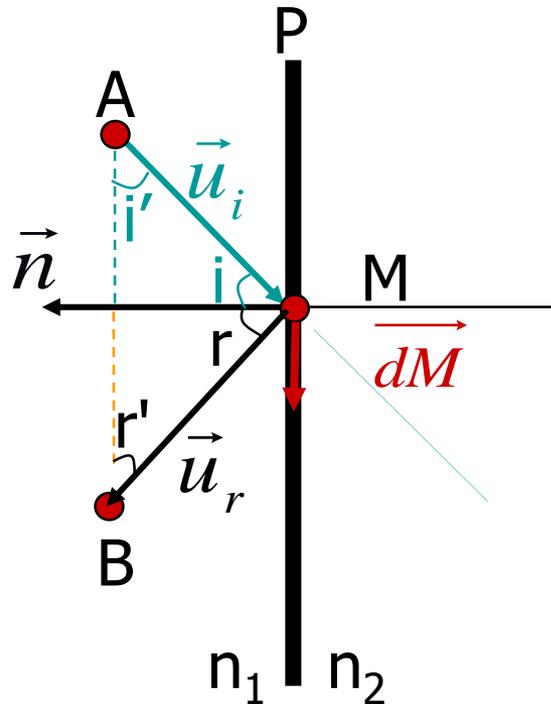


René Descartes
1596-1650

LOIS DE SNELL –DESCARTES (REFLEXION)

Fermat $\Rightarrow dL(A \rightarrow M \rightarrow B) = 0$

\vec{u}_i et \vec{u}_r coplanaires



$$dL(A \rightarrow M \rightarrow B) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot \vec{u}_i \cdot d\vec{M} - n_1 \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{M} = 0$$

$$\Rightarrow \cos i' = \cos r'$$

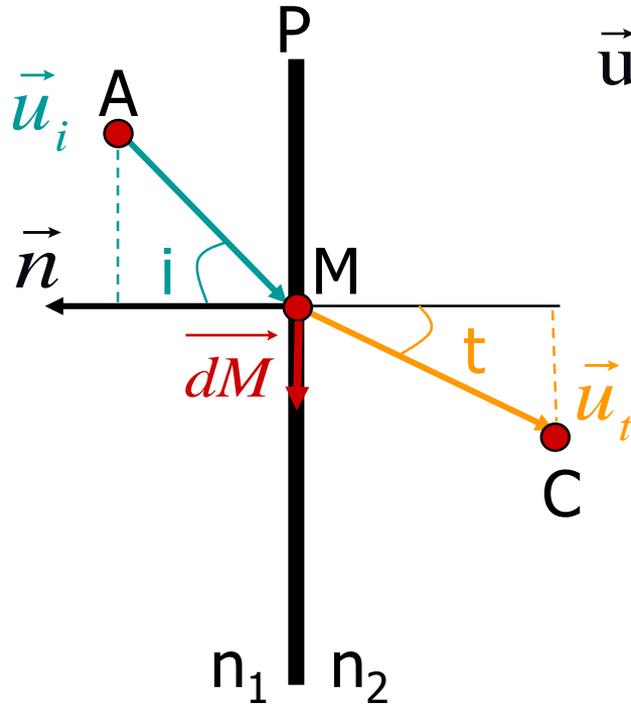
$$\Rightarrow \sin i = \sin r$$

$$\Rightarrow i = r$$

Rayons incidents et réfléchis dans le **même plan**

$$i = r$$

LOIS DE SNELL-DESCARTES (REFRACTION)



$$dL(A \rightarrow M \rightarrow C) = 0$$

\vec{u}_i et \vec{u}_t coplanaire s

$$dL(A \rightarrow M \rightarrow C) = 0$$

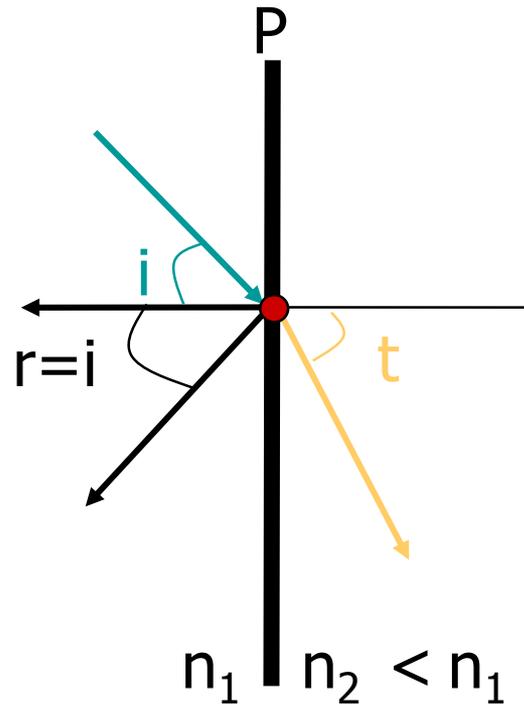
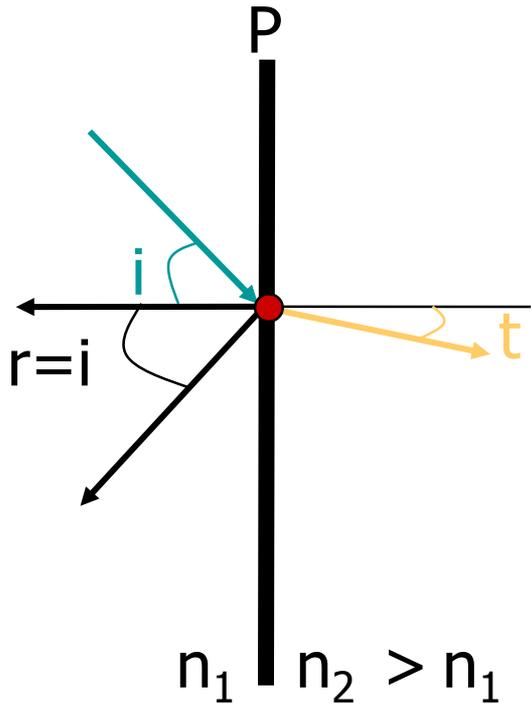
$$n_1 \cdot \vec{u}_i \cdot d\vec{M} - n_2 \cdot \vec{u}_t \cdot d\vec{M} = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \sin i = n_2 \sin t$$

Rayons incidents et transmis dans le même plan

$$n_1 \sin i = n_2 \sin t$$

LOIS DE SNELL -DESCARTES



Rayons incidents réfléchis et transmis dans le **même plan**

$$i = r$$

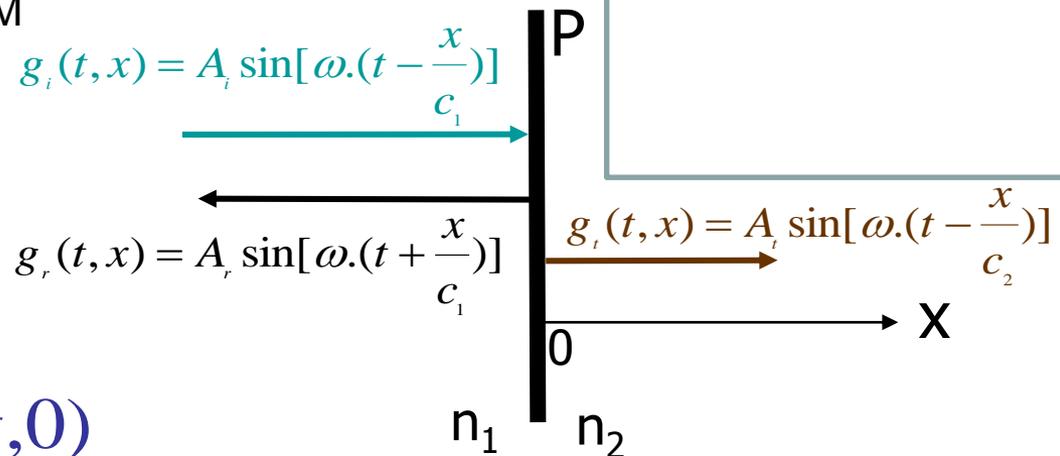
$$n_1 \sin i = n_2 \sin t$$

Conséquence : $(n_1/n_2) \sin i = \sin t \leq 1 \Rightarrow \sin i \leq n_2/n_1$

$n_2 < n_1 \Rightarrow$ réflexion totale si $i > \arcsin (n_2/n_1)$

REFLEXION NORMALE

g représente par exemple E ou B d'une OEM



$$\frac{\partial g_i}{\partial x}(t,0) + \frac{\partial g_r}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial g_t}{\partial x}(t,0)$$

$$\Rightarrow -\frac{\omega}{c_1} A_i + \frac{\omega}{c_1} A_r = -\frac{\omega}{c_2} A_t \Rightarrow A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2} A_t$$

$$g_i(t,0) + g_r(t,0) = g_t(t,0) \Rightarrow A_i + A_r = A_t$$

$$\Rightarrow A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2} A_t = \frac{c_1}{c_2} (A_i + A_r) \Rightarrow 1 - \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{A_r}{A_i} \right) \Rightarrow \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

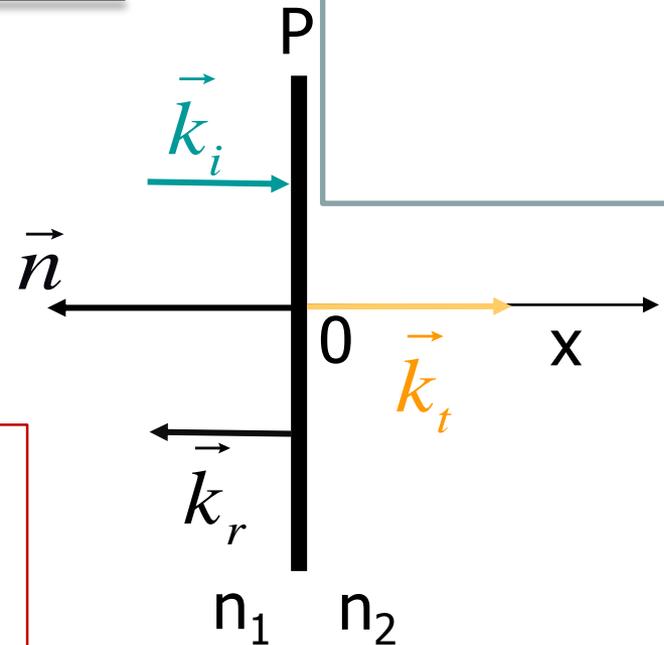


REFLEXION NORMALE

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_r}{A_i} &= \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \\ c_i &= \frac{c}{n_i} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{A_r}{A_i} = \frac{\frac{c}{n_2} - \frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2} + \frac{c}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$I = \left(\frac{2\pi^2 f^2}{S} \right) \cdot Z \cdot A^2 \Rightarrow r = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$t = \frac{I_t}{I_i} = 1 - r$$



Ex: lentille en verre ($n_2=1,5$) dans de l'air ($n_1=1$) : $r= 4\%$
 Conséquence: réflexion totale si $n_2 \rightarrow \infty$ (soit $n_2 \gg n_1$)

REFLEXION NORMALE TOTALE

$$\vec{E}_i(t, x) = \vec{E}_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad \vec{E}_r(t, x) = -\vec{E}_0 \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$$

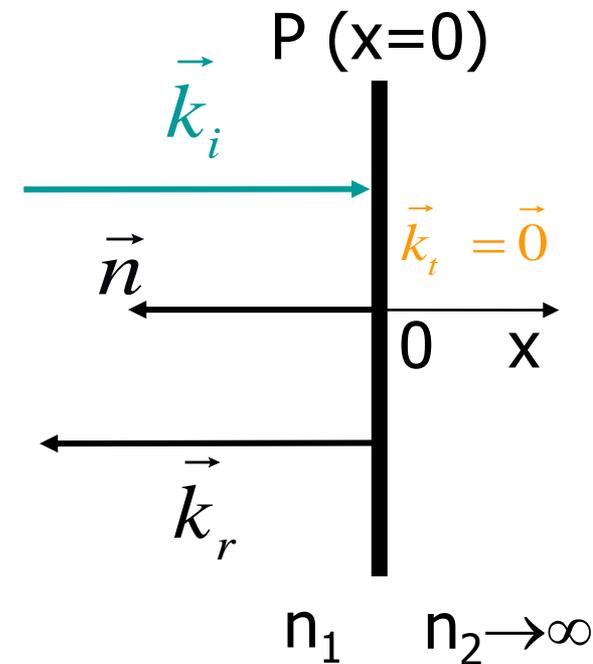
interférences : $\vec{E}(t, x) = \vec{E}_i(t, x) + \vec{E}_r(t, x)$

$$\vec{E}(t, x) = \vec{E}_0 \left\{ \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] - \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \right\}$$

Rappel: $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

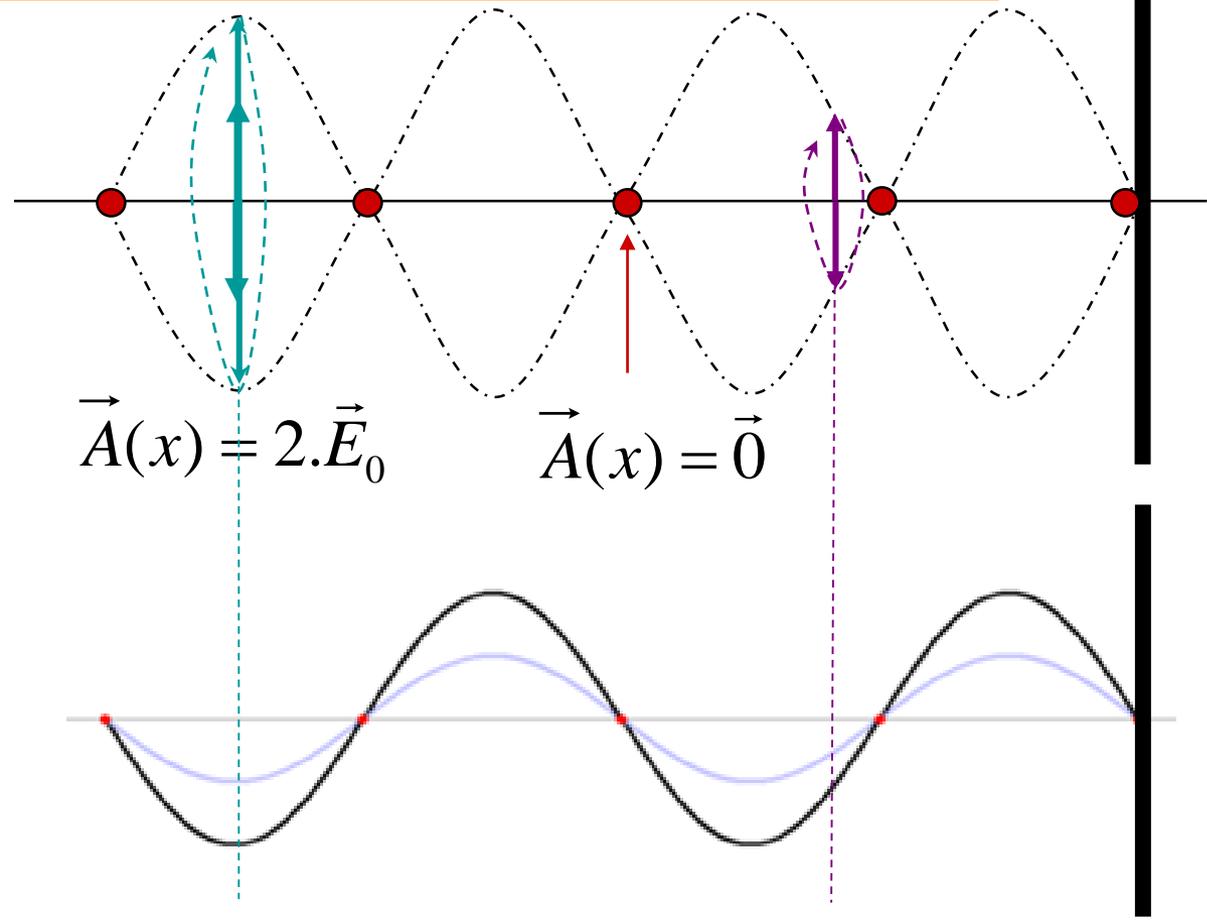
donc : $\vec{E}(t, x) = 2\vec{E}_0 \left\{ \sin\left[-\frac{\omega x}{c}\right] \cos[\omega t] \right\}$

$$\vec{E}(t, x) = \left[-2 \sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) \vec{E}_0 \right] \cdot \cos(\omega \cdot t) = \vec{A}(x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



ONDE STATIONNAIRE

$$\vec{E}(t, x) = \left[-2 \sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) \vec{E}_0 \right] \cos(\omega \cdot t) = \vec{A}(x) \cos(\omega \cdot t)$$



Pas de déphasage

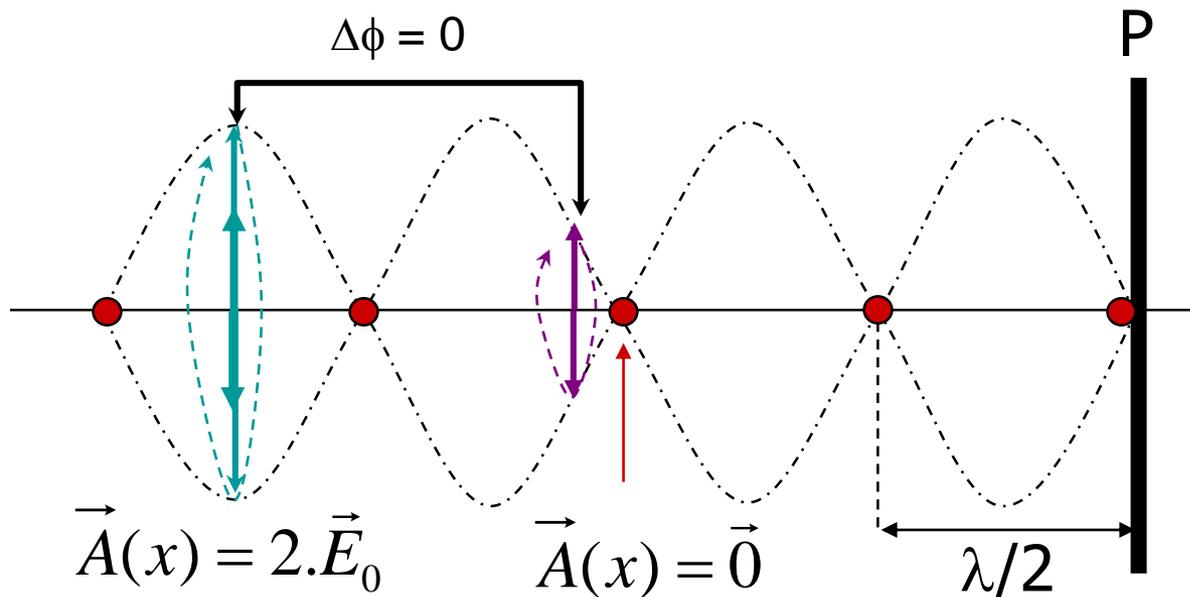
Amplitude

$$\vec{A}(x) = -2 \sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) \vec{E}_0$$

variable avec x



ONDE STATIONNAIRE



Pas de
déphasage

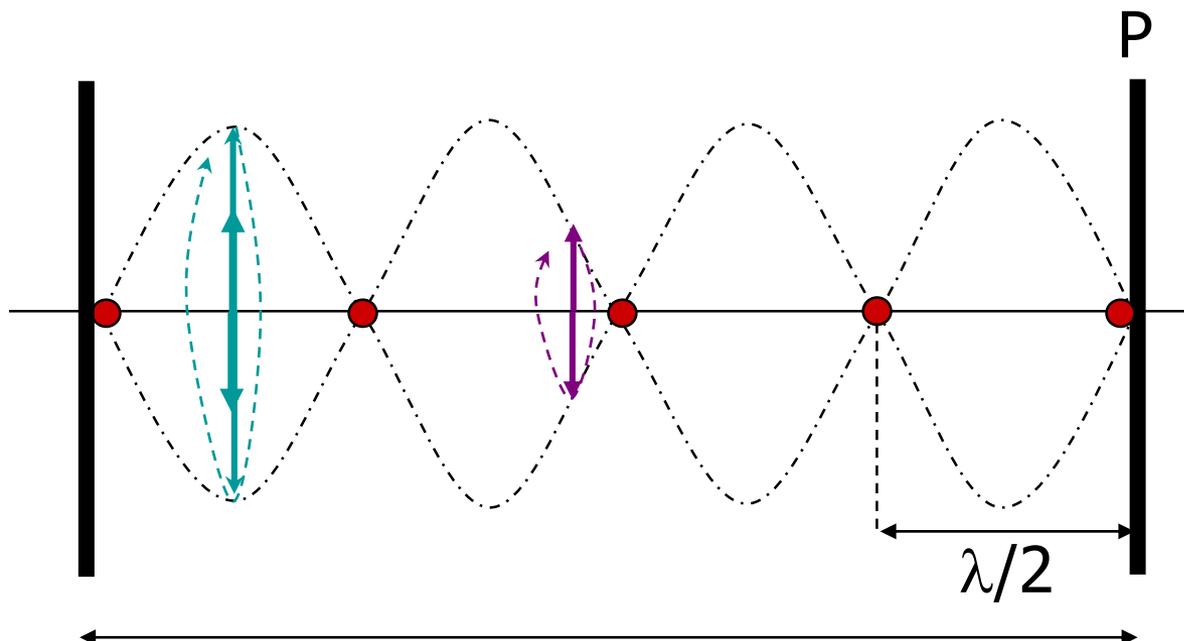
Amplitude $A(x)$
variable avec x

$$\sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi \cdot x}{cT} = \frac{2\pi \cdot x}{\lambda} = N \cdot \pi \Leftrightarrow x \in \left\{ 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 3 \frac{\lambda}{2}, \dots \right\}$$

$$\vec{E}(t, x) = \left[-2 \sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) \vec{E}_0 \right] \cos(\omega \cdot t) = \vec{A}(x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



ONDE STATIONNAIRE & QUANTIFICATION



$$L = k\lambda/2$$

$$\lambda = 2L/k$$

k entier naturel

$$\vec{E}(t, x) = \left[-2 \sin\left(\frac{\omega \cdot x}{c}\right) \vec{E}_0 \right] \cos(\omega \cdot t)$$



Si le milieu est limité de dimension L , λ ne peut prendre que certaines valeurs discrètes $2L/k$:

$$\lambda = 2L, L, 2L/3, L/2, \dots$$

On dit que ces grandeurs sont **quantifiées**

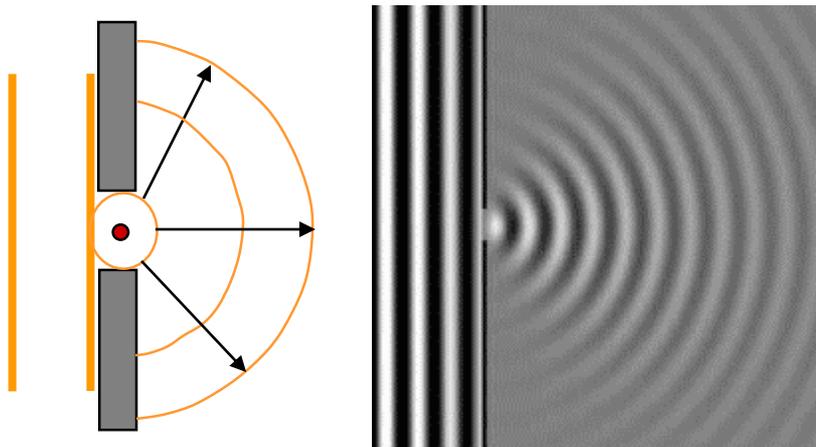
OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 2

Savoir définir, caractériser et manipuler:

- Une onde électromagnétique:
 - Définition, caractéristiques, polarisation
 - ϵ , μ , ϵ_R , μ_R , n
 - X- γ , < 10 nm, UV, V (400-800 nm), IR, H > mm)
- Un chemin optique et le principe de Fermat
 - Calculs de chemins optiques dans diverses configurations
- Les lois de Descartes et réflexion normale (r,t)
 - Dans des contextes géométriques variés
- Onde stationnaire en lien avec la quantification

DIFFRACTION

Rappel du principe de Huygens-Fresnel : chaque point d'une surface d'onde agit comme une source ponctuelle émettant en phase,



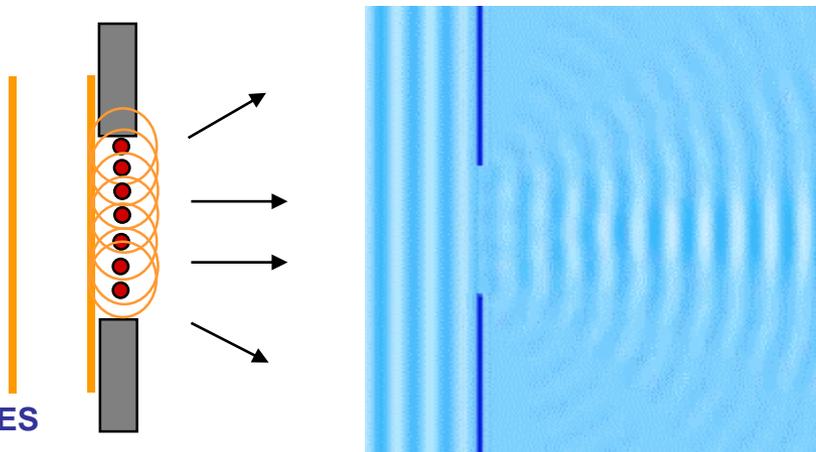
Diffraction = changement de direction d'une onde au passage d'un écran troué ou aux bords d'un écran.

Après l'écran :

① une ou plusieurs ondes sphériques se propagent.

② un déphasage apparaît entre les rayons émis dans une direction

③ les ondes cohérentes ré-émises peuvent s'additionner algébriquement = interférences



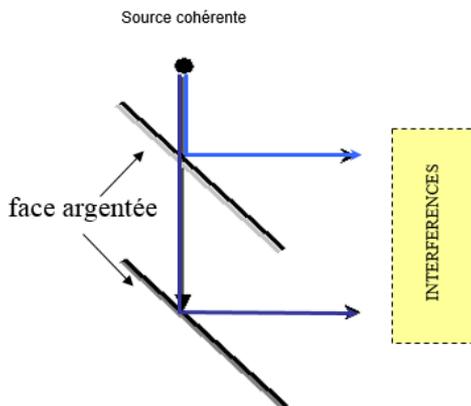
INTERFERENCES

• Définition : **Addition algébrique d'ondes progressives pures cohérentes**

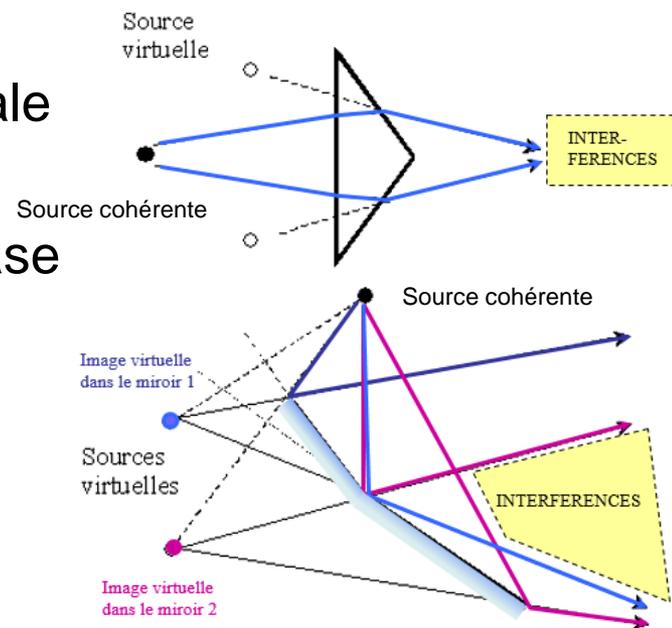
- Attention : il ne s'agit pas simplement de l'addition des intensités des ondes (qui a lieu même avec des ondes incohérentes)

• Exemples :

- Onde stationnaire après réflexion normale
- Ondes sphériques après diffraction
- Onde fractionnée avec décalage de phase



Miroirs réfléchissant et semi-réfléchissant

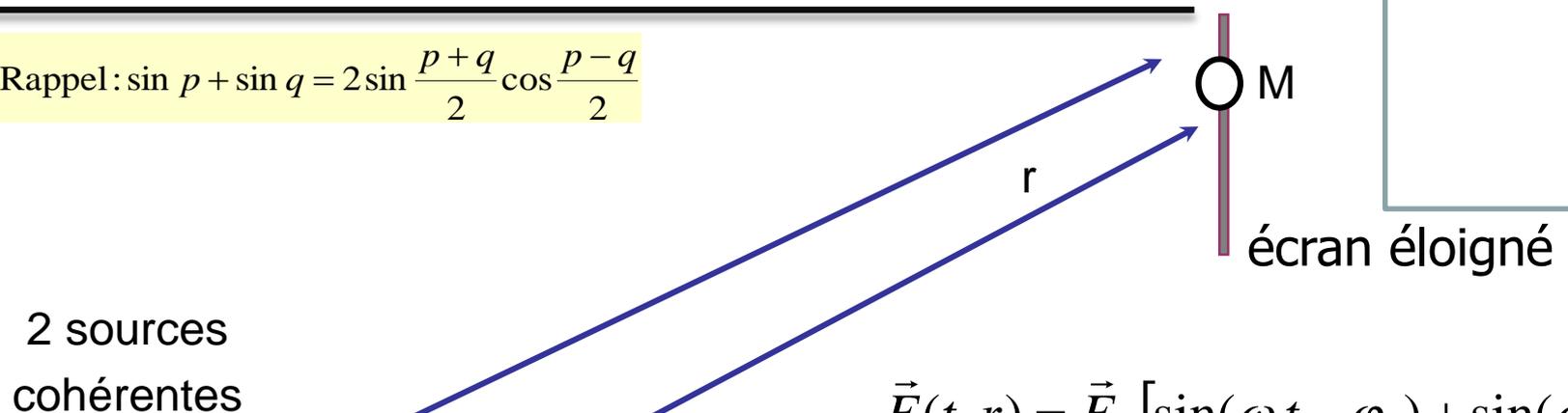


Bi-prisme et miroirs de Fresnel



INTERFERENCES DE SOURCES COHERENTES

Rappel : $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$



$$\vec{E}(t, r) = \vec{E}_0 \left[\sin(\omega.t - \varphi_r) + \sin(\omega.t - \varphi_r - \varphi) \right]$$

$$\vec{E}(t, r) = 2 \cdot \vec{E}_0 \sin\left(\frac{2\omega.t - 2\varphi_r - \varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\vec{E}(t, r) = \left[2 \cdot \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \cdot \sin\left(\omega.t - \varphi_r - \frac{\varphi}{2}\right)$$

(où $\varphi_r = \frac{\omega r}{c}$)

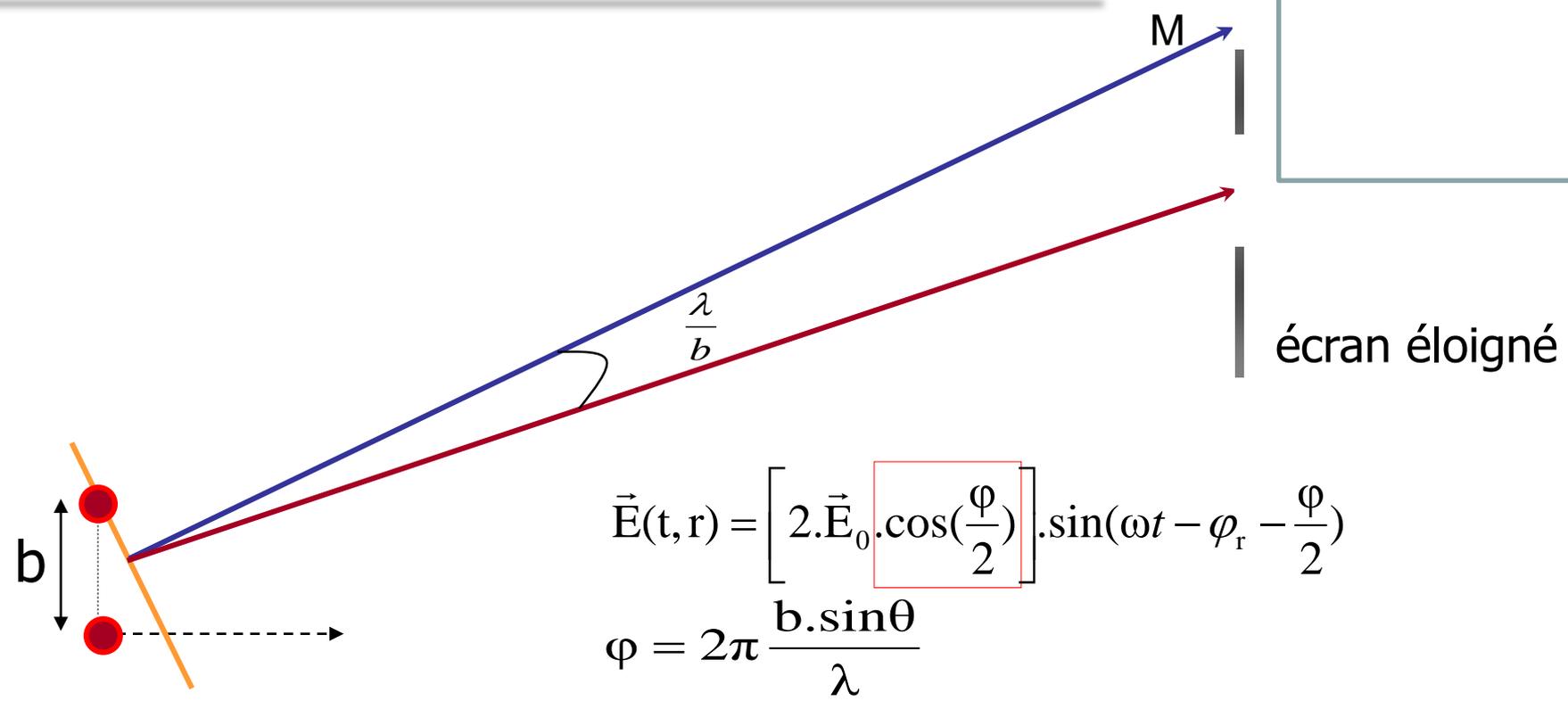
$$D = b \cdot \sin \theta$$

$$\varphi = \frac{\omega}{c} D = \frac{2\pi}{\lambda} D$$

$$\Rightarrow \varphi = 2\pi \frac{b \cdot \sin \theta}{\lambda} \text{ indépendant du temps } t$$



INTERFERENCES DE SOURCES COHERENTES



Amplitude (donc intensité) maximum si $|\cos(\varphi/2)|$ maximum, soit si $\varphi/2$ multiple de π

$$\frac{\varphi}{2} = \pi \cdot \frac{b \cdot \sin\theta}{\lambda} = k \cdot \pi \Leftrightarrow \sin\theta = k \cdot \frac{\lambda}{b} \approx \theta$$

Succession de bandes claires et sombres → mesures de petits déplacements, astronomie



INTERFERENCES APRES DIFFRACTION

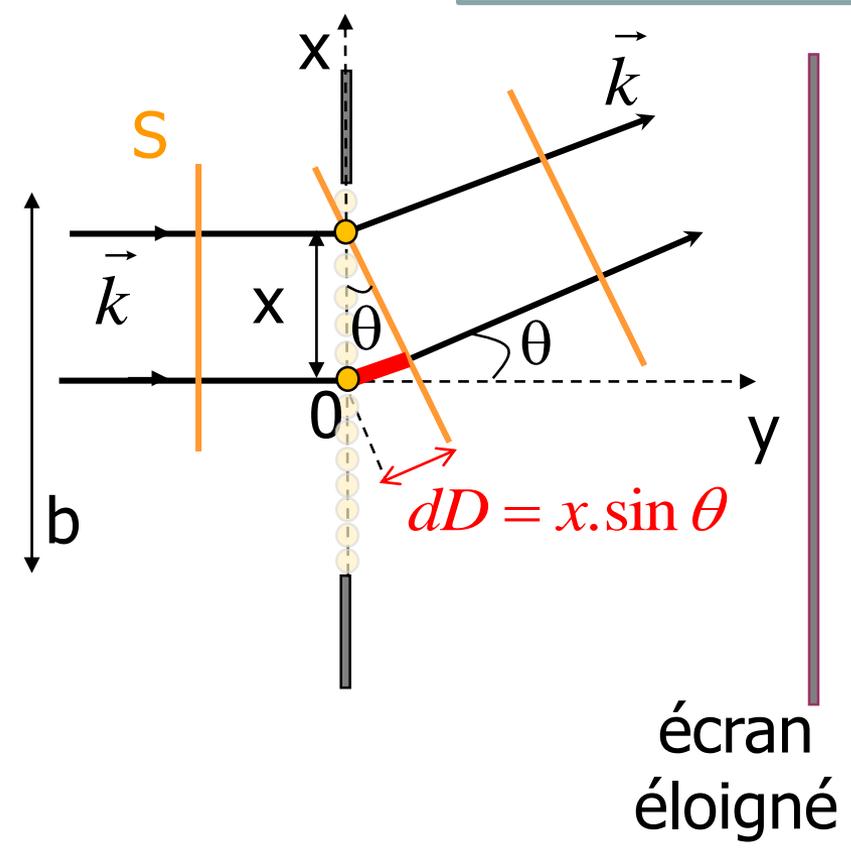
Calcul du déphasage entre deux rayons distants de x , diffractés sous un angle θ :

$$d\varphi = \frac{\omega}{c} dD = \frac{2\pi}{\lambda} dD$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{2\pi \cdot \sin \theta}{\lambda} x = \Theta \cdot x$$

Dans la direction θ , l'onde observée après diffraction est la somme de toutes les ondes déphasées ayant passé l'obstacle entre $-b/2$ et $+b/2$ et ayant été diffractées dans la direction θ :

$$\vec{E} = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\vec{A}_0}{b} \sin(\omega \cdot t - \Theta x) \cdot dx$$



DETAIL DU CALCUL (inutile de l'apprendre par cœur !)

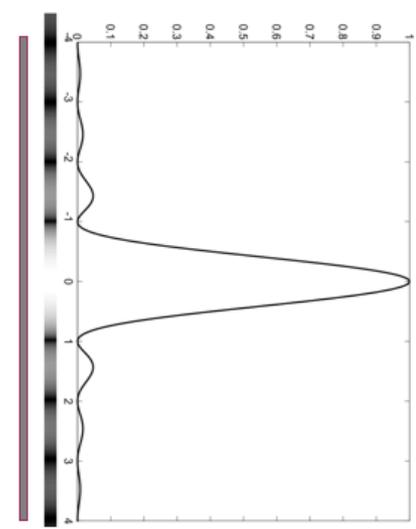
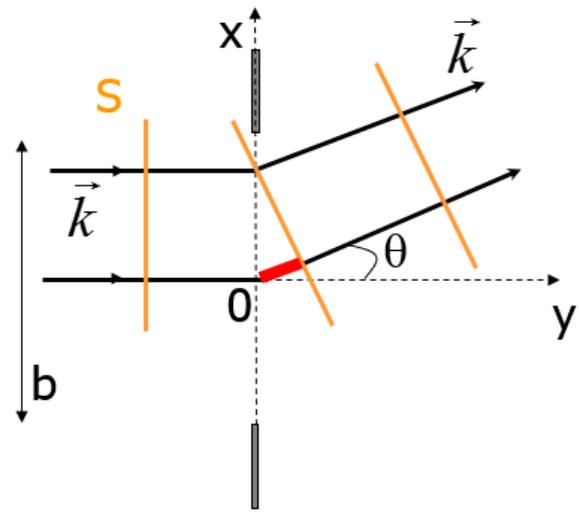
$$\vec{E} = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\vec{A}_0}{b} \sin(\omega t - \Theta x) dx = \frac{\vec{A}_0}{b} \frac{1}{\Theta} [\cos(\omega t - \Theta x)]_{-b/2}^{b/2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{A}_0}{b} \frac{1}{\Theta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{\Theta b}{2}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\Theta b}{2}\right) \right] \text{ or } \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{A}_0}{b} \frac{2}{\Theta} \sin\left(-\frac{\Theta b}{2}\right) \sin(\omega t) = \vec{A}_0 \sin(\omega t) \frac{\sin(\Theta b/2)}{\Theta b/2} \text{ avec } \Theta = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}$$

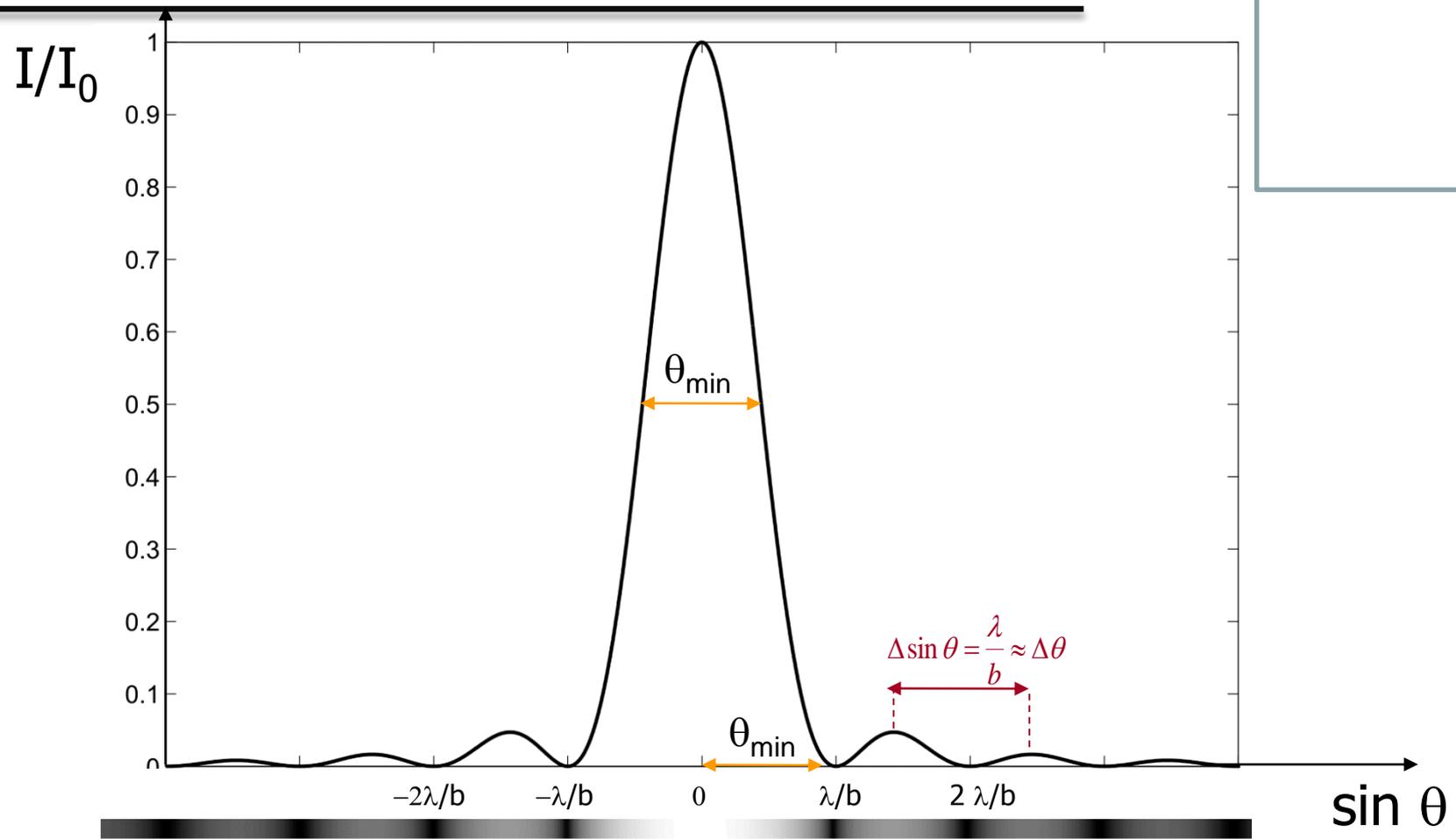
$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{A}_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$$

**Amplitude \vec{A}
maximale pour
 $\pi \cdot b \cdot \sin \theta / \lambda = N \cdot \pi/2$**



$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \sin \theta_{\min} = N \frac{\lambda}{b}, \quad N \text{ entier}$$

INTERFERENCES APRES DIFFRACTION



$$\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{b} \approx \theta_{\min}$$

est aussi la largeur à mi-hauteur du maximum principal

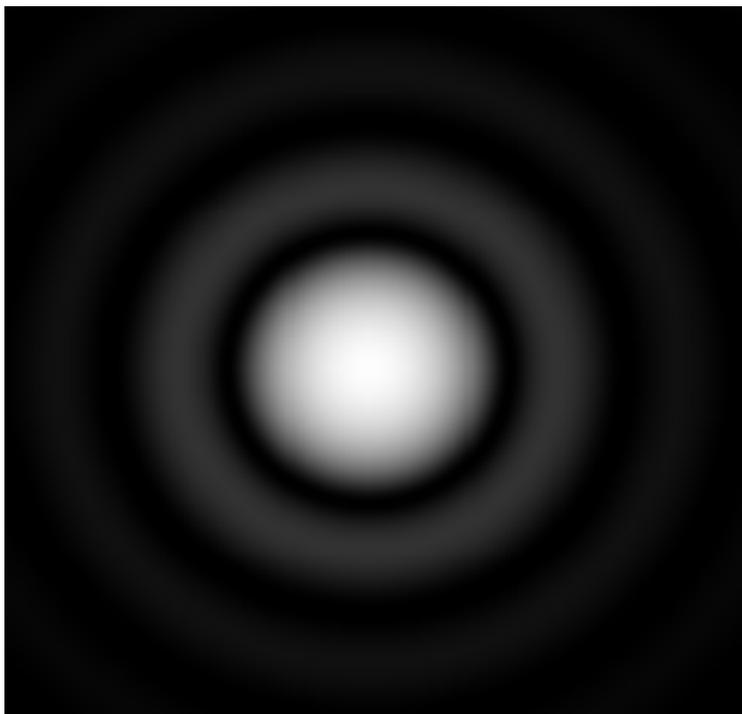


DIFFRACTION PAR DES ECRANS

ORIFICE CARRE DE COTE b

$$\sin \theta_{\min}^N = N \cdot \frac{\lambda}{b}$$

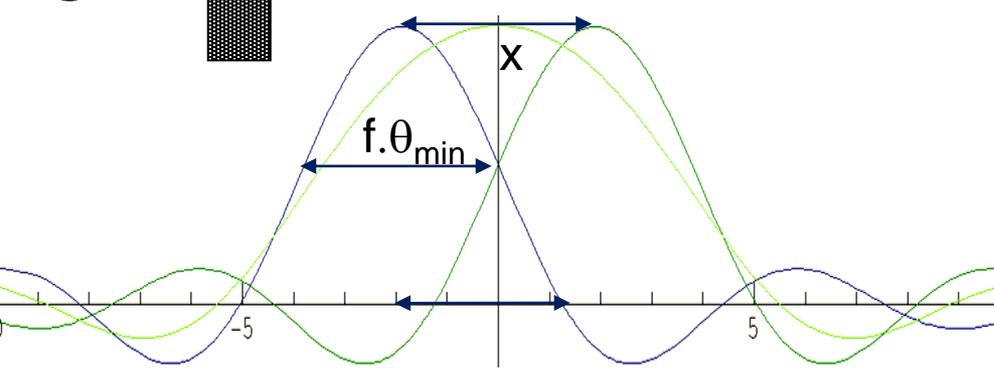
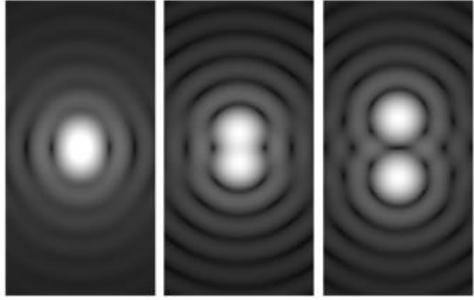
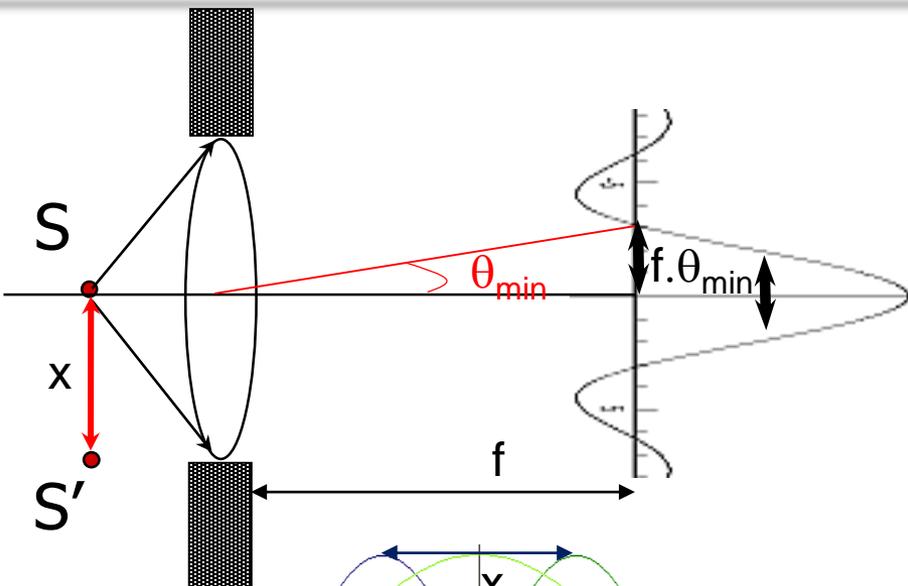
ORIFICE CIRCULAIRE DE DIAMETRE d



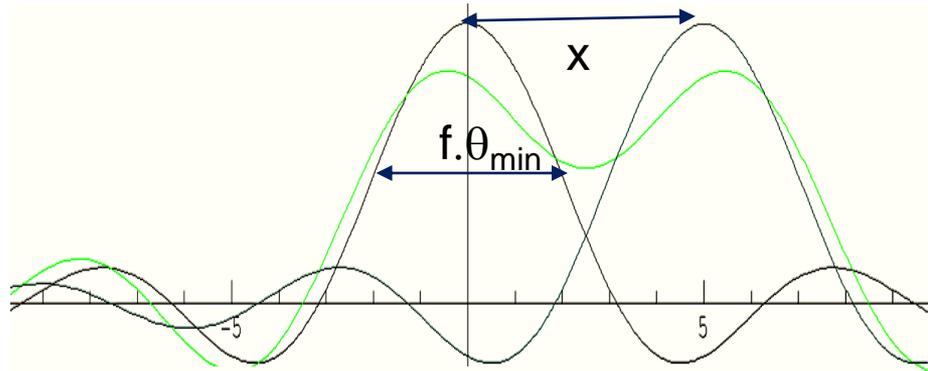
$$\sin \theta_{\min}^N = 1,22 \cdot N \cdot \frac{\lambda}{d}$$

N entier positif

LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION



$x \leq f \cdot \theta_{\min}$: fusion des 2 objets



$x > f \cdot \theta_{\min}$: 2 objets vus

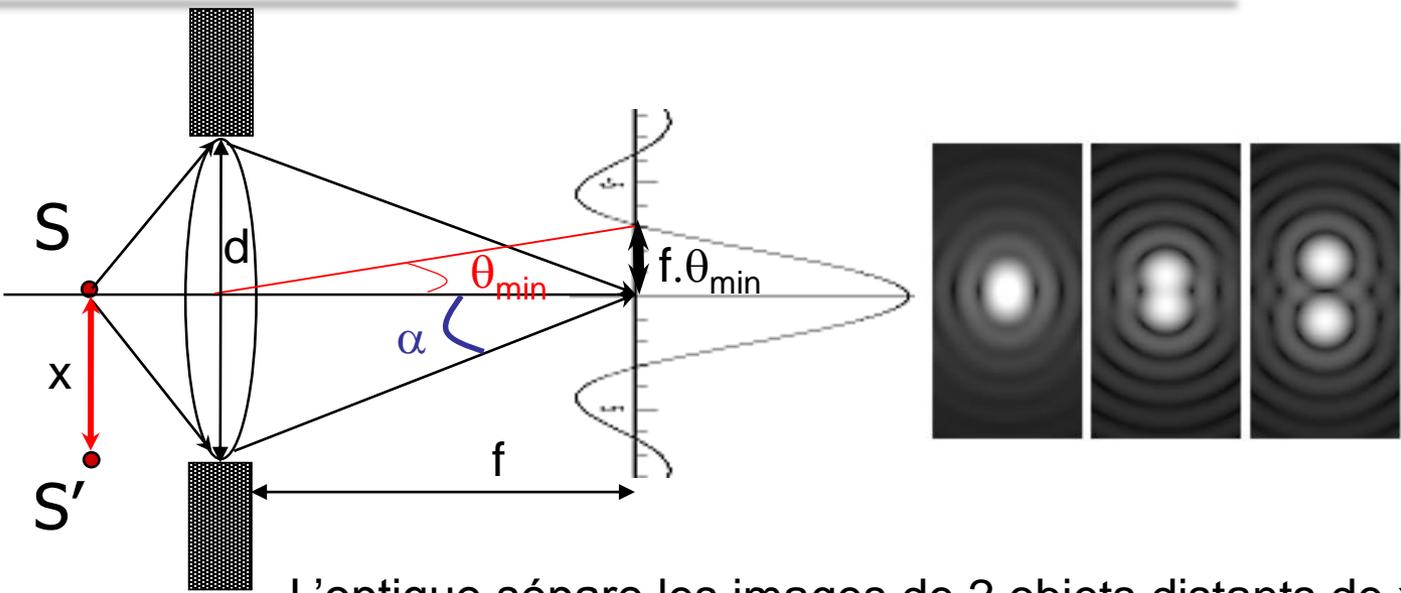
L'optique sépare les images de 2 objets distants de x si $x > LMH = f \cdot \theta_{\min} = 1,22 \cdot \lambda \cdot f / d$

Rm : $N = f/d =$ nombre d'ouverture des objectifs photographiques ($f/2,8 > f/5,6 = d$)

La diffraction dégrade plus la résolution pour $N=5,6$ ($d \downarrow$) que pour $N=2,8$ ($d \uparrow$)



LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION



L'optique sépare les images de 2 objets distants de $x > LMH = f \cdot \theta_{\min}$
 $LMH = R = \text{pouvoir séparateur} = \text{résolution}$

$$\sin \alpha \approx \text{tg} \alpha = \frac{\frac{d}{2}}{f} = \frac{d}{2f} \Rightarrow \frac{f}{d} \approx \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

$$f \cdot \theta_{\min} = \frac{1,22 \cdot \lambda \cdot f}{d} \approx \frac{0,61 \cdot \lambda}{\sin \alpha}$$

Pouvoir séparateur d'un instrument d'optique:

$$R = 1,22 \cdot \lambda \cdot \frac{f}{d} = \frac{0,61 \cdot \lambda}{\sin \alpha}$$

ou $\frac{0,61 \cdot \lambda}{n \cdot \sin \alpha}$ si le milieu image est d'indice n
 (il suffit de remplacer la distance f par n.f)



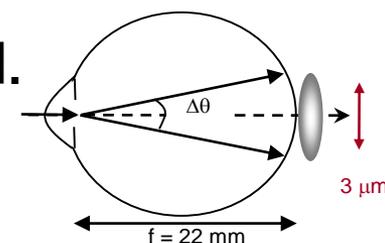
LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION

Résolution angulaire = $1,22 \cdot \lambda/d = \theta_{\min}$

Résolution spatiale = $1,22 \cdot \lambda f/d = 0,61 \cdot \lambda/(n \cdot \sin \alpha)$

- **Pupille** $d = 5 \text{ mm}$, $\lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \theta_{\min} = 0.1 \text{ mrad}$.

$$R = f \cdot \theta_{\min} = 22 \cdot 10^{-3} \cdot \theta_{\min} = 3 \text{ } \mu\text{m}$$



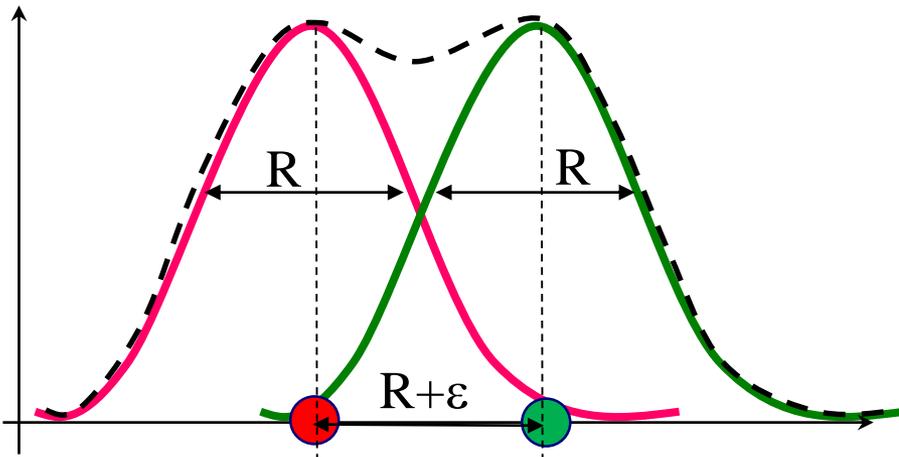
- **Microscope** $d = 1 \text{ cm}$, $\lambda = 500 \text{ nm}$, $n \cdot \sin \alpha = 1,5$
 $\theta_{\min} = 61 \text{ } \mu\text{rad}$ et $R = 0,2 \text{ } \mu\text{m}$

- Intérêt des optiques de **grand diamètre** (téléscopes)
- intérêt des **faibles λ** (rayons X ou γ , ...)
- Intérêt d'un milieu de **n élevé** entre la lame et le microscope

RESOLUTION ET NUMERISATION

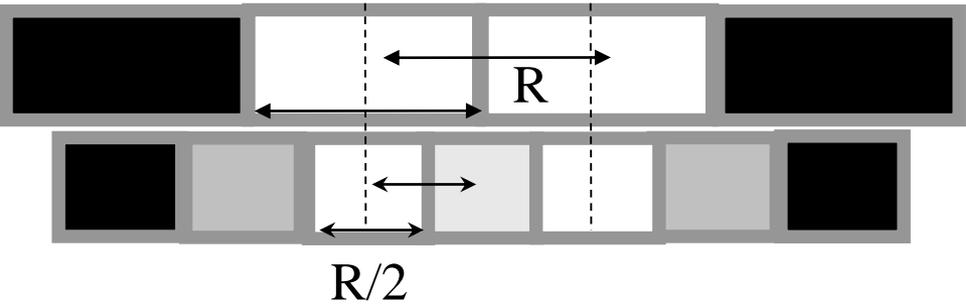


$$R = f \cdot \theta_{\min}$$



Théorème d'échantillonnage de Shannon:

Numérisation sans perte d'information
 \Updownarrow
 Dimension du pixel = $R/2$



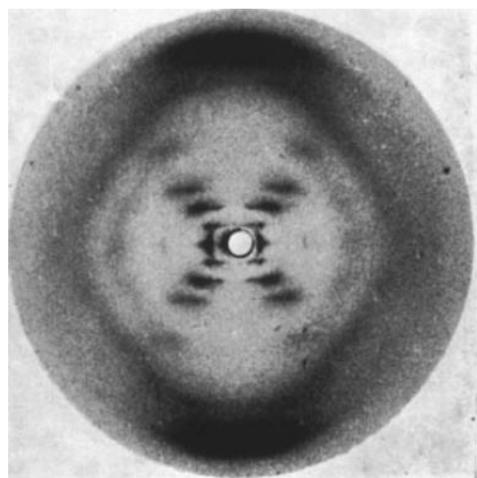
Exemple: calcul du diamètre optimal des cônes de la rétine: $3/2 = 1,5 \mu\text{m}$

Données histologiques :
Bâtonnets : $2 \mu\text{m}$; Cônes : $1 \text{ à } 3 \mu\text{m}$



INTERET LIE A LA DIFFRACTION

- Holographie
- **Détermination des structures moléculaires**
 - $\sin \theta \approx \lambda/d$ donne l'ordre de grandeur de d
 - La symétrie de la figure de diffraction reflète celle de l'objet diffractant
 - **Rayons X : $\lambda \approx \text{Å}$, adaptés à sonder les structures moléculaires**
 - L'analyse de Fourier des figures de diffraction générées par des molécules biologiques cristallisées permet d'en déduire la structure



« photographie 51 »
RE Franklin & R Gosling.
Nature. 171,740-741. 1953



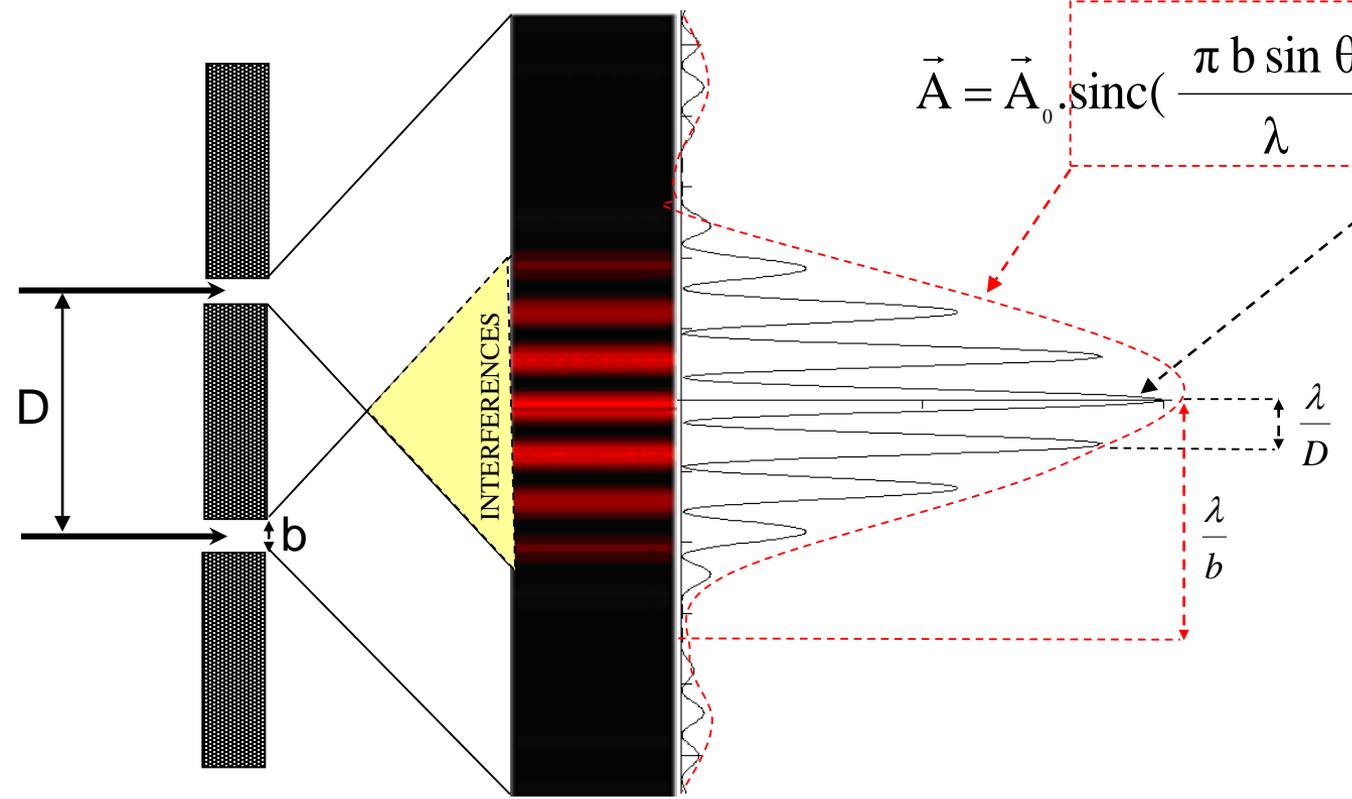
A structure of DNA
JD Watson & FHC Crick.
Nature. 171, 737-738. 1953
(parmi 5 articles)

EXEMPLE DES FENTES D'YOUNG

On associe diffraction, sommation des rayons diffractés et interférences de ceux issus de chacun des deux trous

Le calcul pour cet exemple donne :

$$\vec{A} = \vec{A}_0 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda}\right)$$



OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 3

- **Savoir :**
 - Définir des ondes cohérentes, interférence, diffraction.
 - Évaluer si des interférences sont possibles
 - Calculer un déphasage et une interférence dans des cas simples.
 - Manipuler la relation $\sin \theta_{\min} = N \cdot \lambda / b$
 - en déduire les caractéristiques de résolution angulaire des instruments optiques et les conditions de numérisation.

PLAN DU COURS (II)

ASPECT ONDULATOIRE DE LA LUMIERE

ONDE PROGRESSIVE, EM, PROPAGATION

ASPECT CORPUSCULAIRE DE LA LUMIERE

1. APPROCHE EXPERIMENTALE

- RADIOMETRE, EFFET PHOTOELECTRIQUE

2. DUALITE ONDE-CORPUSCULE

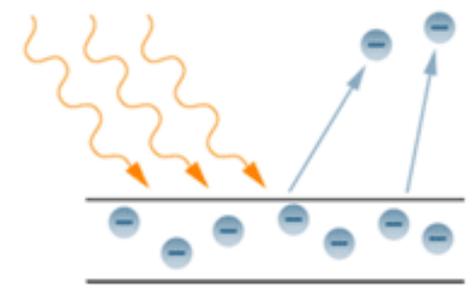
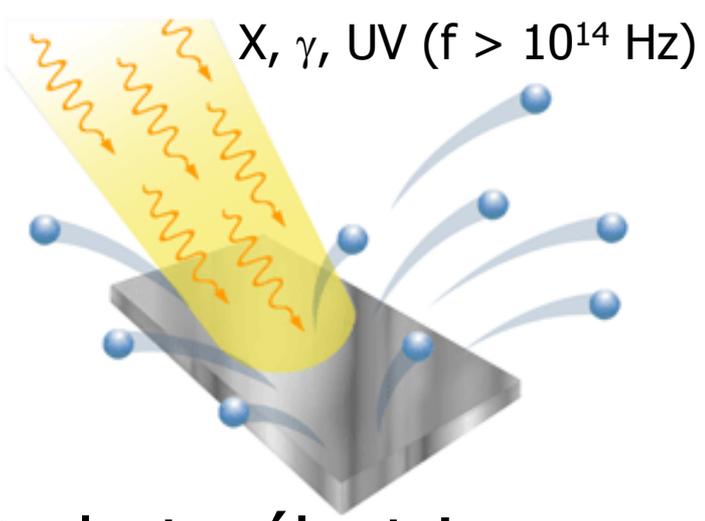
- RELATION DE LOUIS DE BROGLIE
- LE PHOTON: ENERGIE ET CARACTERISTIQUES
- RELATIONS D'INCERTITUDES
- EQUATION DE SCHRODINGER

ATOME DANS LE MODELE STANDARD

APPROCHE EXPERIMENTALE



↪ Pression de radiation: lumière \Rightarrow chocs de particules ?

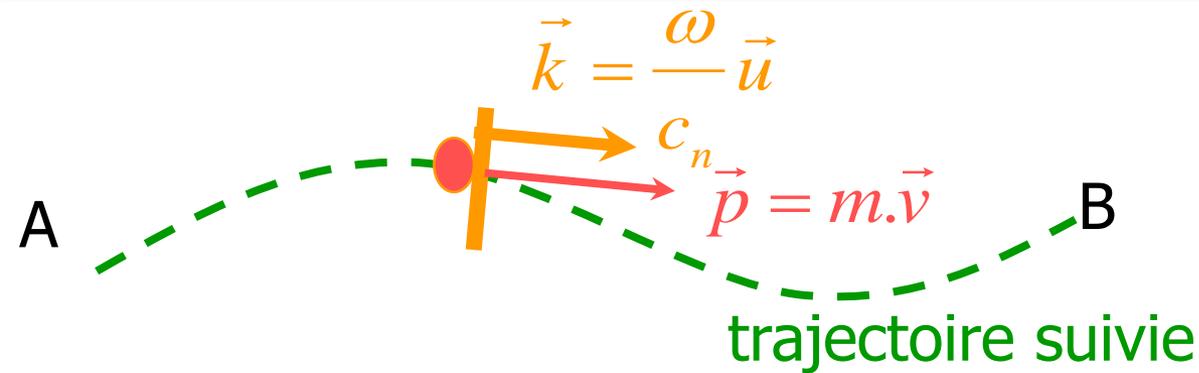


1905: effet photo-électrique seulement avec UV, X ou γ

↪ Lumière = Particules dont l'énergie dépend de f ?



DUALITE ONDE-CORPUSCULE



Problème : modéliser ensemble les deux caractéristiques de la lumière :

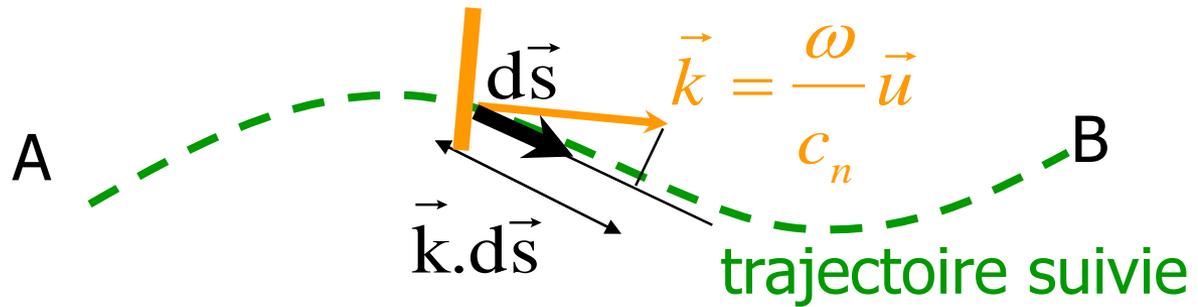
- ondulatoires : réflexion, réfraction, diffraction, interférences...
- corpusculaires : chocs, effet photo-électrique, effet Compton...

Idée : Modéliser via le principe de moindre action et l'analogie entre :

- ondulatoire : surface d'onde / vecteur d'onde \vec{k}
- corpusculaire : masse / quantité de mouvement \vec{p}

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

Aspect ondulatoire: principe de Fermat (1657)



1601-1665

$$C = \int_A^B n \cdot ds \quad \text{chemin optique minimal}$$

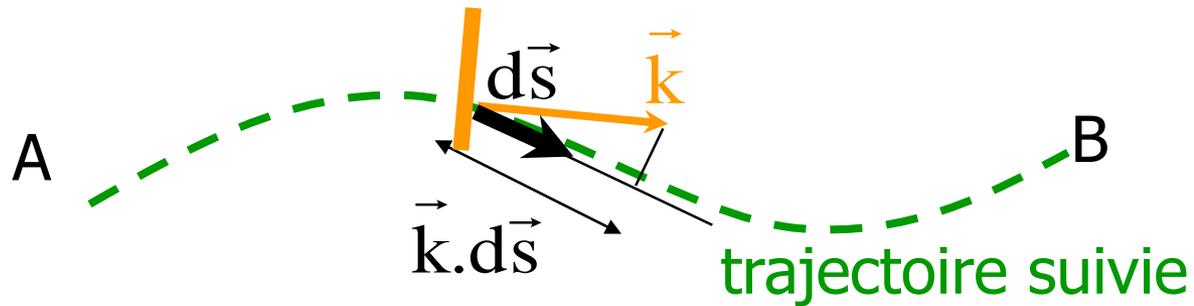
$$C = \int_A^B n \cdot ds = \int_A^B \frac{c}{c_n} \cdot ds = \int_A^B \frac{c}{c_n} \frac{\omega}{\omega} \cdot ds = \frac{c}{\omega} \int_A^B \frac{\omega}{c_n} \cdot ds = \frac{c}{\omega} \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{s}$$

car $n = \frac{c}{c_n}$



PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

Aspect ondulatoire: principe de Fermat (1657)



$$A = \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{s}$$

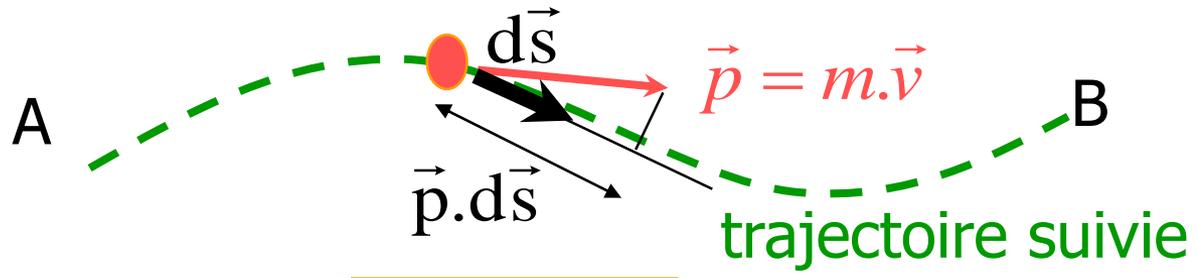
minimale



1601-1665

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

Aspect corpusculaire: principe de Maupertuis (1744)



$$A = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{s} \quad \text{minimale}$$

Remarque :

$$E_c \text{ constant} \Rightarrow \int_A^B p \cdot ds = \int_A^B m \cdot v \cdot ds = \int_A^B m \cdot v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_A^B m \cdot v^2 \cdot dt = 2 \cdot E_c \int_A^B dt = 2 \cdot E_c (t_B - t_A)$$



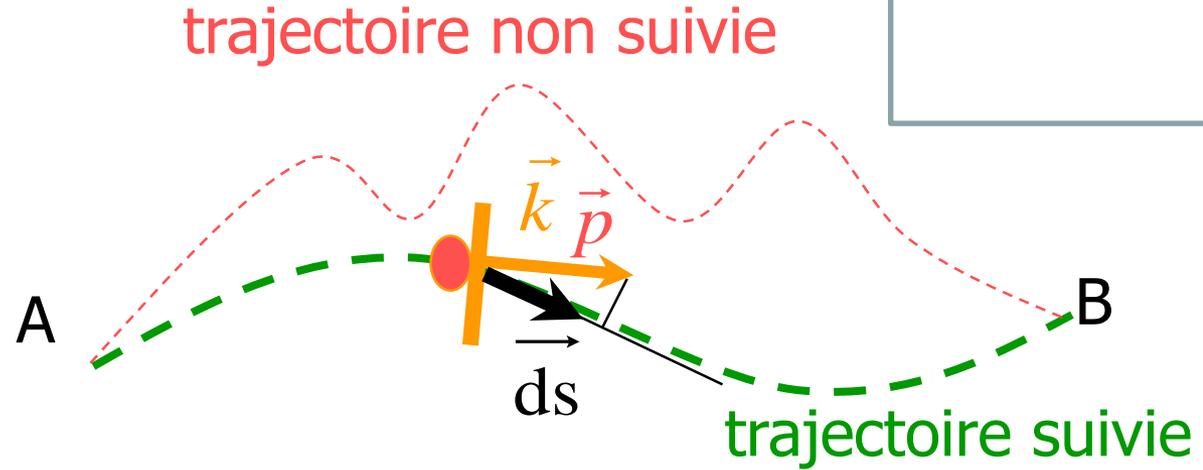
1698-1769



PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

$$A = \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{s}$$

$$A' = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{s}$$

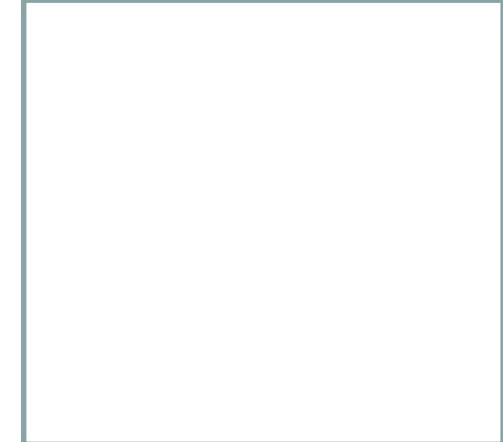


Description ondulatoire et corpusculaire de la lumière
 $\Rightarrow A$ et A' minimaux ensembles

Il suffit d'avoir \vec{p} et \vec{k} proportionnels :

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$$

RELATION DE LOUIS DE BROGLIE



$$p = \hbar.k \Rightarrow p = \hbar.\frac{\omega}{c_n} = \hbar.\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Constante de Planck

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\hbar = h/2\pi$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Longueur
d'onde (m)

ONDE



quantité de mouvement
de la particule (kg.m.s⁻¹)

PARTICULE



1892-1987

APPLICATION NUMERIQUE

- Sujet de 70 kg se déplaçant à 10 km/h

$$\lambda = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{70 \cdot 10000 / 3600} = 3,4 \cdot 10^{-36} \text{ m} \ll 10^{-18} \text{ m (électron)}$$

- Électron accéléré sous 100 V

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot V \Rightarrow m^2 \cdot v^2 = 2m \cdot e \cdot V \Rightarrow p = m \cdot v = \sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V} = 5,4 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{5,4 \cdot 10^{-24}} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx \text{dimensions atomiques}$$

Donc : comportement ondulatoire (diffraction) des électrons

Les électrons $\Rightarrow \uparrow$ résolution des microscopes ($\propto \lambda \downarrow / d$)

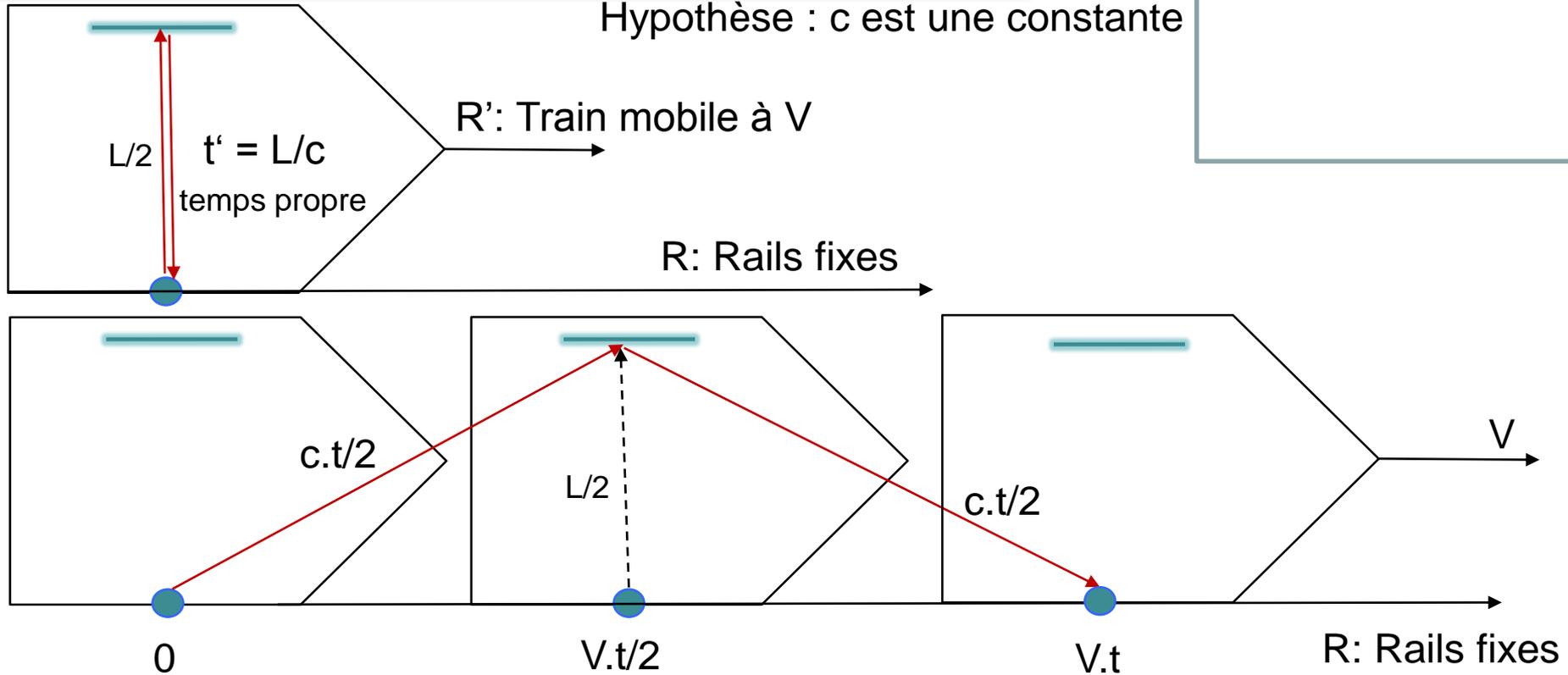
mais ce comportement ne peut pas se manifester pour un humain ...

3 CONSEQUENCES DE LA DUALITE O.C

- Relation du quantum d'Einstein
 - Que signifie $\lambda=h/p$ dans le cas d'un photon ($m=0$ mais $p\neq 0$) ?
- Relations d'incertitudes d'Heisenberg
 - Où comment le hasard entre en jeu du fait de la dualité onde-corpuscule
- Quantification des grandeurs physiques
 - Où l'on renonce à la continuité des grandeurs physiques

RELATIVITE RESTREINTE

Hypothèse : c est une constante



$$\left(\frac{c.t}{2}\right)^2 = \left(\frac{V.t}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow t^2 \cdot (c^2 - V^2) = L^2 = c^2 \cdot t'^2 \Rightarrow t^2 = \frac{c^2 \cdot t'^2}{c^2 - V^2} = \frac{t'^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \cdot t' \quad \text{où } \gamma \geq 1$$

Exemple: $V = 0,8 \cdot c \Rightarrow \gamma = 5/3 = 1,7$

Si vue de l'intérieur du train, l'horloge bat toutes les ns ($L/c=10^{-9}$ s), alors elle bat 70% plus lentement, toutes les 1,7 ns, vue du sol.



IMPULSION & ENERGIE EN RELATIVITE

$$p = m \frac{dr}{dt'} = m \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dt'} = m \frac{dr}{dt} \gamma \Rightarrow p = \gamma.m.v \quad \text{où} \quad \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma$$

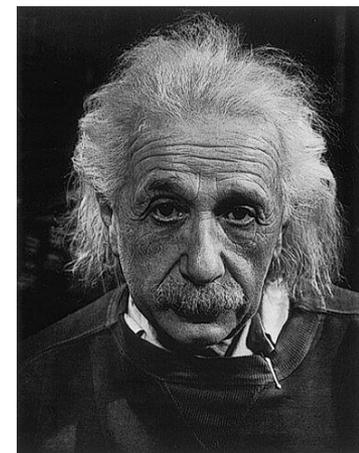
En particulier, $V = c \Rightarrow m = 0$

de plus, comme $(1 - \varepsilon)^n \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} (1 - n.\varepsilon)$

$$\gamma.mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = mc^2 \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \stackrel{V \ll c}{\approx} mc^2 \cdot \left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mV^2 = E$$

Donc, en généralisant :

$$E = \gamma.mc^2$$



A Einstein
1879-1955

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = m^2 c^4 (1 + \gamma^2 - 1) = m^2 c^4 \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - 1\right) = m^2 c^4 \left(1 + \frac{\frac{V^2}{c^2}}{1 - \frac{V^2}{c^2}}\right) = m^2 c^4 \left(1 + \gamma^2 \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + m^2 c^2 \gamma^2 V^2 \Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

En particulier,

$$m = 0 \Rightarrow E = p.c$$

RELATION DU QUANTUM

On peut alors appliquer la relation de L de Broglie à une particule associée à une onde électromagnétique, appelée **PHOTON** :

$$v = c \Rightarrow m = 0 \quad \text{car} \quad p = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cdot v$$

$$E = p \cdot c \Rightarrow E = \frac{h}{\lambda} c$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hf = \hbar \cdot \omega \quad \hbar \stackrel{DEF}{=} \frac{h}{2\pi}$$

E : énergie du photon

ω , f et λ : pulsation, fréquence et longueur de l'OEM associée

c: célérité des OEM dans le vide; h: constante de Planck

RELATION DU QUANTUM

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hf = \hbar \cdot \omega \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

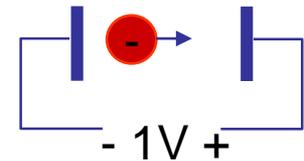
Électron-volt = énergie acquise
par un électron accéléré sous 1 V :

$$E = q \cdot V \quad \text{où} \quad q=e \quad \text{et} \quad V=1$$

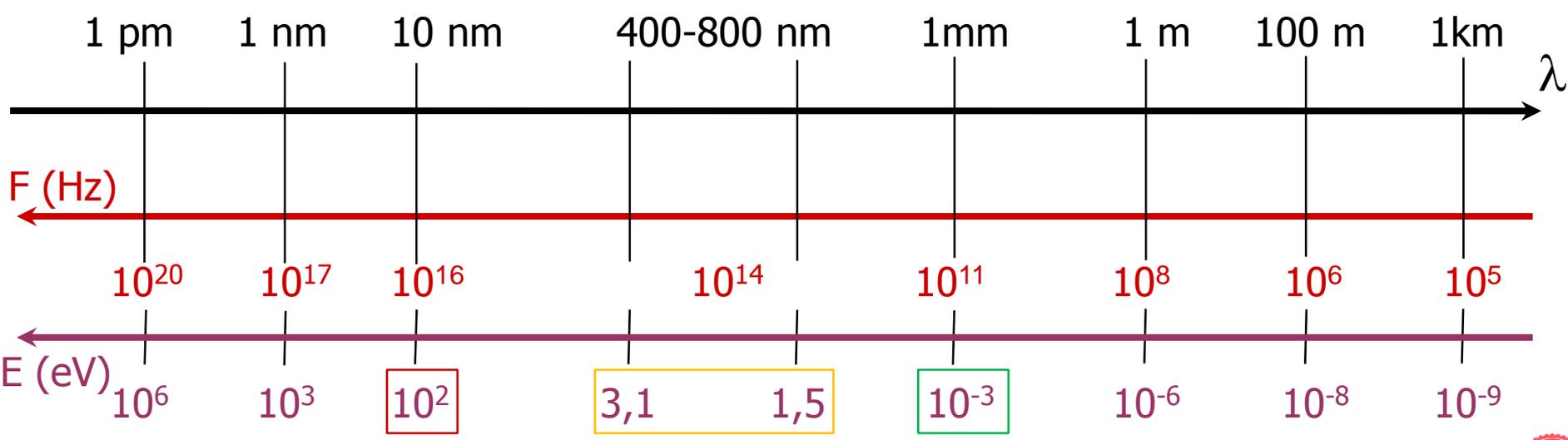
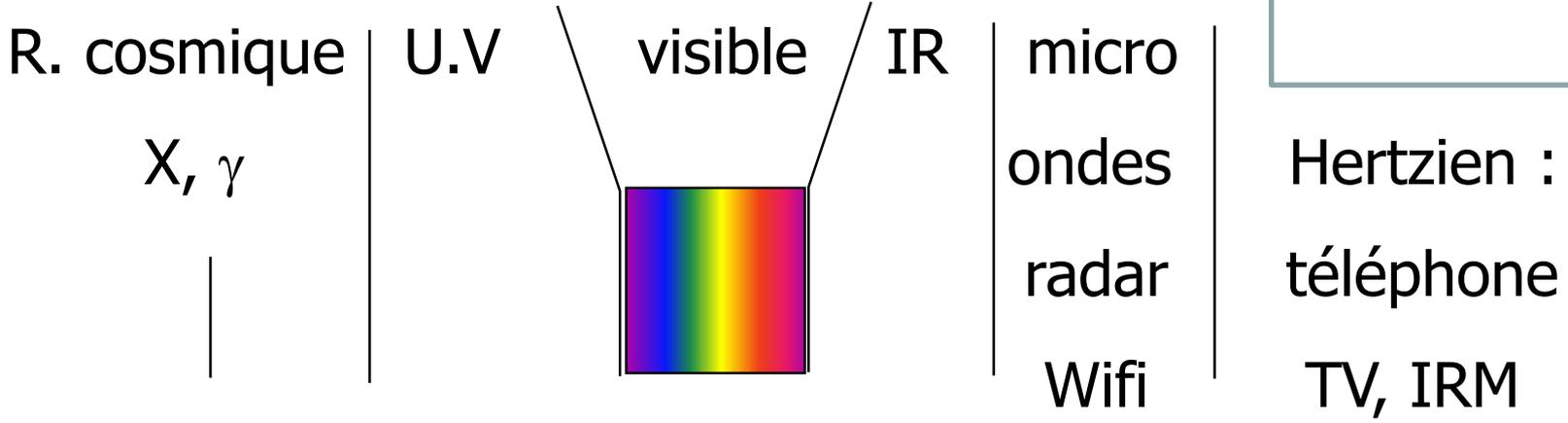
$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E(\text{eV}) = \frac{h \cdot c}{e \cdot \lambda(\text{nm}) \cdot 10^{-9}} \Rightarrow E(\text{eV}) = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \lambda(\text{nm}) \cdot 10^{-9}}$$

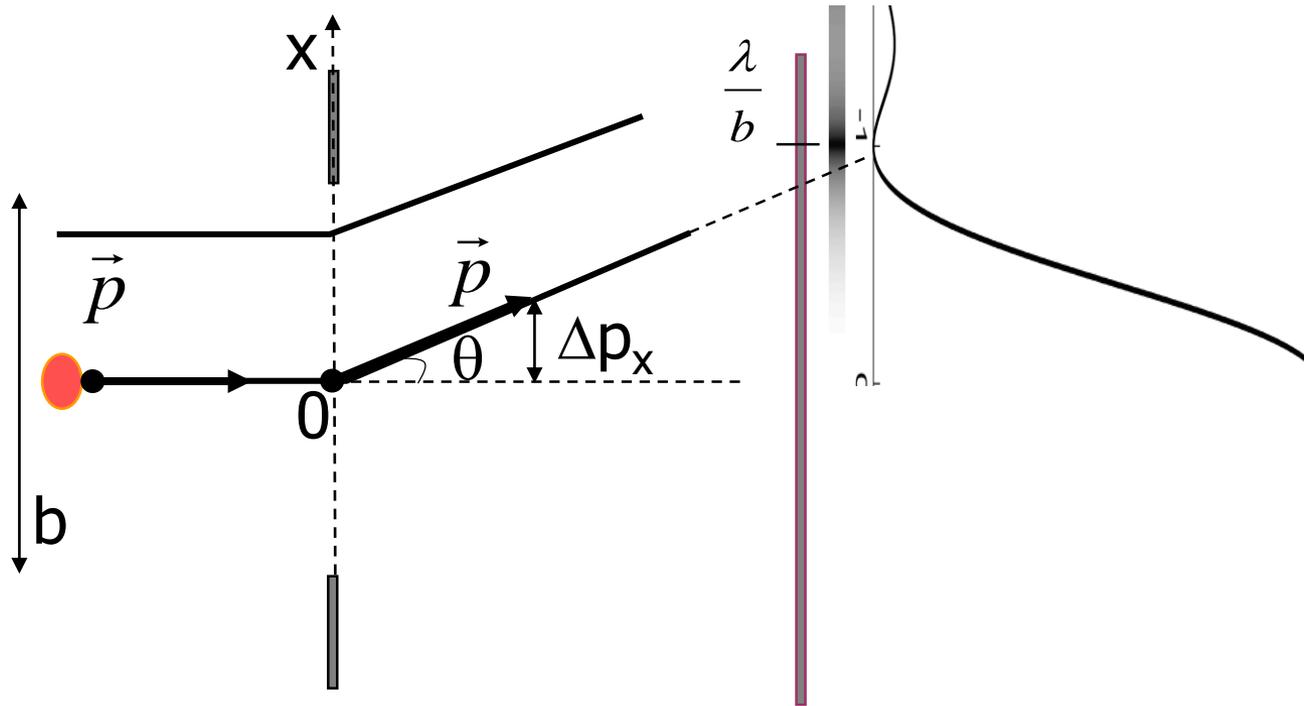
$$E(\text{eV}) = \frac{1240}{\lambda(\text{nm})}$$



CLASSIFICATION SIMPLIFIEE



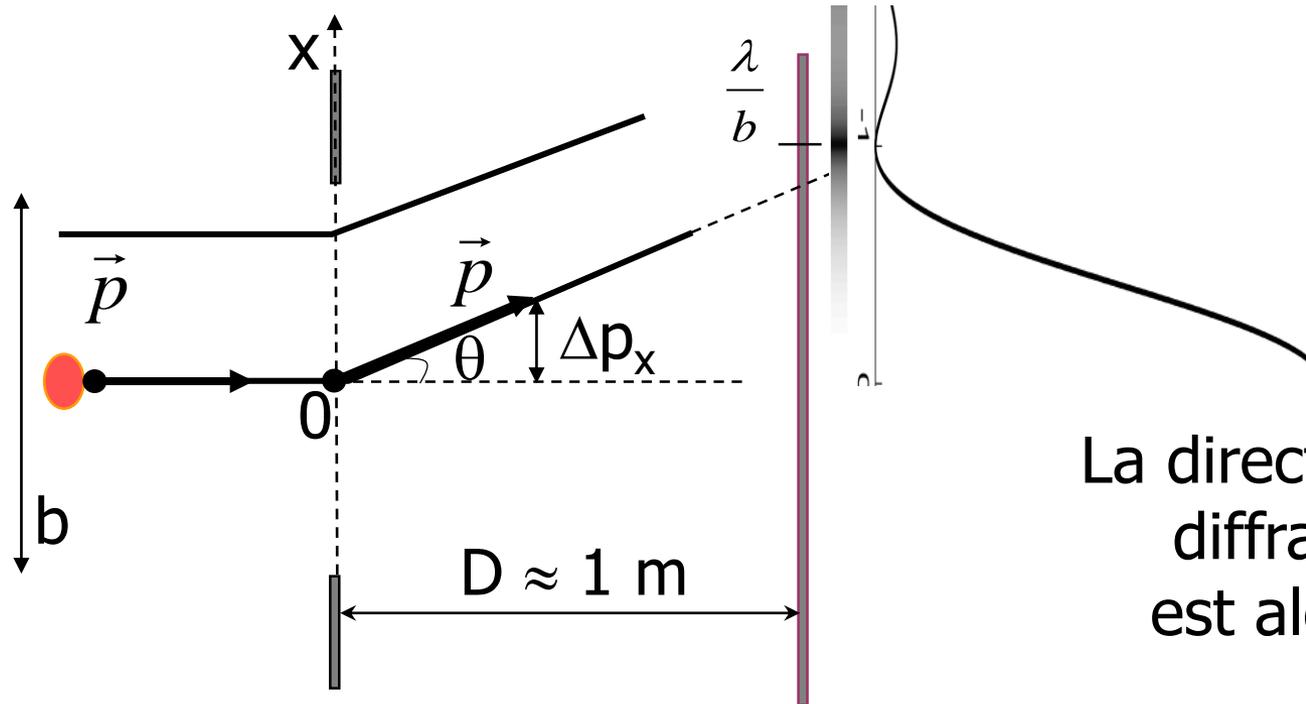
RETOUR SUR LA DIFFRACTION



La **même figure d'interférences** est enregistrée sur une plaque photographique lorsque les photons sont **émis un par un**

Interprétation ?

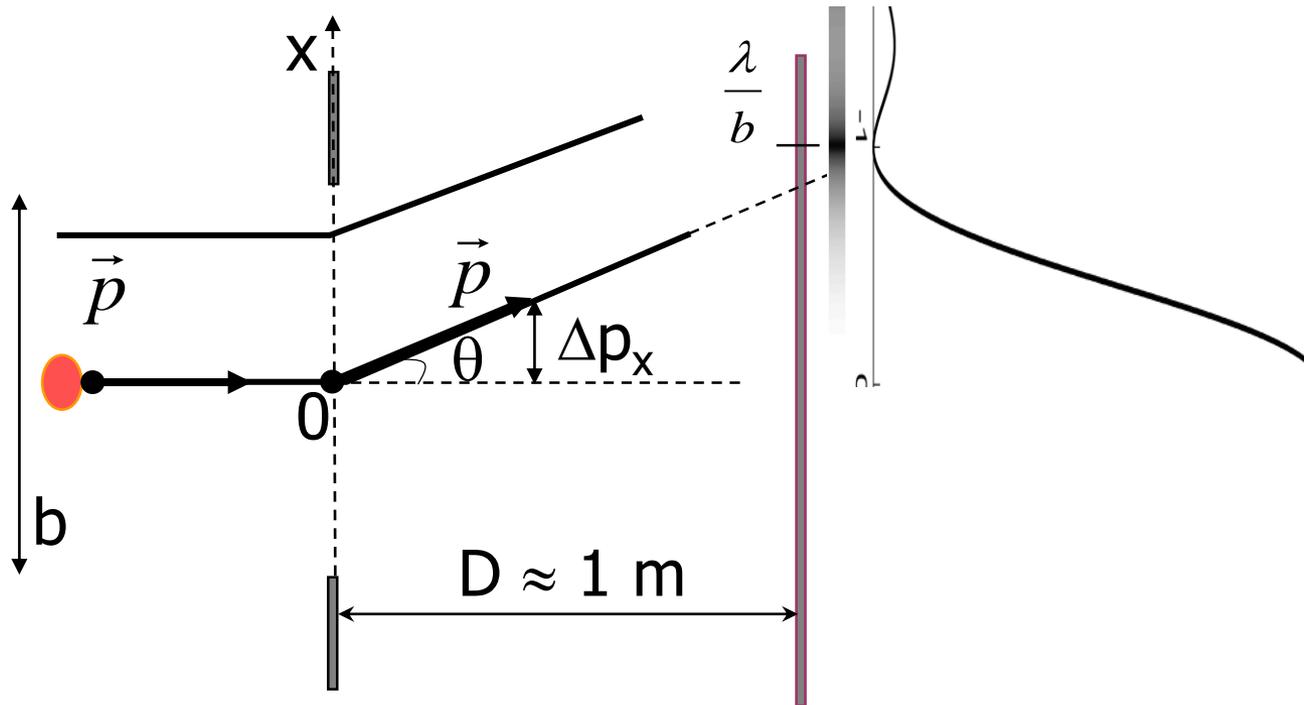
RETOUR SUR LA DIFFRACTION



La direction de la diffraction est aléatoire

Incertitude sur la position du photon : $\Delta x = b$

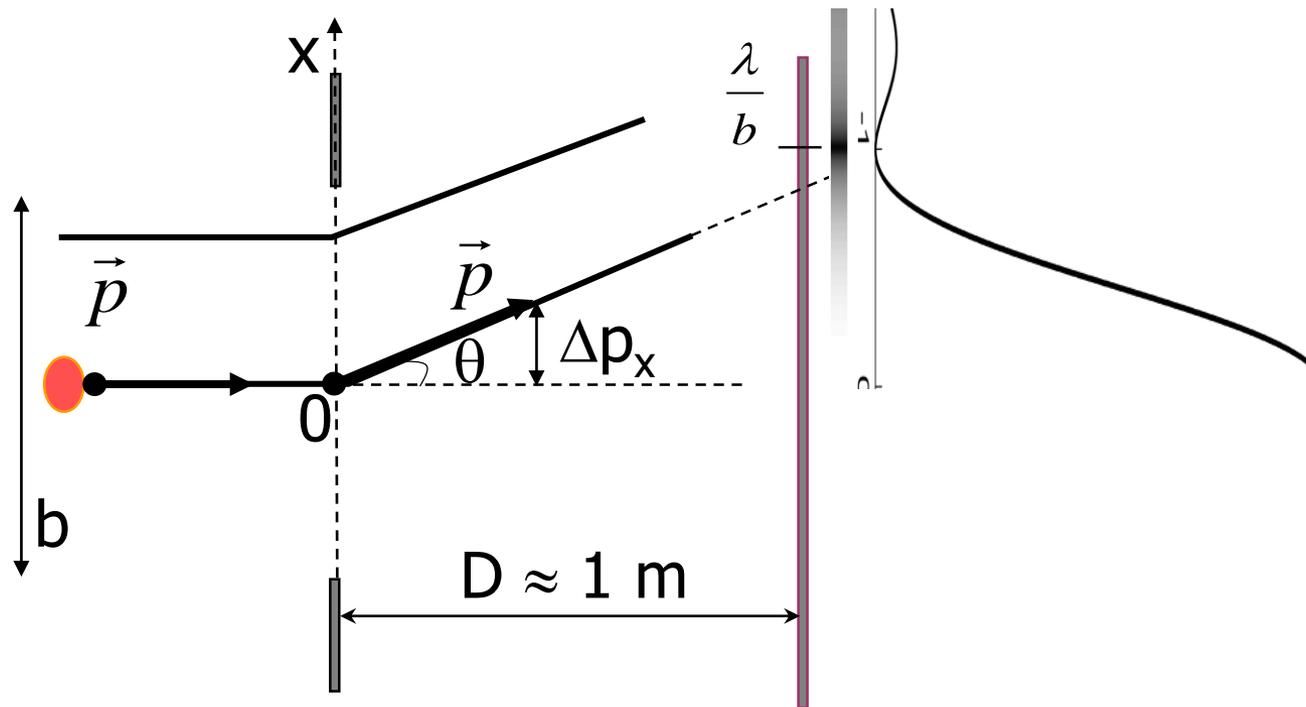
RETOUR SUR LA DIFFRACTION



Incertitude sur la position du photon : $\Delta x = b$

Incertitude sur l'impulsion du photon : $\Delta p_x = p \cdot \sin \theta$

RETOUR SUR LA DIFFRACTION



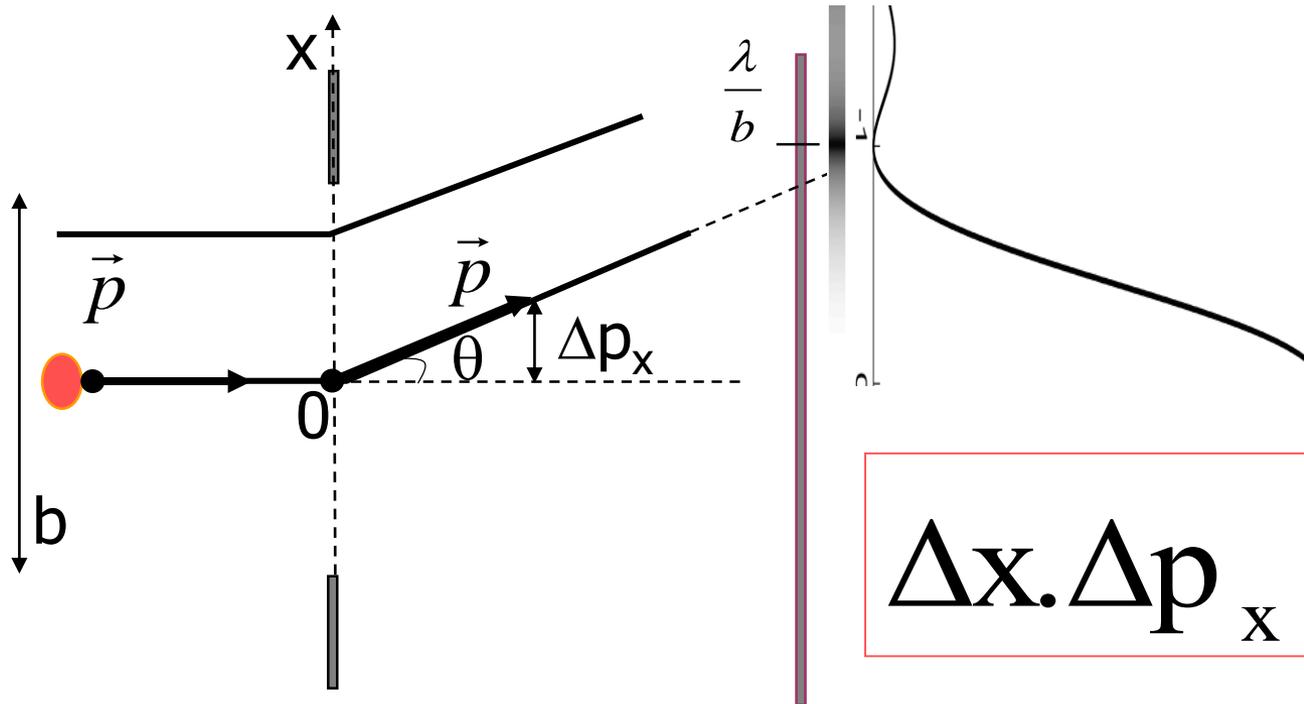
Incertitude sur la position du photon : $\Delta x = b$

Incertitude sur l'impulsion du photon : $\Delta p_x = p \cdot \sin \theta$

si θ petit et $D \approx 1\text{m}$, alors $p \cdot \sin \theta \approx p \cdot \theta \approx p \cdot \lambda/b$

Alors $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx b \cdot p \cdot \lambda/b = p \cdot \lambda = h (\approx h/2\pi)$

RETOUR SUR LA DIFFRACTION



$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \neq 0$$

L'incertitude sur la direction de diffraction de l'OEM se retrouve dans l'impossibilité de connaître avec une absolue précision à la fois la position et l'impulsion du photon

RELATIONS D'INCERTITUDE D'HEISENBERG

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

ΔE : énergie échangée lors
d'une interaction de durée Δt

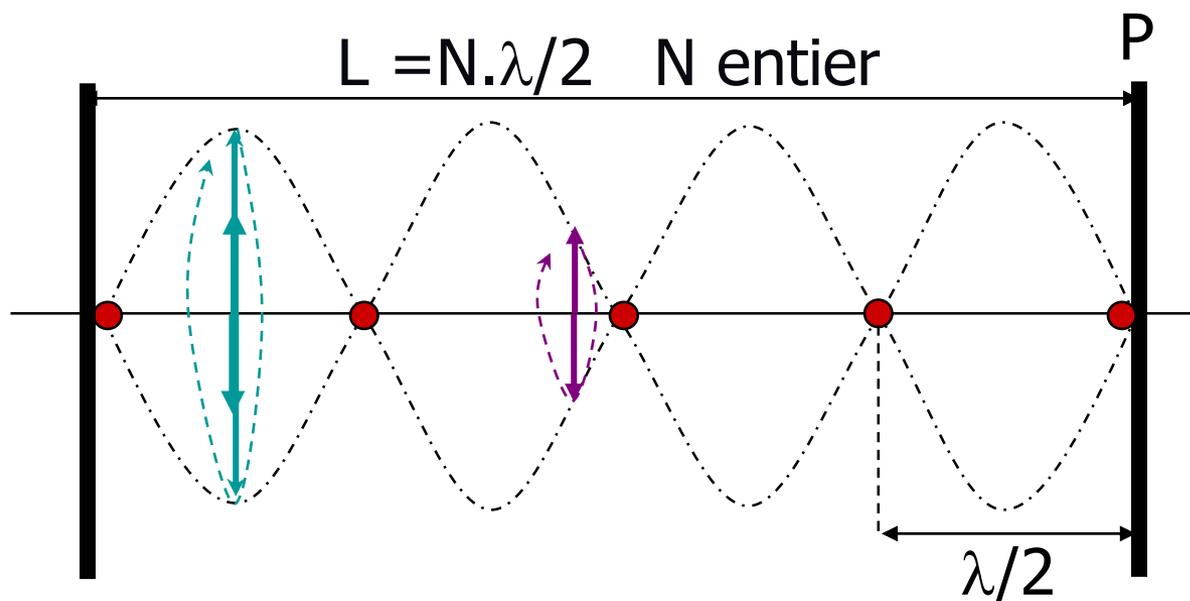


1901-1976

Pour calculer une trajectoire à partir de la relation fondamentale de la dynamique ($\Sigma f = ma$), il faut connaître exactement les positions et impulsions initiales, ce qui n'est pas le cas.

Donc, il n'y a pas de trajectoire définie à l'échelle des particules élémentaires, mais seulement des probabilités de présence p

QUANTIFICATION



Dualité Onde-particule \Rightarrow L. d'onde $\lambda = 2 \cdot L / N$ quantifiée
 \Rightarrow fréquence $f = c / \lambda = N \cdot c / (2L)$ quantifiée
 \Rightarrow Énergie = $hf = N \cdot h \cdot c / (2L)$ quantifiée

Les grandeurs physiques ne varient pas continûment, mais par multiples d'une grandeur élémentaire: elles sont quantifiées.

OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 4

- **Savoir expliquer** pourquoi une modélisation duale ondulatoire et corpusculaire entraîne :
 - $\lambda = h/p$ et $E = hc/\lambda$ pour les particules de masses nulles
 - $\Delta x \cdot \Delta p_x$ borné inférieurement et la perte du concept de trajectoire
 - La quantification des grandeurs physiques
- **Savoir manipuler** :
 - Les relations $\lambda = h/p$ et $E = hc/\lambda$
 - Et les conséquences de $E = hc/\lambda$ sur la classification des REM
- **Connaître**: les ordres de grandeur limites en énergie des photons :
 - (X, γ) : $E > 10$ -100 eV ; (visible) : $E = 1$ -3 eV; (Hertzien) : $E < 1$ meV

PLAN DU COURS (II)

ASPECT ONDULATOIRE DE LA LUMIERE

ONDE PROGRESSIVE, EM, PROPAGATION

ASPECT CORPUSCULAIRE DE LA LUMIERE

ATOME DANS LE MODELE STANDARD :

1. FERMIONS ET BOSONS
2. UNITES
3. MODELES ATOMIQUES
4. ATOME DE BOHR
5. QUANTIFICATION DES ELECTRONS ET DES NUCLEONS

LE MODELE STANDARD



BOSONS DE JAUGE (INTERACTIONS)

FERMIONS (MATIERE)

6 quarks ← → 6 leptons

u	c	t	2e/3	e	μ	τ	-e
d	s	b	-e/3	ν _e	ν _μ	ν _τ	0

+ 6 anti-quarks
+ 6 anti-leptons

paires/triplets :
HADRONS

ELECTRON

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Cb}$$

proton = (uud) $q = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot e = e$

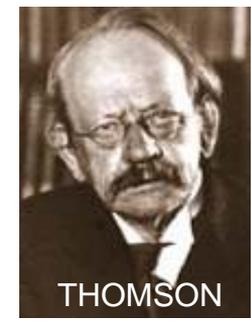
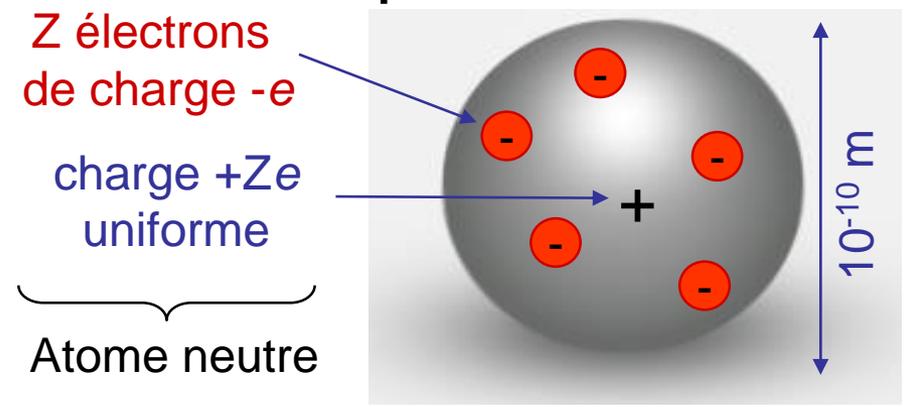
neutron = (udd) $q = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot e = 0$

INTERACTION	BOSON	CIBLE	PORTEE fm	l/l _f
FORTE	8 GLUONS	HADRON	1	1
ELECTRO-MAGNETIQUE	PHOTON	CHARGEE	∞	10 ⁻³
FAIBLE	Z ⁰ W ⁺ , W ⁻	TOUTE	10 ⁻³	10 ⁻⁵
GRAVITATION	(GRAVITON) ?	MASSIQUE	∞	10 ⁻³⁸

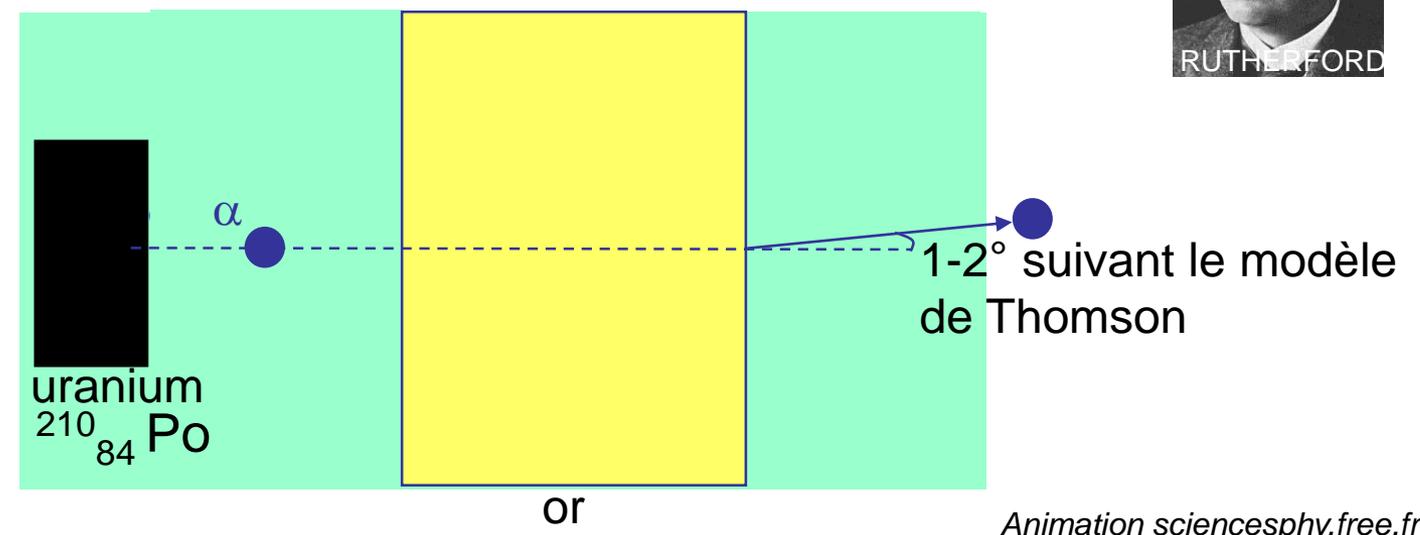
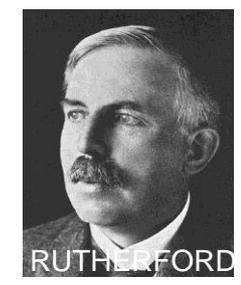


MODELES ATOMIQUES

- Modèle atomique de Thomson

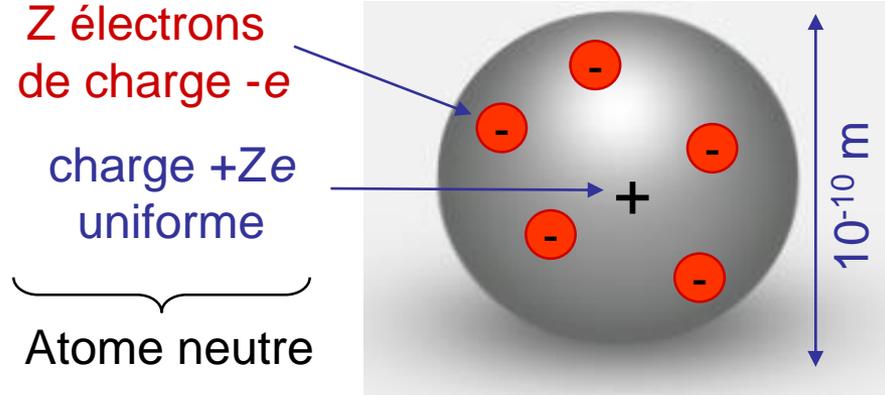


- Expérience d'E. Rutherford (1911)

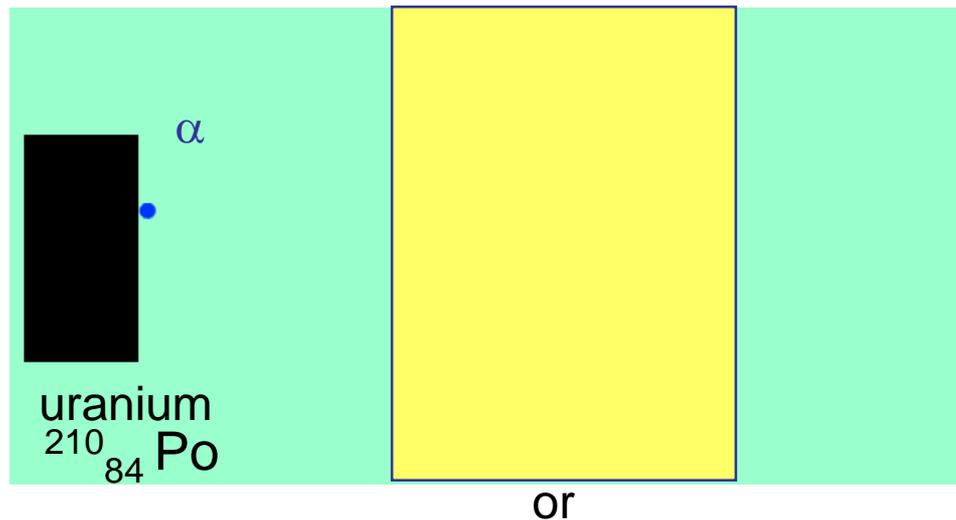


MODELES ATOMIQUES

- Modèle atomique de Thomson

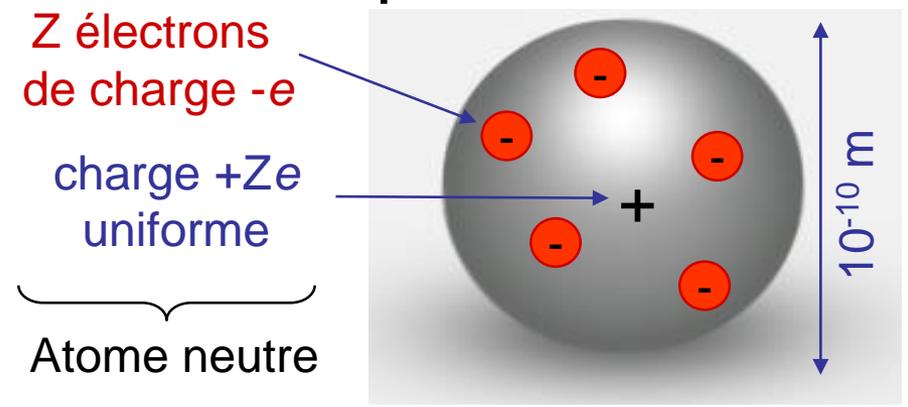


- Modèle atomique d'E. Rutherford (1911)

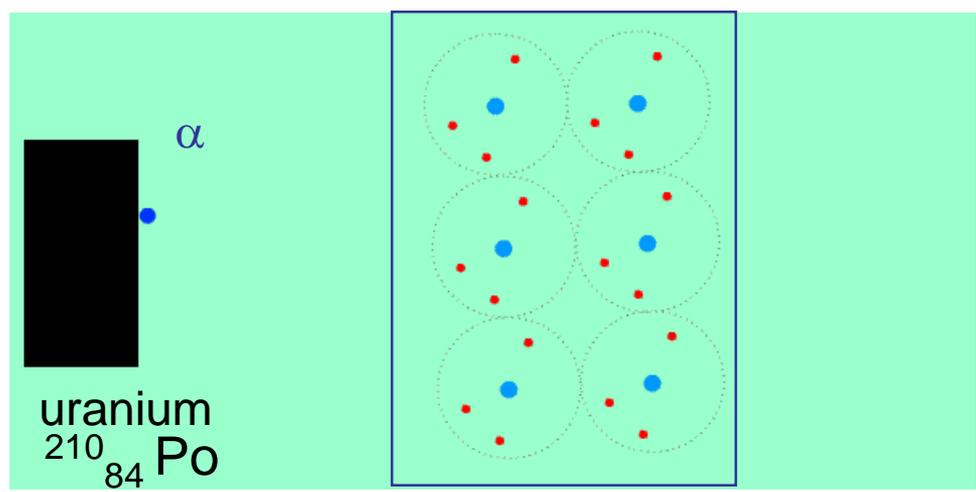


MODELES ATOMIQUES

- Modèle atomique de Thomson



- Modèle atomique d'E. Rutherford (1911)

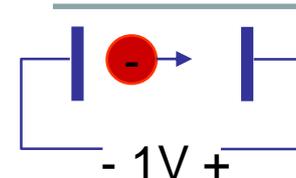


UNITES EN PHYSIQUE ATOMIQUE

- Energie : **électron-volt (eV)**

- 1 eV = énergie cinétique acquise par un électron qui passe, dans le vide, d'un point à un autre ayant un potentiel supérieur de 1 volt

- $1 \text{ eV} = e \cdot V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$



- Masse :

- **Unité de masse atomique = u**

- $1 \text{ u} = \frac{1}{12}$ masse d'un atome de carbone 12: $1 \text{ u} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

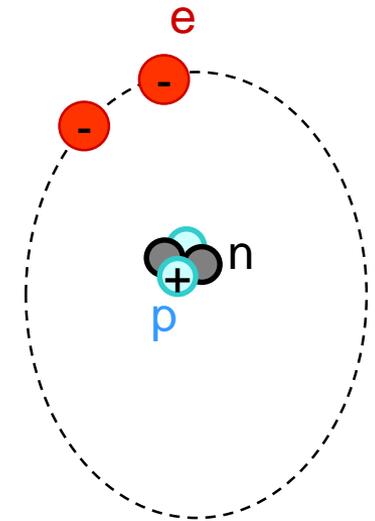
- Au repos: $E = m \cdot c^2 \Rightarrow m = E/c^2$ en **MeV** ou **MeV/c²**

$$1 \text{ u} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (299\,792\,458)^2}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 931 \text{ MeV}$$

MODELE ATOMIQUE DE RUTHERFORD

- Atome : ${}^A_Z X$
 - Z = numéro atomique = Nb d'électrons et de protons
 - A = nombre de masse = Nb de nucléons ($A=Z+N$)
 - $m_e=9,109 \cdot 10^{-31}$ kg $\ll m_p=1,673 \cdot 10^{-27}$ kg $< m_n=1,675 \cdot 10^{-27}$ kg

- **ISOTOPE** : même Z *exemple* : ${}^1_1\text{H}$ et ${}^2_1\text{H}$
- **ISOBARE** : même A *exemple* : ${}^{40}_{19}\text{K}$ et ${}^{40}_{20}\text{Ca}$
- **ISOTONE** : même N *exemple* : ${}^{26}_{12}\text{Mg}$ et ${}^{27}_{13}\text{Al}$



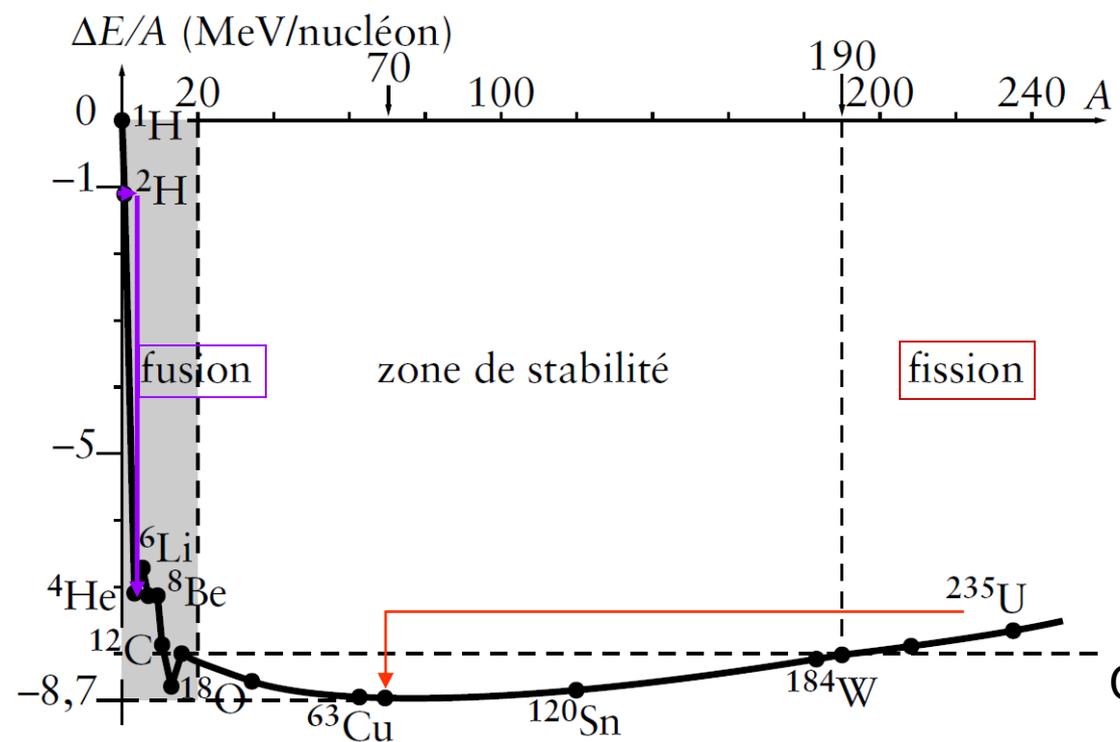
- Dimensions des nucléons $r \approx 1,4$ fm
- Dimension du noyau $R / \frac{4}{3} \pi R^3 \approx A \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow R \approx \sqrt[3]{A} \cdot r$
 - $R < 257^{1/3} \cdot 1,4 < 10$ fm \Rightarrow interaction forte dans le noyau

MODELE ATOMIQUE DE RUTHERFORD

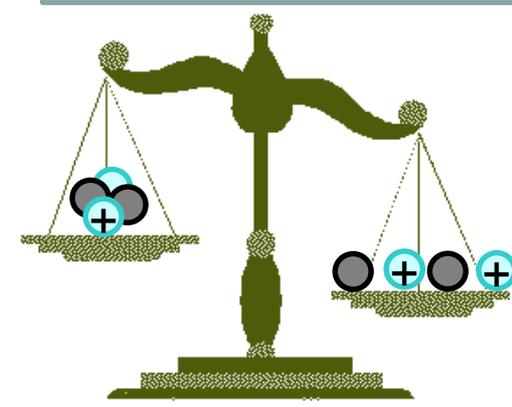
- Défaut de masse : $M({}_Z^A X) < Z.m_p + (A - Z).m_n$

Le défaut de masse correspond à une énergie de liaison nucléaire par interaction forte

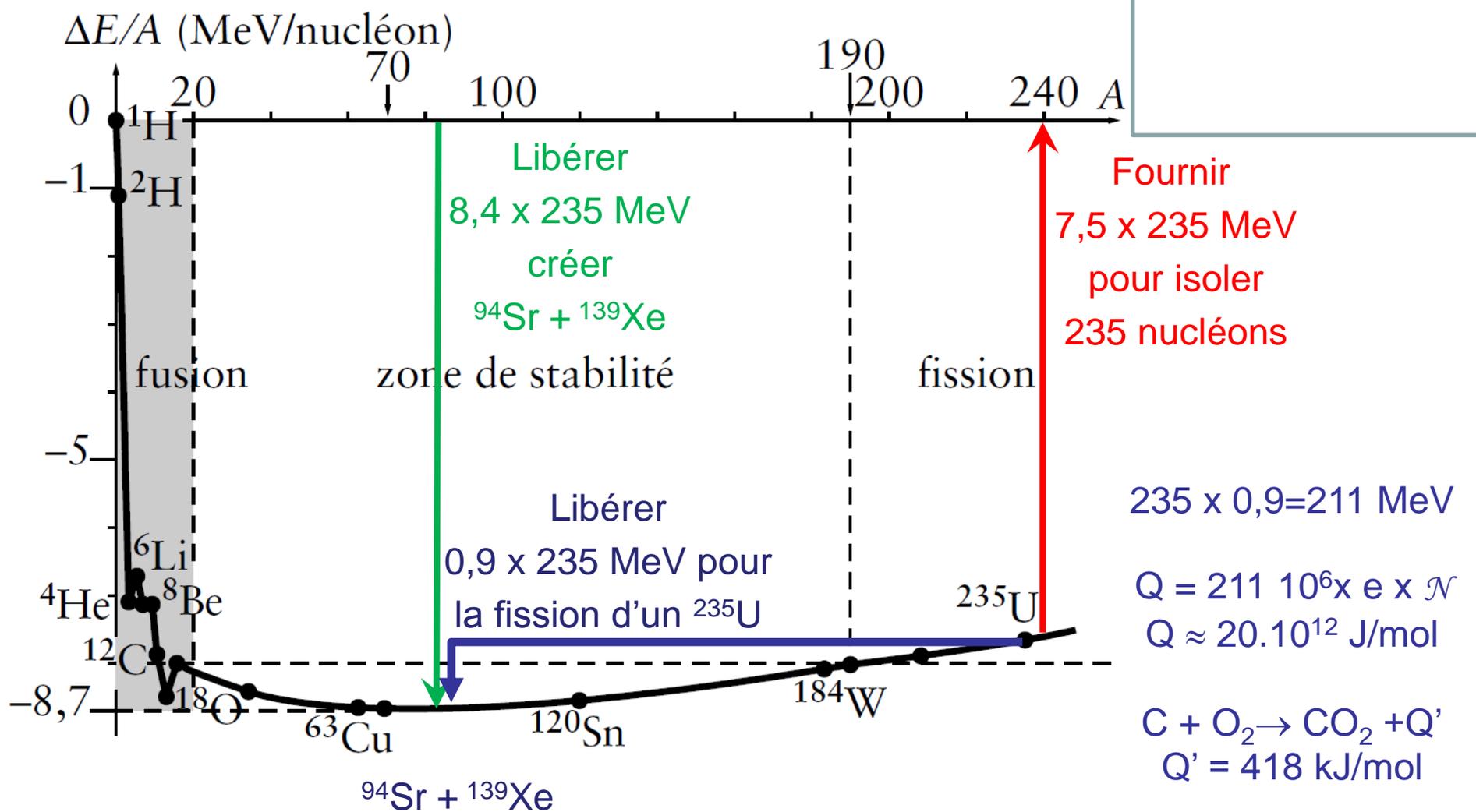
$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = Z.m_p + (A - Z).m_n - M({}_Z^A X) > 0$$



Courbe d'Aston



ENERGIES DE FISSION ET FUSION

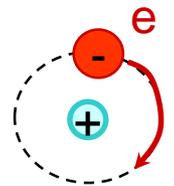


$Q/Q' = 48 \cdot 10^6$

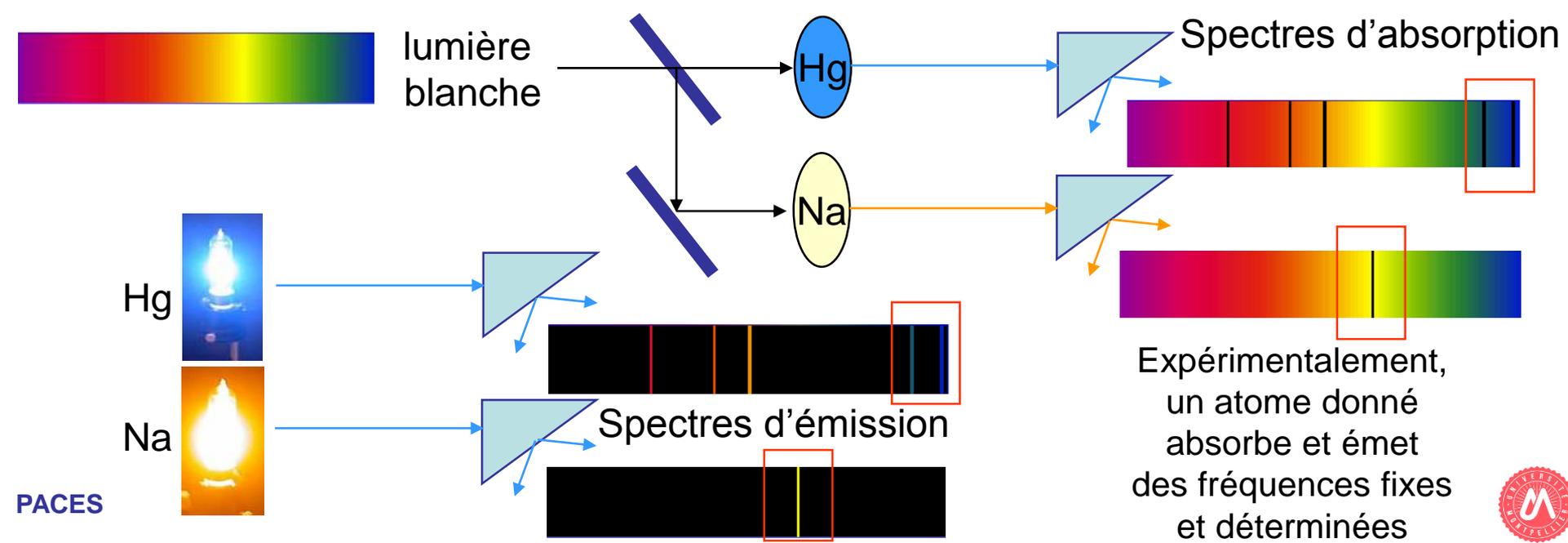


MODELE ATOMIQUE DE RUTHERFORD

- Un électron en orbite s'écraserait sur le noyau
 - mouvement accéléré (circulaire, de période T)
 - donc rayonne une onde électromagnétique $f=1/T$ (antenne)
 - donc **perd de l'énergie** et T diminue $\Rightarrow f \uparrow$



- et émettrait des fréquences continûment variables.



OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 5

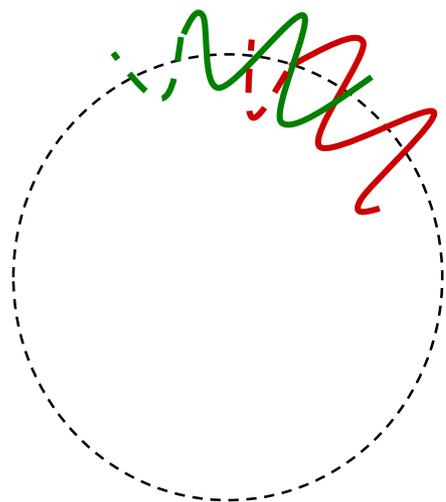
- **Savoir définir :**
 - 4 interactions + hadrons (p,n) + leptons (e, ν)
 - Le modèle de Rutherford et ses limites
 - Isotope, isotone, isobare
- **Savoir manipuler**
 - Les unités atomiques de masse et d'énergie
 - Le défaut de masse ΔM

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Dualité onde-électron \Rightarrow quantification

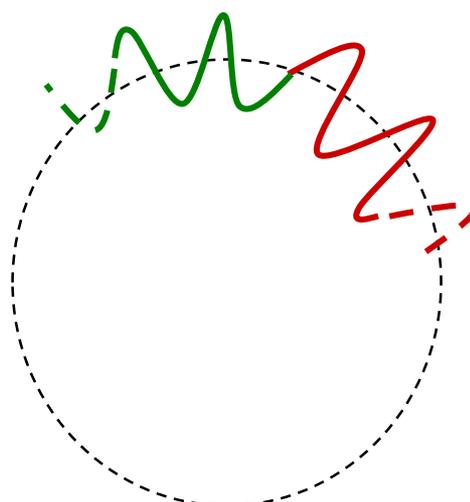
$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

- Quantification : $2\pi r = n\lambda$



$$2\pi r = k \frac{\lambda}{2}$$

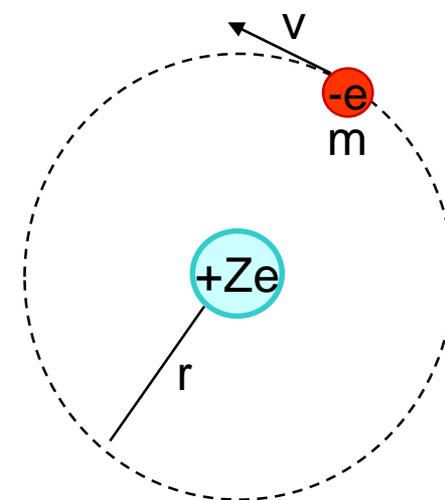
k entier impair



$$2\pi r = n\lambda$$

$k = 2.n$

hydrogénoïde : $1e^-$



MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Dualité onde-électron \Rightarrow quantification

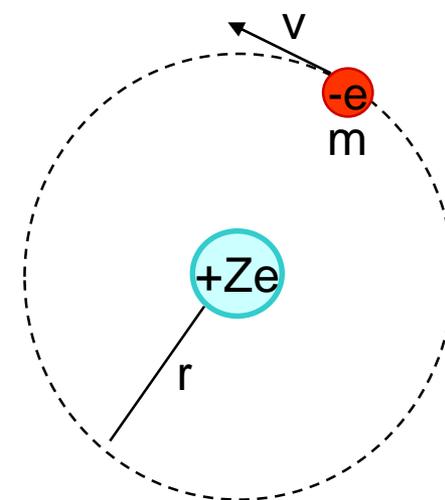
$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv} \\ 2\pi r &= n\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi r = \frac{nh}{mv}$$

- Quantification : $\Rightarrow mv r = n\hbar$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

- D'où la **quantification du M^t cinétique** de l'e⁻ :

$$\|\vec{L}\| = \|\vec{p} \wedge \vec{r}\| = mv r = n\hbar \text{ avec } n = 1, 2, \dots$$

hydrogénoïde : 1e⁻



MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Dualité onde-électron \Rightarrow quantification

- Quantification :
$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{mv} \\ 2\pi r &= n\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi r = \frac{nh}{mv}$$

$$\Rightarrow mv r = n\hbar \text{ où } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

- D'où la **quantification du M^t cinétique** de l'e⁻ :

$$\|\vec{L}\| = \|\vec{p} \wedge \vec{r}\| = mv r = n\hbar \text{ avec } n = 1, 2, \dots$$

- RFD :
$$\frac{k}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow (mv)^2 = \frac{km}{r}$$

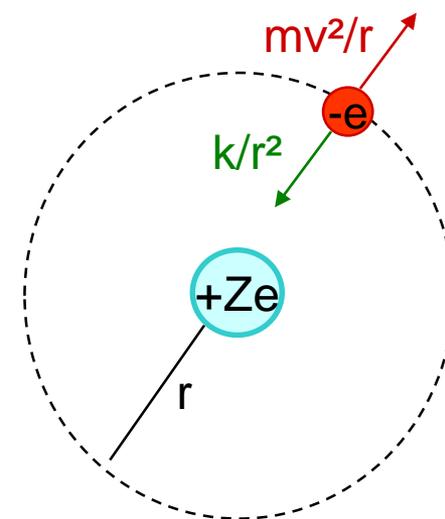
$$\text{mais } (mv)^2 = \left(\frac{n\hbar}{r}\right)^2$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = n^2 \frac{\hbar^2}{km} = n^2 \cdot r_0$$

$$r_0 = \frac{0,53}{Z} 10^{-10} m$$



hydrogénoïde : 1e⁻



$$k = \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3 \cdot 10^{-28} Z$$

quantification de rayon orbital

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Energie cinétique de l'e⁻ :

$$\left. \begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ RFD \Rightarrow (mv)^2 &= \frac{km}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_c = \frac{k}{2r}$$

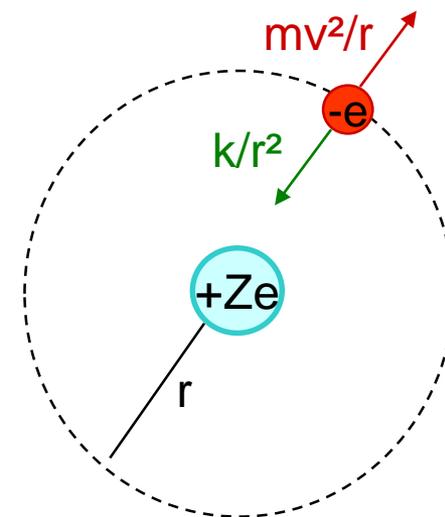
- Energie potentielle de l'e⁻ :

- En prenant $E_p(\infty)=0$

$$E_p = -eV = -\frac{k}{r}$$

$$V = \frac{Z.e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

hydrogénoïde : 1e⁻



$$k = \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3 \cdot 10^{-28} Z$$

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Energie cinétique de l'e⁻ :

$$\left. \begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ RFD \Rightarrow (mv)^2 &= \frac{km}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_c = \frac{k}{2r}$$

- Energie potentielle de l'e⁻ : $E_p = -eV = -\frac{k}{r}$

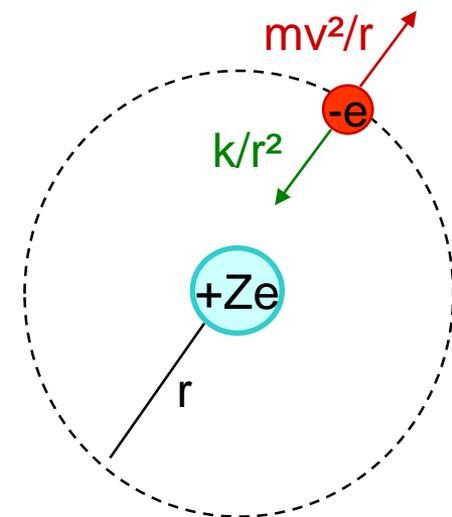
- En prenant $E_p(\infty)=0$

- Energie de l'électron : $E = E_c + E_p = -\frac{k}{2r}$

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{km} \Rightarrow E = -\frac{m}{2} \left(\frac{k}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2} \Rightarrow E = -\frac{me^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{Z^2}{n^2}$$

$$E(eV) = -13,6 \cdot \frac{Z^2}{n^2}$$

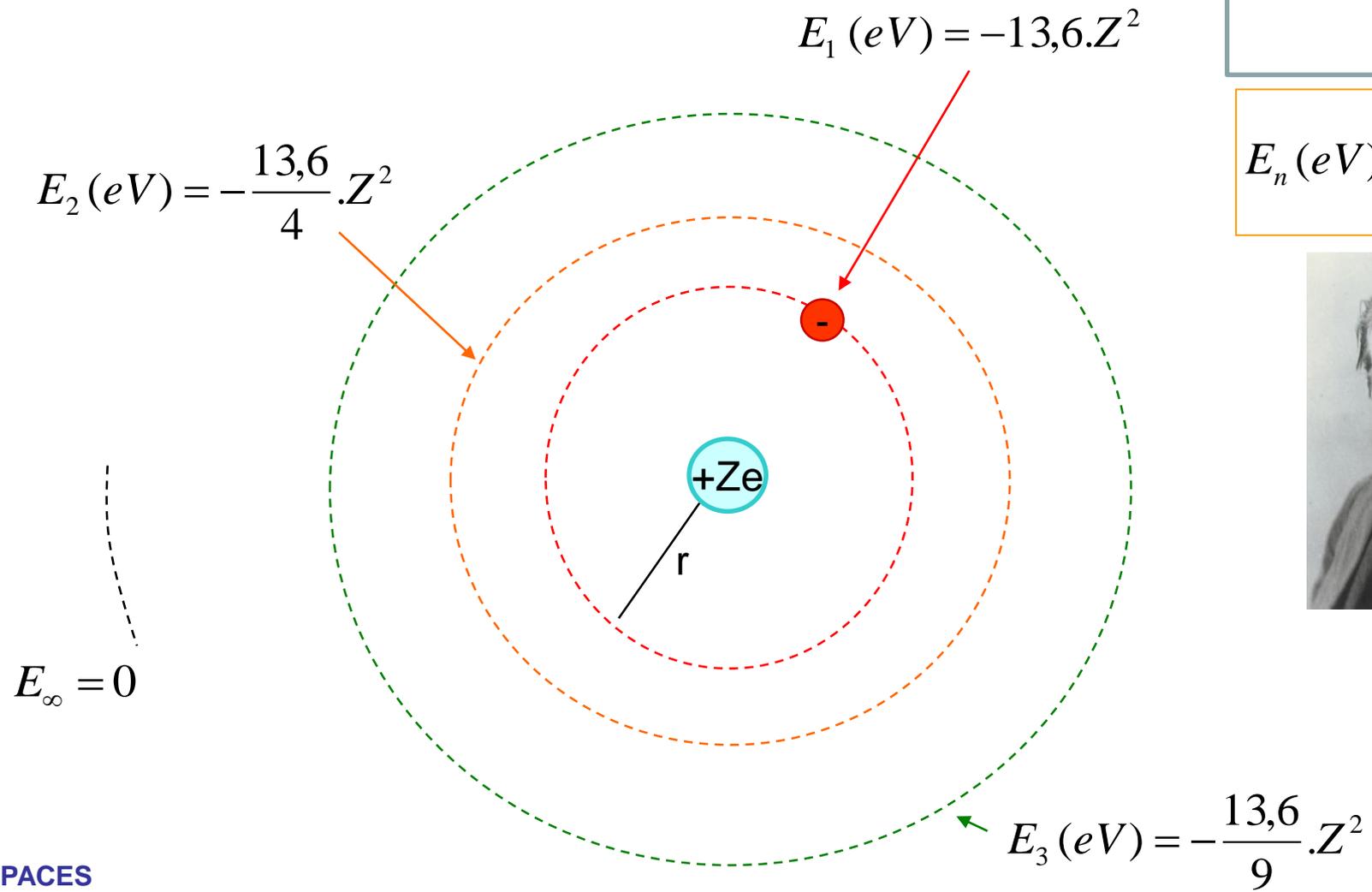
hydrogénoïde : 1e⁻



$$k = \frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3 \cdot 10^{-28} Z$$

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Pour un atome hydrogénoïde (i.e à un électron)



$$E_n (eV) = -13,6. \frac{Z^2}{n^2}$$

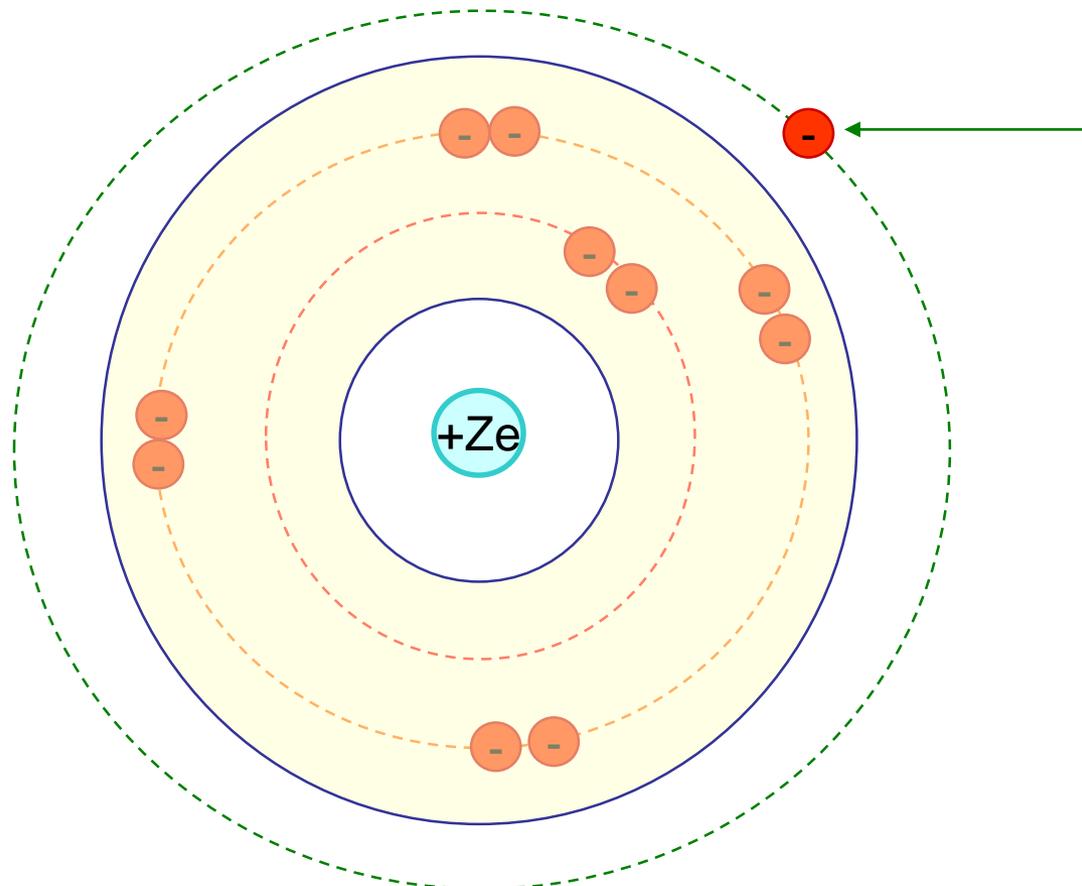


N. Bohr



MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Pour un atome à plus d'un électron ($Z > 1$)



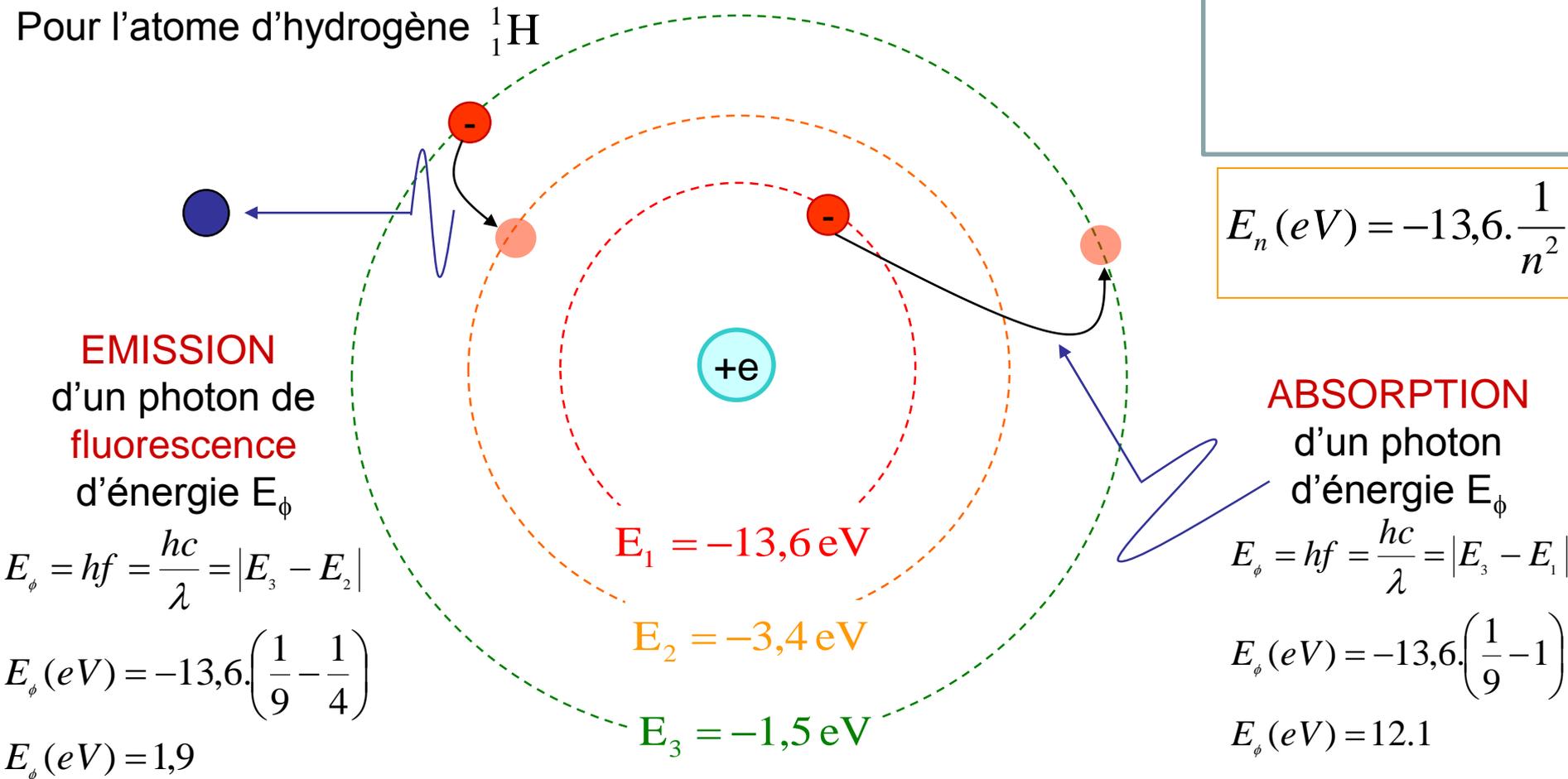
EFFET D'ÉCRAN :

la charge du noyau « vue »
par l'électron périphérique
semble diminuée de $\sigma \cdot e$

$$E_{n,\sigma} (eV) = -13,6 \cdot \frac{(Z - \sigma)^2}{n^2}$$

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Pour l'atome d'hydrogène ${}^1_1\text{H}$



$$E_n \text{ (eV)} = -13,6 \cdot \frac{1}{n^2}$$

EMISSION
d'un photon de
fluorescence
d'énergie E_ϕ

$$E_\phi = hf = \frac{hc}{\lambda} = |E_3 - E_2|$$

$$E_\phi \text{ (eV)} = -13,6 \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right)$$

$$E_\phi \text{ (eV)} = 1,9$$

ABSORPTION
d'un photon
d'énergie E_ϕ

$$E_\phi = hf = \frac{hc}{\lambda} = |E_3 - E_1|$$

$$E_\phi \text{ (eV)} = -13,6 \cdot \left(\frac{1}{9} - 1 \right)$$

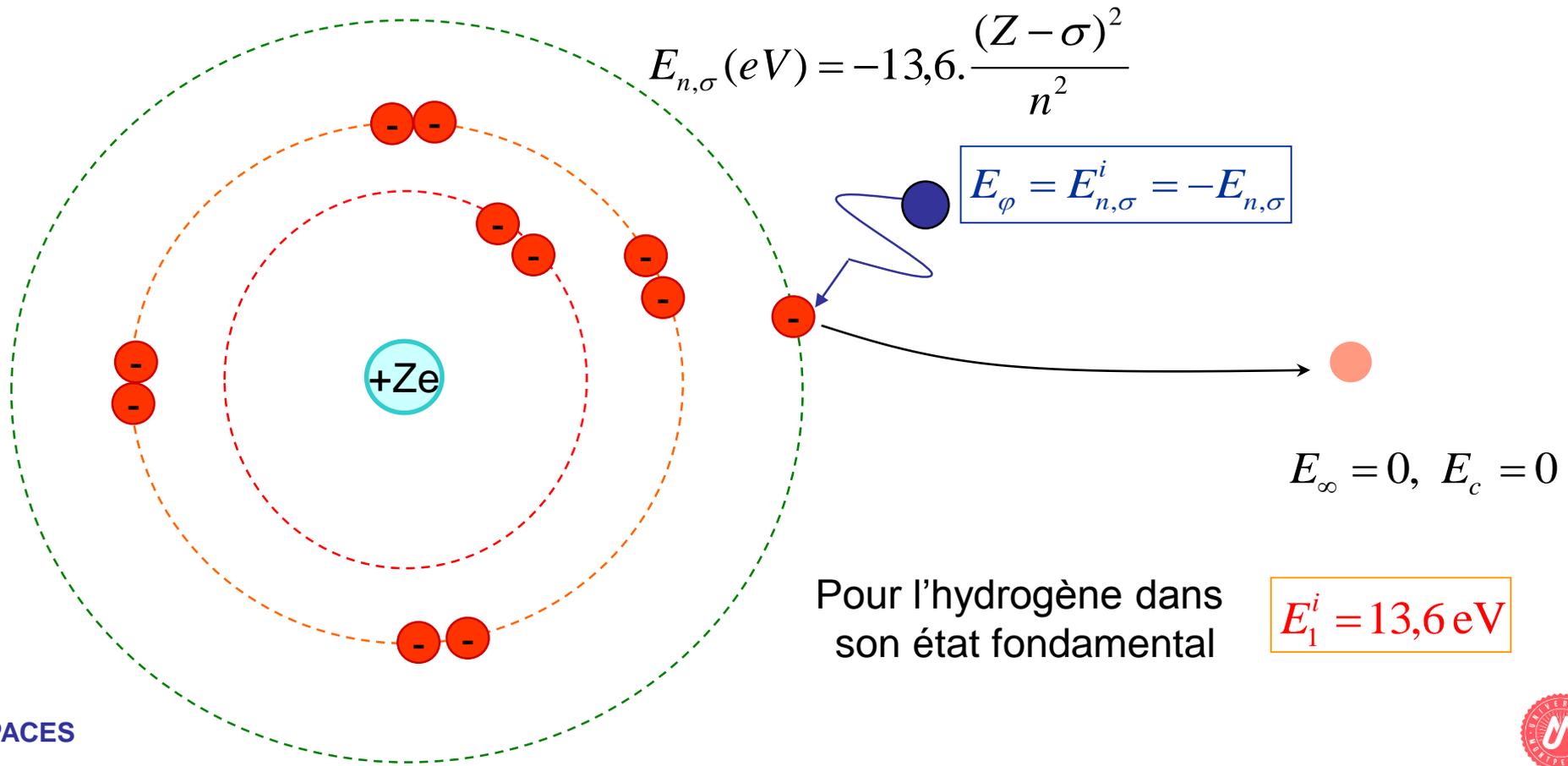
$$E_\phi \text{ (eV)} = 12,1$$

Conforme à la formule de **Balmer** (1885): $\frac{1}{\lambda} = K \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$
et aux spectres d'absorption/émission



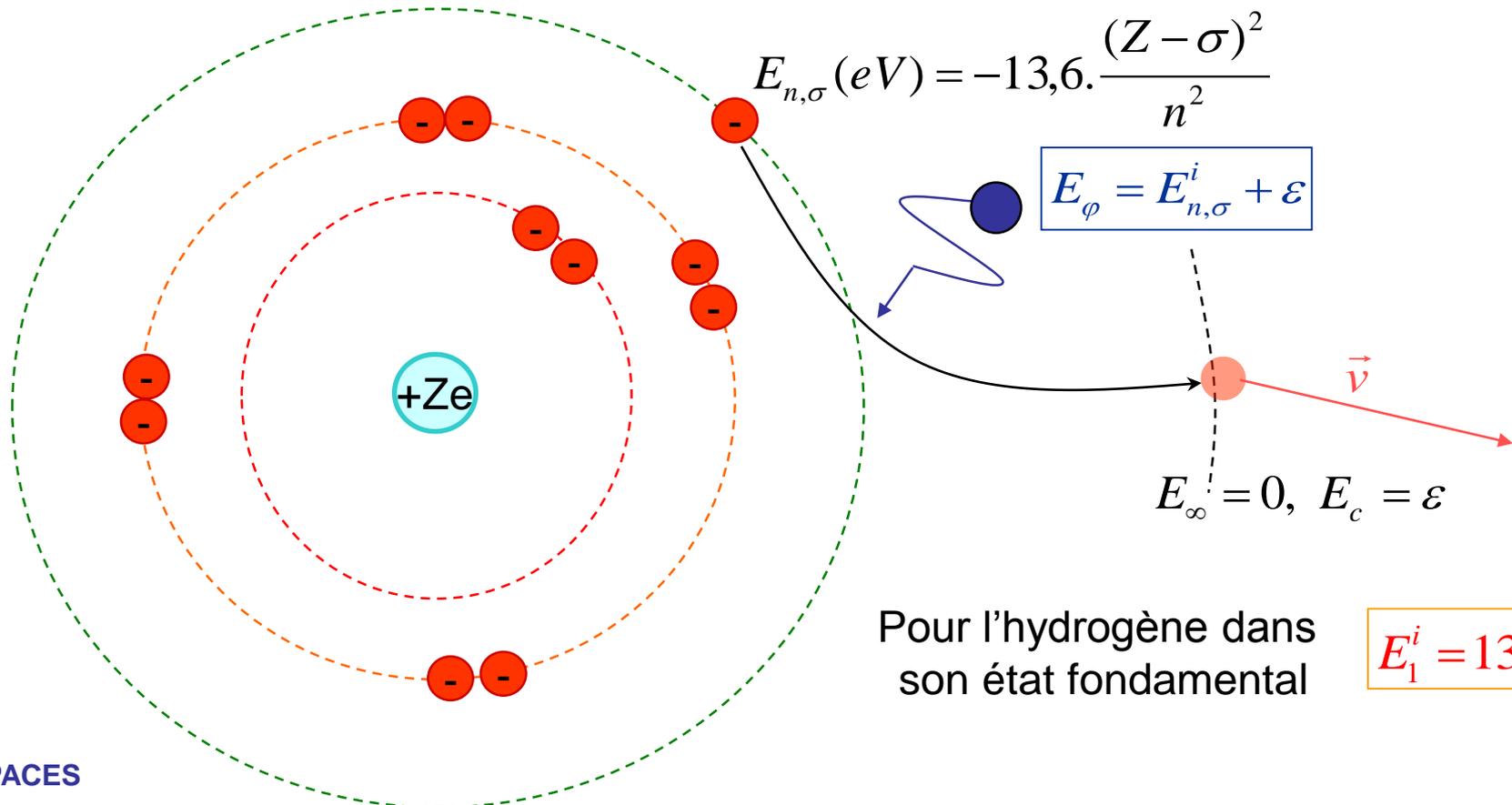
ENERGIE D'IONISATION $E_{n,\sigma}^i = -E_{n,\sigma}$

C'est l'énergie minimale nécessaire pour soustraire un électron atomique à l'influence électrostatique du noyau



ENERGIE D'IONISATION $E_{n,\sigma}^i = -E_{n,\sigma}$

C'est l'énergie minimale nécessaire pour soustraire un électron atomique à l'influence électrostatique du noyau



$$E_{n,\sigma} (eV) = -13,6 \cdot \frac{(Z - \sigma)^2}{n^2}$$

$$E_{\phi} = E_{n,\sigma}^i + \epsilon$$

$$E_{\infty} = 0, E_c = \epsilon$$

Pour l'hydrogène dans son état fondamental

$$E_1^i = 13,6 eV$$





LIMITES DU MODELE DE BOHR

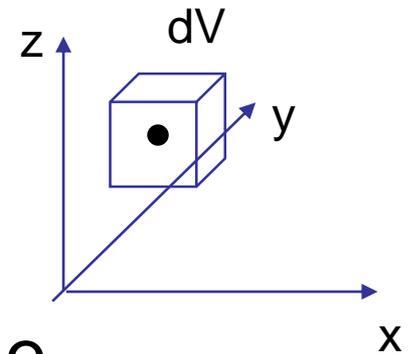
- Le modèle de Bohr est semi-classique
 - est validé expérimentalement sur ${}^1_1\text{H}$ pour $E_n \text{ (eV)} = -13,6/n^2$, mais pas pour $\|\vec{L}\| = n\cdot\hbar$
 - notion de «trajectoire» de l'électron incohérente
- Du fait des inégalités d'Heisenberg :
 - pas de trajectoires
 - seulement des probabilités de présence de l' e^-
- Comment déterminer cette probabilité p ? :
 - hypothèse: p liée à une fonction ψ associée à l' e^-

FONCTION D'ONDE

- **Interprétation de Copenhague** (M. Born, 1926) :

La **fonction d'onde** ψ d'une particule détermine sa probabilité de présence en un lieu dV à l'instant t :

$$p = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$$



- On recherche ψ sous la forme d'une onde progressive associée à la particule :

$$\psi(t, x) = \sin[\omega t - k \cdot x] \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} = -k^2 \cdot \sin[\omega t - k \cdot x] \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + k^2 \cdot \psi = 0$$

$$\text{soit, puisque } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \psi = 0$$

EQUATION DE SCHRODINGER

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \psi = 0$$

De Broglie : $\lambda = \frac{h}{mv} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + 4\pi^2 \left(\frac{mv}{h} \right)^2 \cdot \psi = 0$

$$(mv)^2 = 2m \cdot \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = 2m \cdot (E - V) \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} \cdot 2m \cdot (E - V) \cdot \psi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - V) \cdot \psi = 0 \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + V \cdot \psi = E \cdot \psi}$$

$$\hookrightarrow \psi \Rightarrow p = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV$$

EQUATION DE SCHRODINGER

- La **fonction d'onde** ψ d'une particule détermine sa probabilité de présence en un lieu suivant: $p = |\psi(x, y, z)|^2 dV$

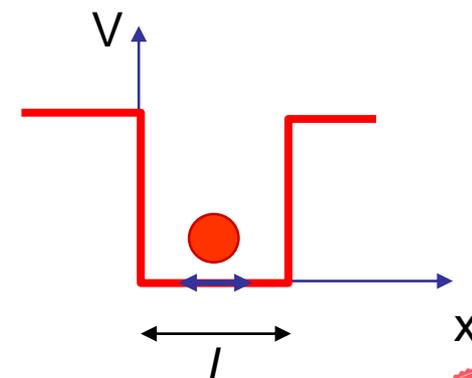
- Équation de Schrödinger:
$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi$$

- Exemple pour un puit de potentiel 1D

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n \cdot \frac{\pi x}{l}\right) \text{ et } E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2$$



E. Schrödinger



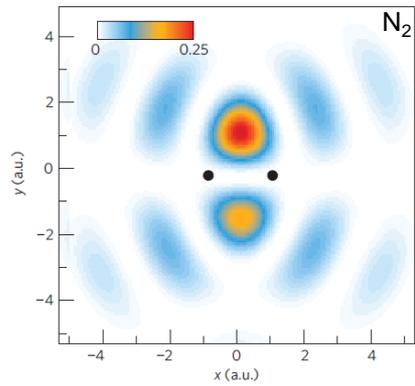
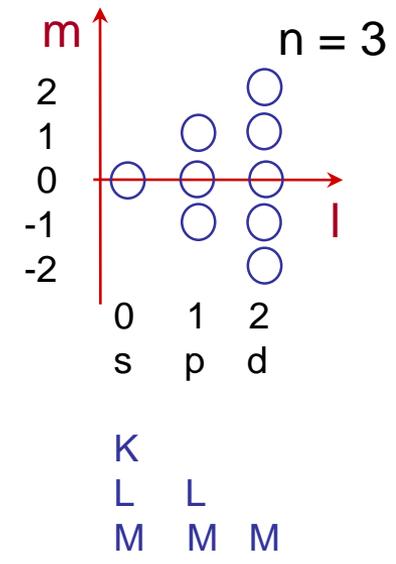
EQUATION DE SCHRODINGER

- En 3D, ψ et E dépendent de trois nombres entiers (n, l, m) : **nb. quantiques**
- Pour un électron dans un atome, $V \propto \frac{1}{r}$ et $\psi(n, l, m)$

	nombre quantique...	valeurs	grandeur quantifiée
n	principal	1, 2, ... (K, L, M, ...)	couche, énergie
l	secondaire	0, 1, ..., n-1 (s, p, d, f)	$\ \vec{L}\ = \ \vec{p} \wedge \vec{r}\ = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ sous-couche, énergie (via σ)
m	magnétique	-l, ..., 0, ..., l	$L_z = m\hbar$
s	spin	$-\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$	$\sigma_z = s\hbar$

EQUATION DE SCHRODINGER

- Principe d'exclusion de Pauli (1925) : **un seul électron par quadruplet (n,l,m,s)**
- Pour la couche n :
 - $0 \leq l \leq n-1 \Rightarrow n$ sous-couches
 - $-l \leq m \leq l \Rightarrow 2l+1$ cases
 - $S = \pm 1/2 \Rightarrow 2$ électrons par case
 - **au plus $2.n^2$ électrons sur la couche n**

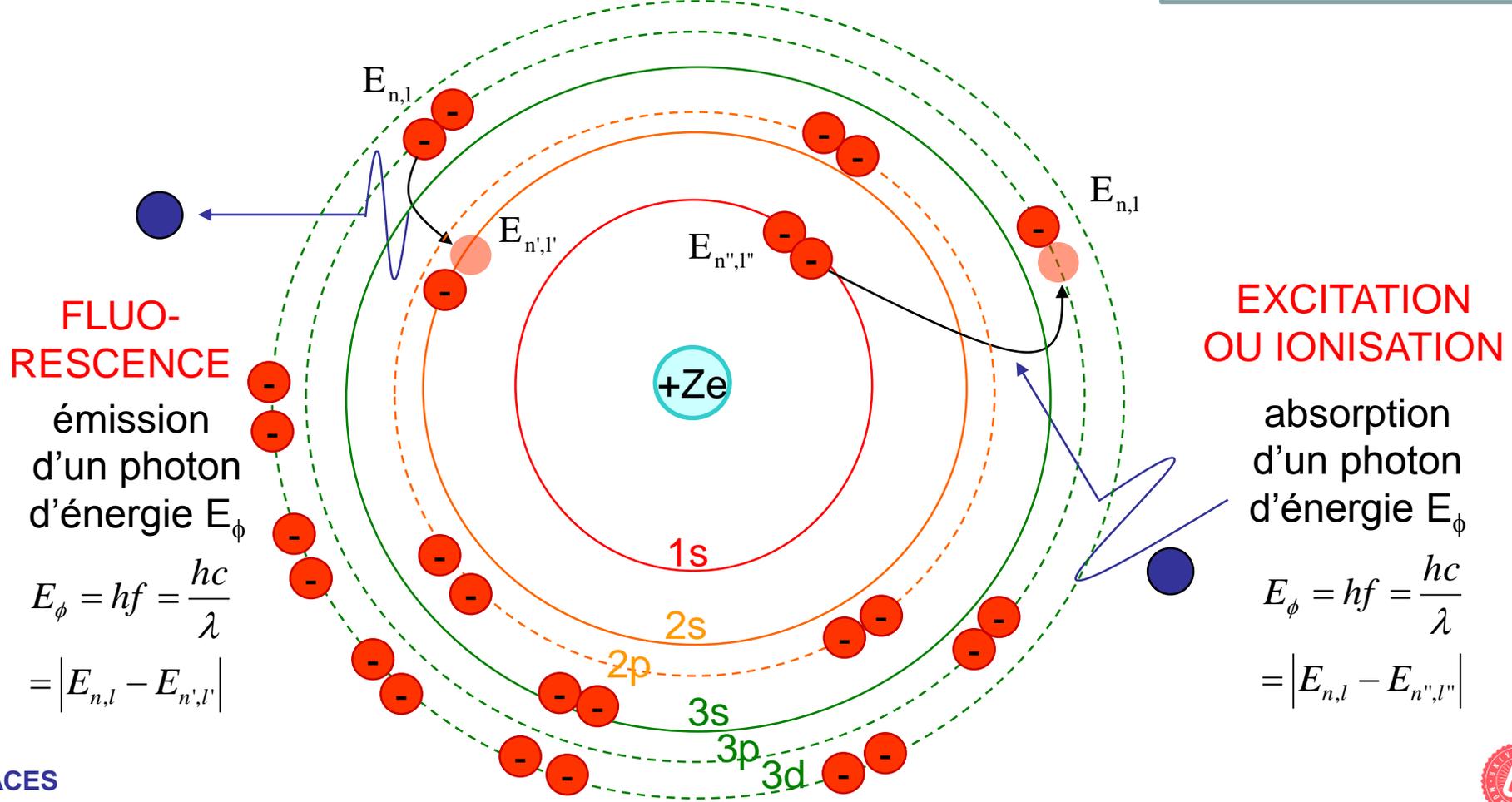


S. Haessler et al.
Nature Physics 2010; 6:200-206



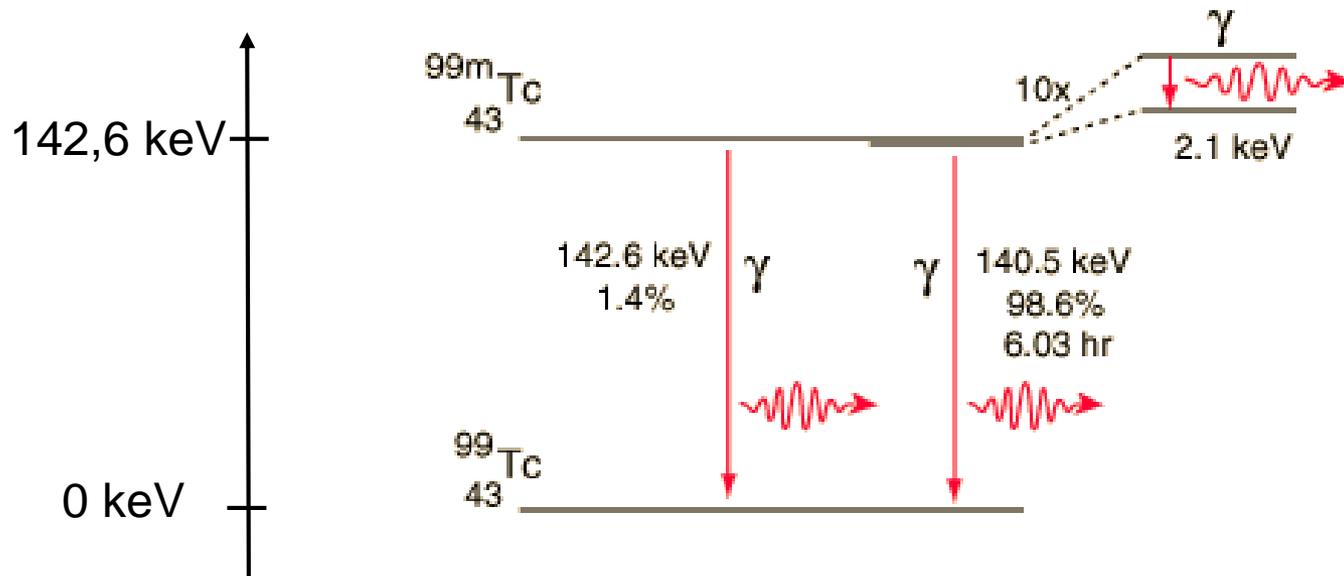
MODELE ATOMIQUE

$$E_{n,l} = -\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \frac{(Z - \sigma(n,l))^2}{n^2}$$



MODELE NUCLEAIRE

- Nucléons: \pm même **modèle en couches**,
- **$E[n,l,j(m,s)]$** , j demi-entier pour quantifier les moments orbital et intrinsèque couplés des nucléons
- Un nucléon peut passer d'un niveau excité au niveau fondamental en émettant un **photon gamma (γ)**



OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 6

- **Connaître et savoir manipuler :**
 - Le modèle de Bohr-Sommerfeld
 - Remplissage des couches électroniques
 - Les énergies des électrons atomiques (hydrogéoïdes)

$$E_{n,l}(\text{eV}) = -13,6 \cdot \frac{(Z - \sigma(n,l))^2}{n^2}$$

- Les énergies d'ionisation, d'excitation, de fluorescence :

$$E_{n,l}^i = -E_{n,l}$$

$$E_{\uparrow n',l'}^{n,l} = |E_{n,l} - E_{n',l'}|$$

$$hf = E_{\downarrow n',l'}^{n,l} = |E_{n,l} - E_{n',l'}|$$

- Les niveaux d'énergie des nucléons