

# TRAITEMENT DES IMAGES SCINTIGRAPHIQUES



Denis MARIANO-GOULART  
Département de médecine nucléaire  
CHRU de Montpellier  
<http://scinti.edu.umontpellier.fr>

Le symbole  marque des points particulièrement importants à comprendre et connaître

Le symbole  marque des points un peu délicats qui ne sont pas exigibles à l'examen

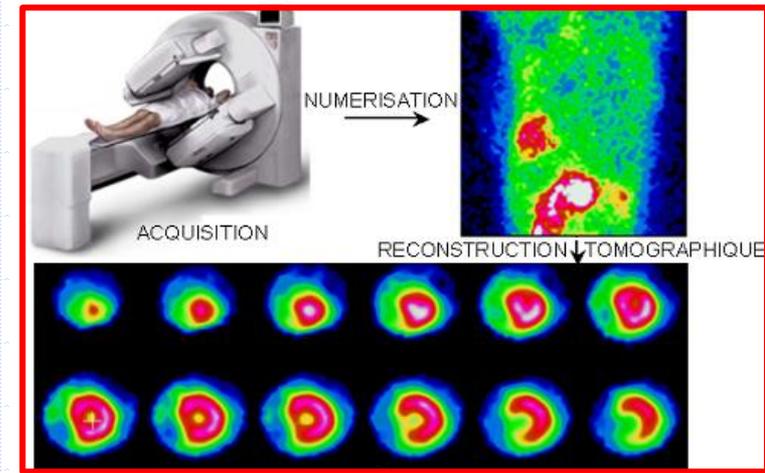
Le symbole  concerne un exercice ou une réflexion à mener ensemble

Le symbole  désigne une diapositive masquée lors du cours, donnée en complément.

# PLAN DU COURS

## ① Réponse d'une $\gamma$ -caméra (3h30)

- réponse impulsionnelle
- échantillonnage
- formation d'une image
- effet de volume partiel
- déconvolution



## ② Bruit et filtrages (2h30)

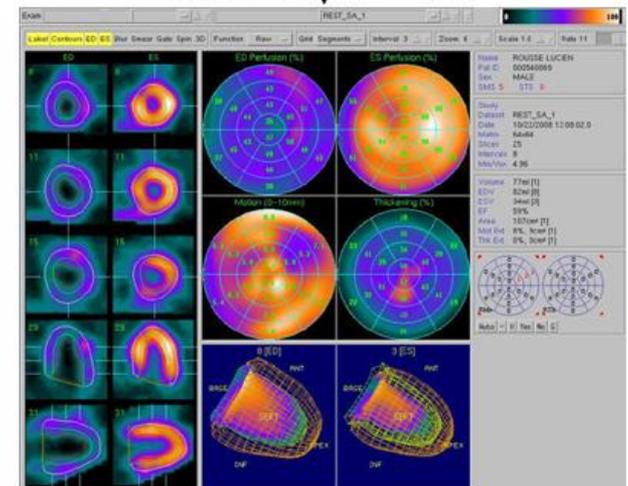
- ◆ bruit stochastique
- ◆ filtrages d'images

## ③ Segmentation (1h)

## ④ Recalage d'images (1h)

## ⑤ Visualisation volumique (1h)

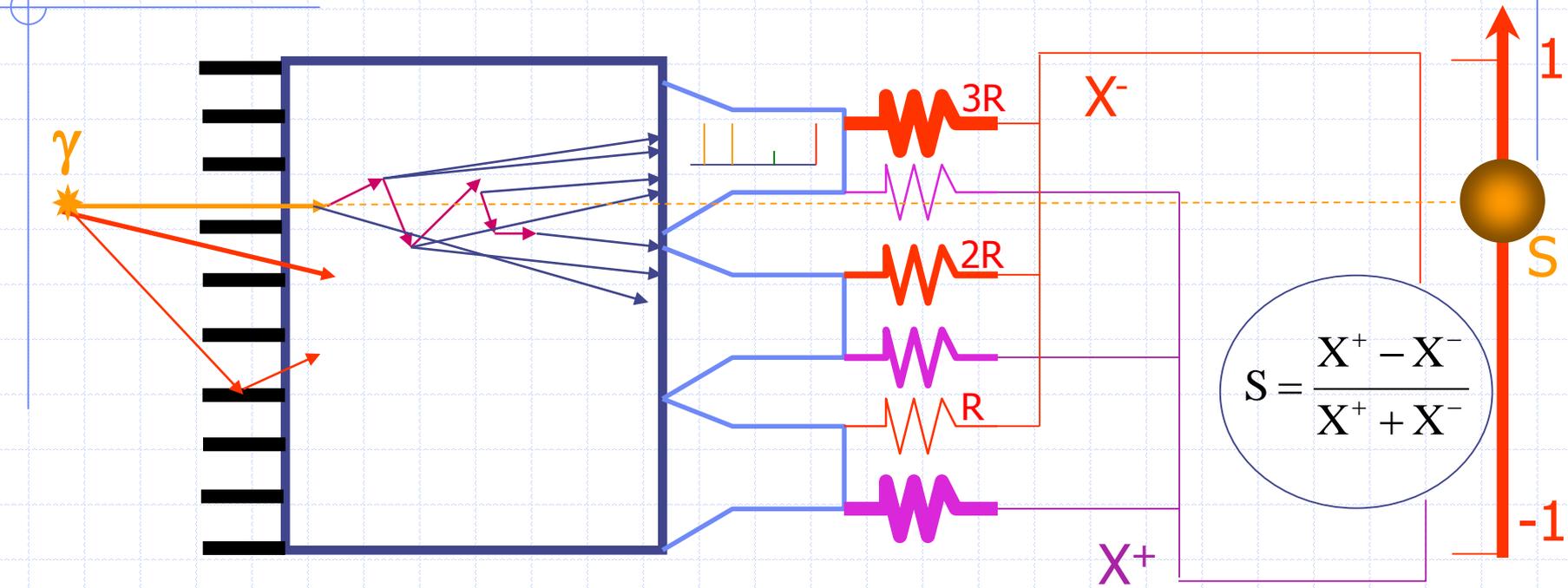
SEGMENTATION ↓ PUIS ANALYSE



# ① REPONSE D'UNE GAMMA-CAMERA

Réponse impulsionnelle d'un appareil d'imagerie.  
Echantillonnage d'une image scintigraphique.  
Processus de formation d'une image  
Effet de volume partiel  
Déconvolution

# Réponse impulsionnelle d'une $\gamma$ -caméra (*Point Spread Function*)



Collimateur

Scintillateur

PM

Localisation

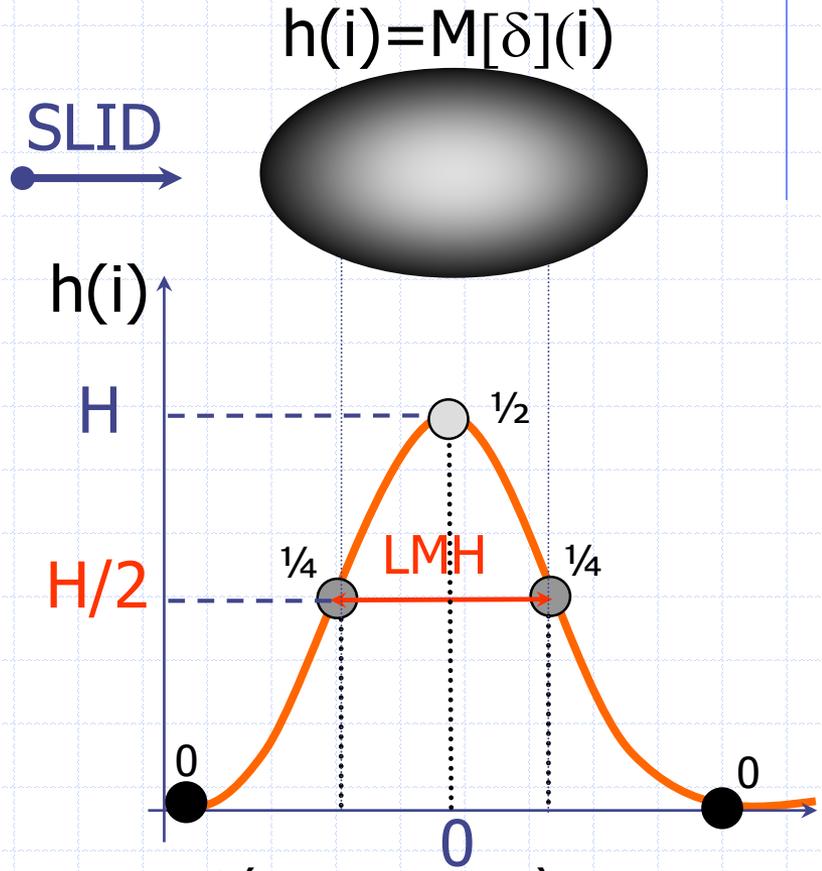
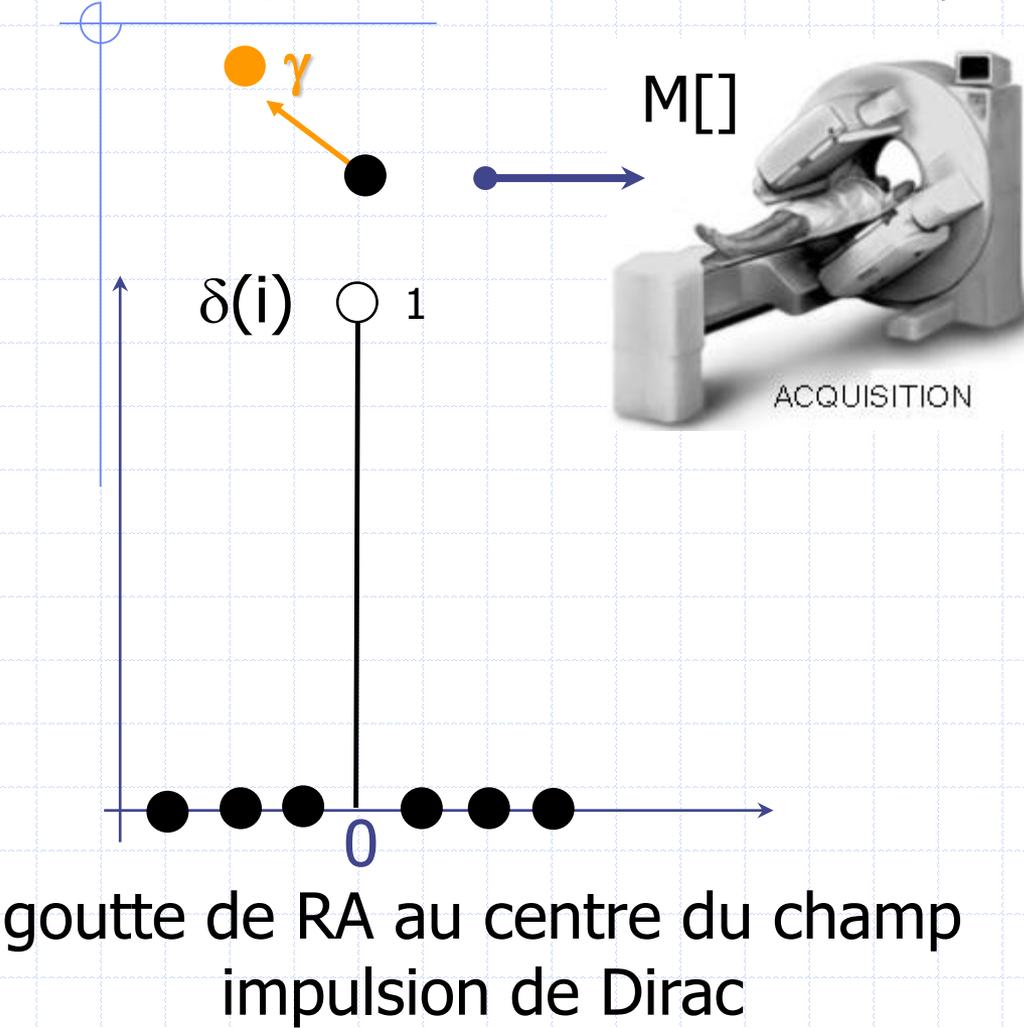
Réponse géométrique, Pénétration et diffusion septales

Diffusion Compton dans le cristal

Incertitudes de localisation

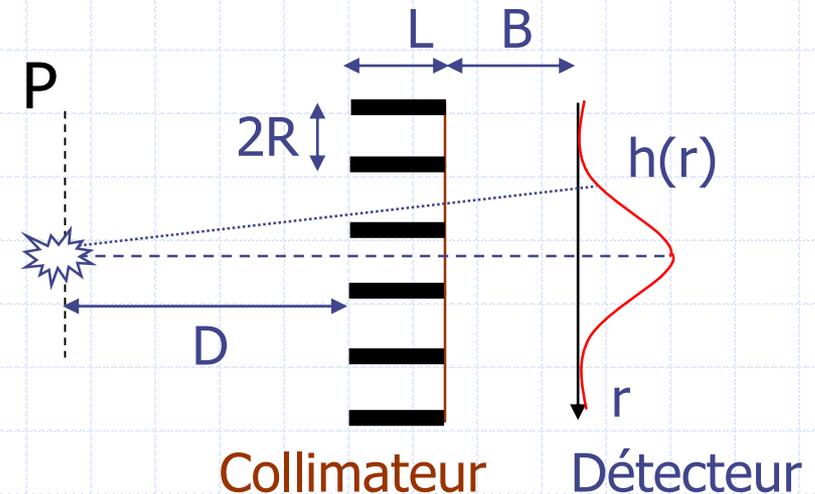
réponse intrinsèque

# Réponse d'une $\gamma$ -caméra



- Réponse intrinsèque
  - ◆  $LMH \approx 4 \text{ mm}, \pm$  invariante
- Réponse du collimateur
  - ◆ variable

# Réponse d'un collimateur

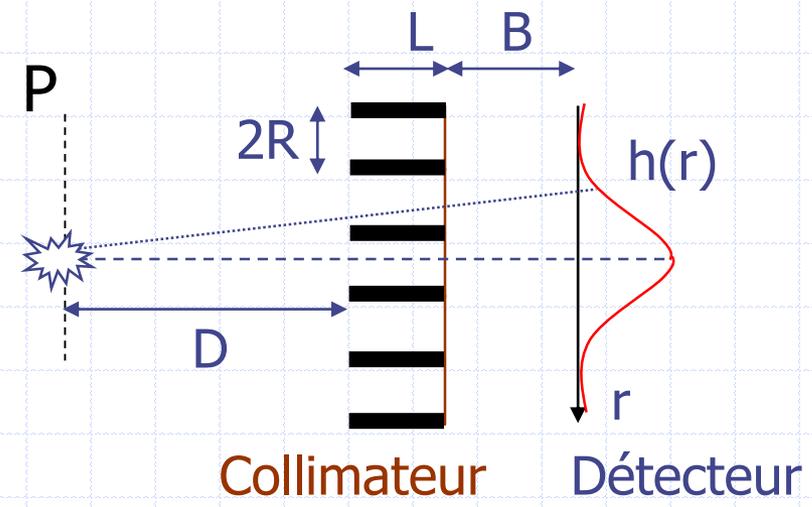
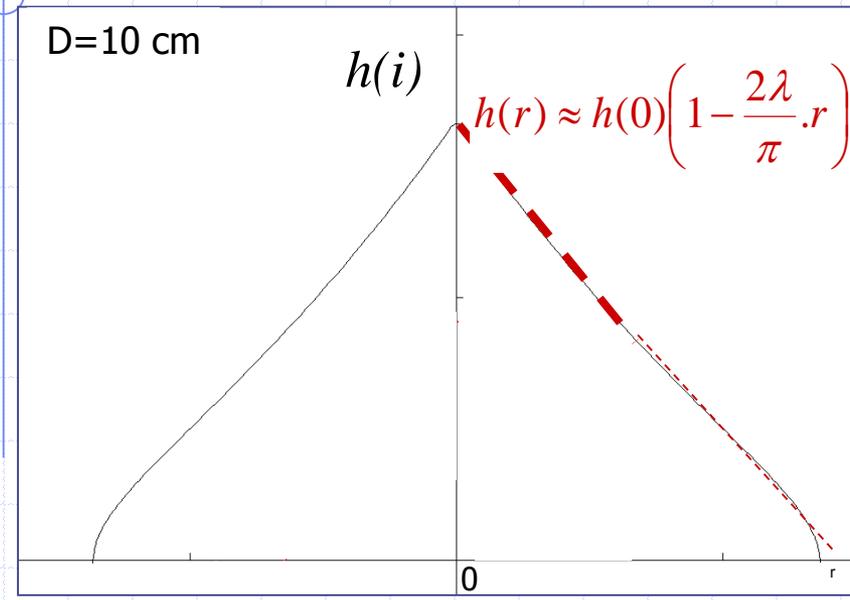


Réponse moyenne dans le plan P (septa cylindriques) :

$$h(r) = \frac{h(0)}{\pi} \left[ 2 \cdot \arccos\left(\frac{\lambda \cdot r}{2}\right) - \lambda \cdot r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \cdot r}{2}\right)^2} \right] \quad \lambda = \frac{L}{R \cdot (L + D + B)}$$

$h(0)$  = efficacité du collimateur

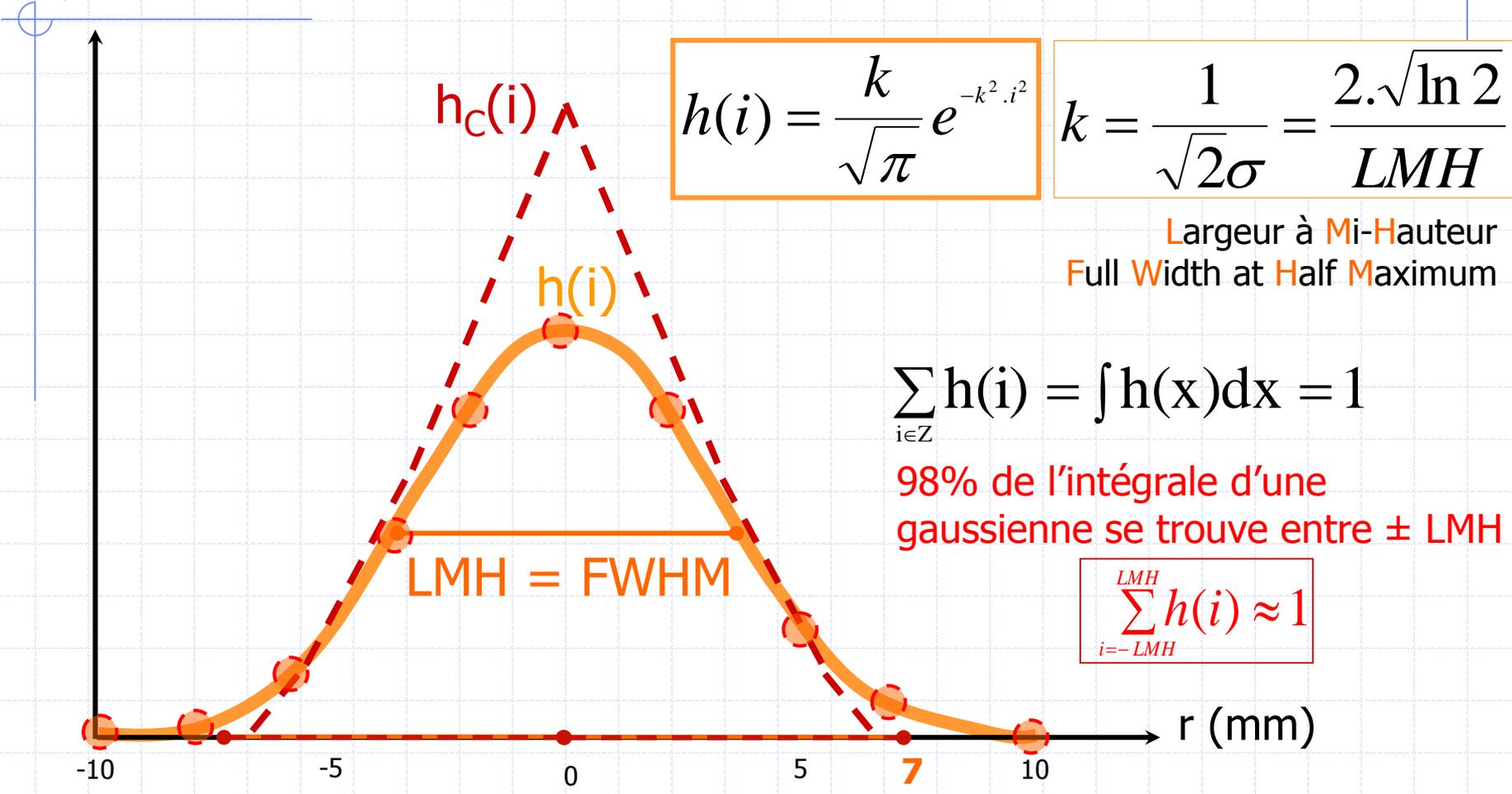
# Réponse d'un collimateur



$$h(r) = \frac{h(0)}{\pi} \left[ 2 \cdot \arccos \left( \frac{\lambda \cdot r}{2} \right) - \lambda \cdot r \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda \cdot r}{2} \right)^2} \right] \quad \lambda = \frac{L}{R \cdot (L + D + B)}$$

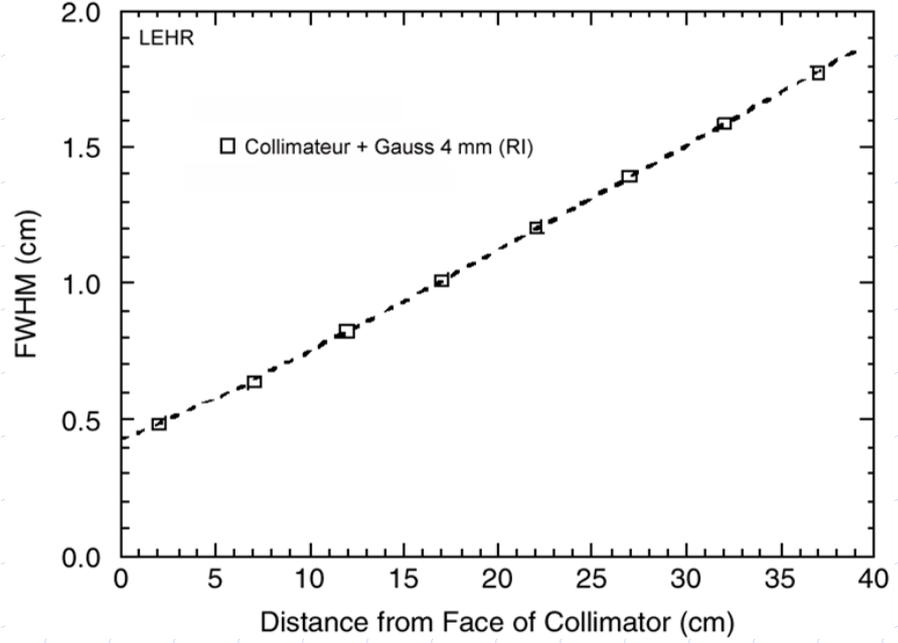
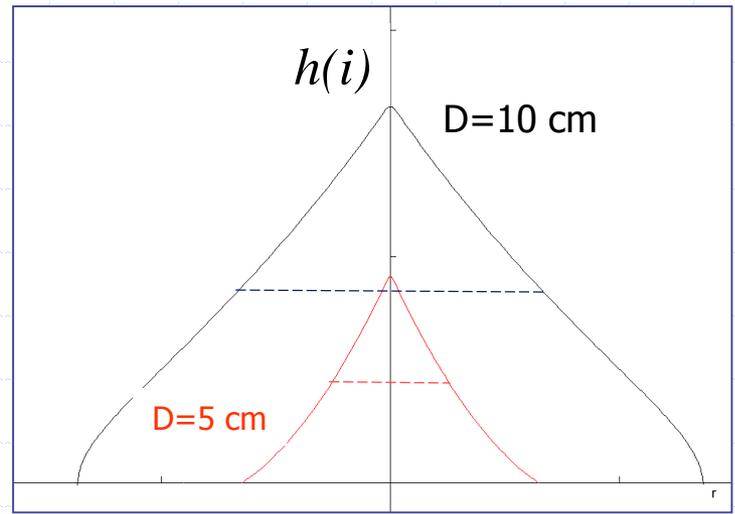
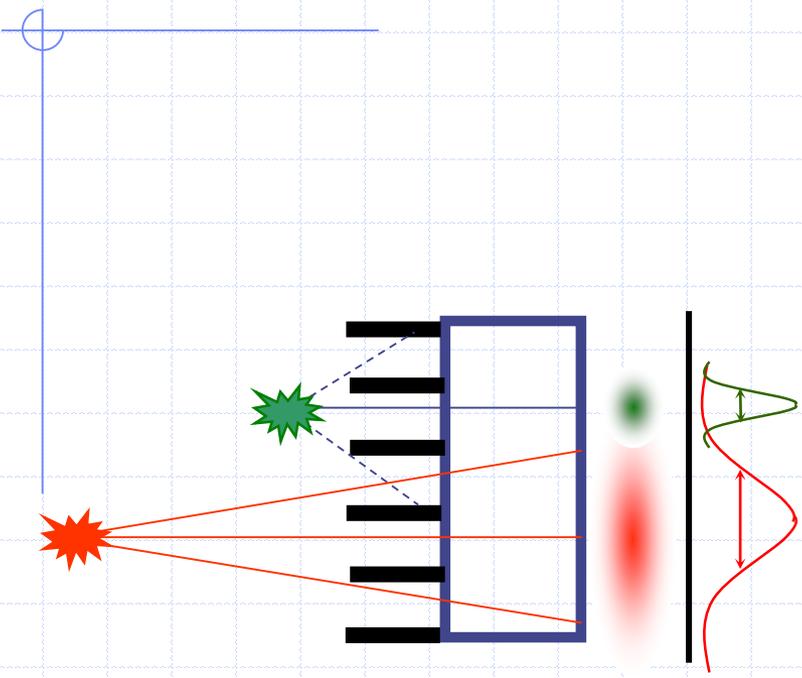
LEHR :  $L = 4,1 \text{ cm}$  ;  $B = 0,64 \text{ cm}$  ;  $R = 0,19 \text{ cm}$  ;  $\varepsilon = 0,065$

# Réponse impulsionnelle d'une $\gamma$ -caméra $\approx$ gaussienne (pour D fixée)



$$LMH = 2 \cdot \sigma \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

# Lien entre LMH & D

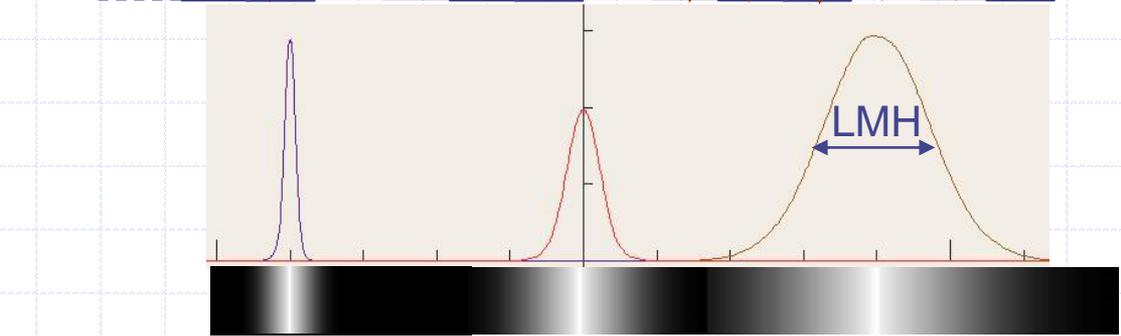
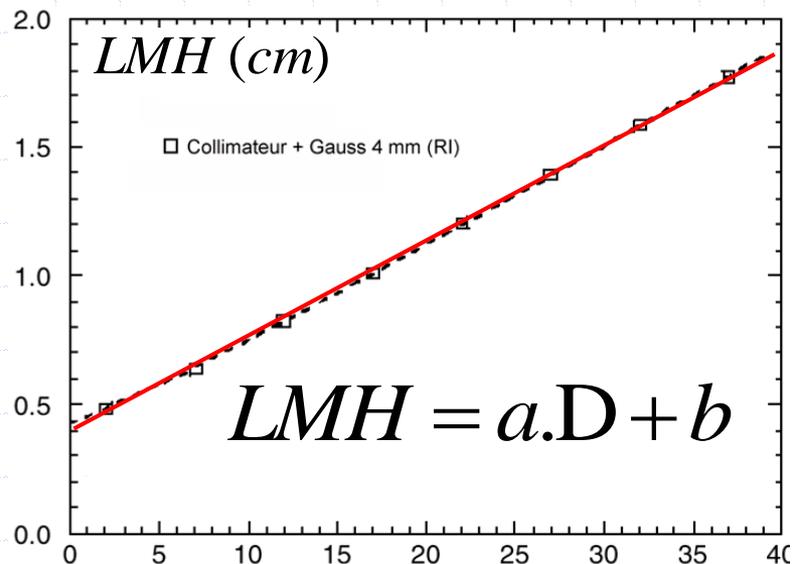
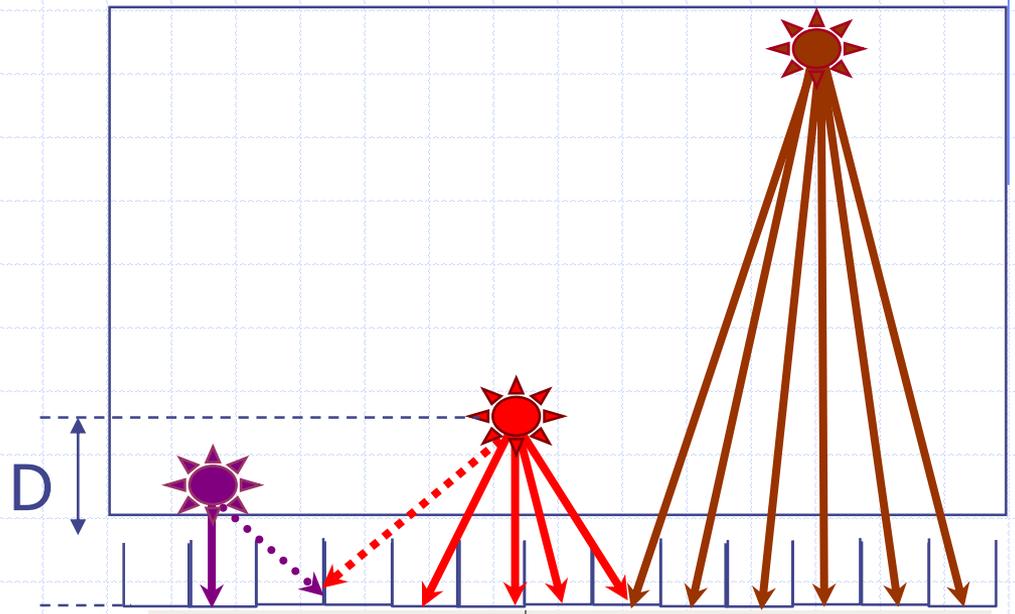


# Réponse impulsionnelle d'une $\gamma$ -caméra (*PSF = Point Spread Function*)



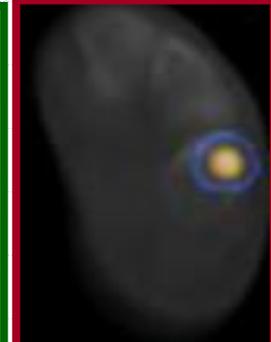
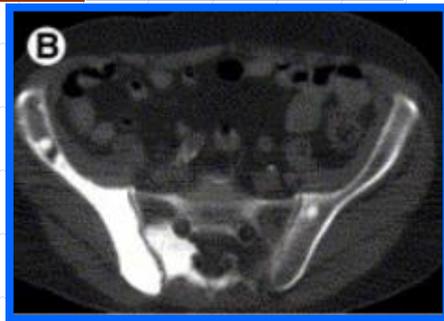
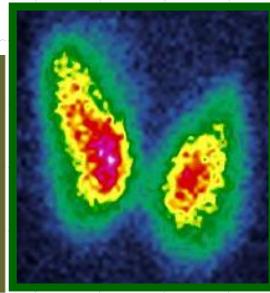
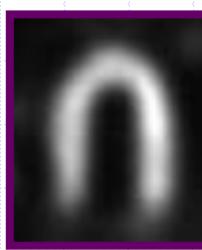
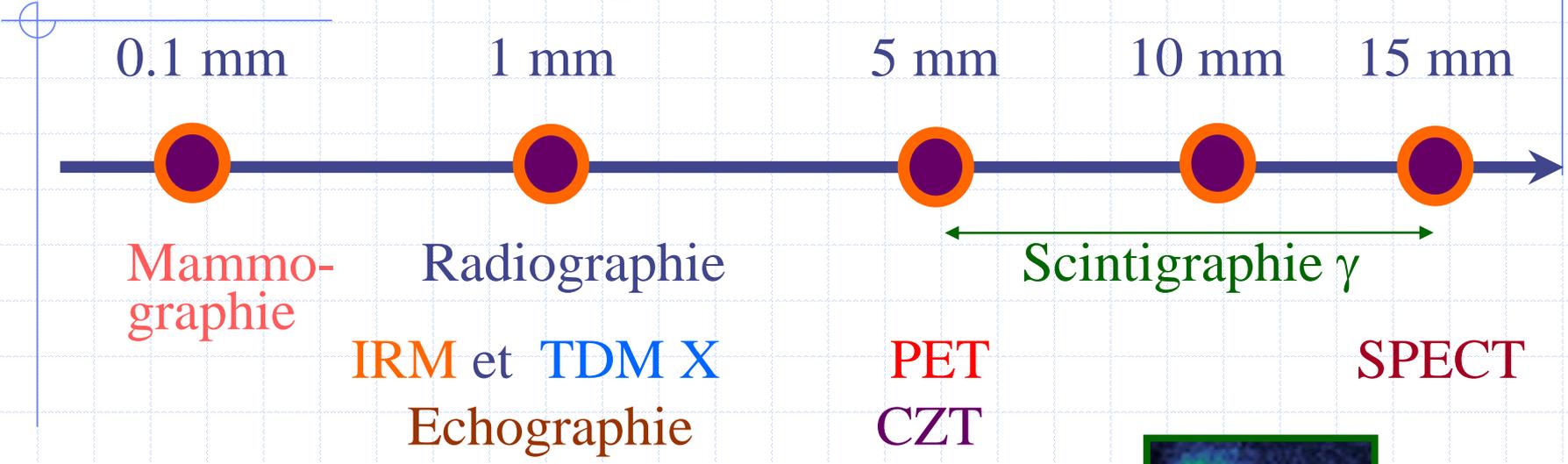
$$h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \cdot i^2}$$

$$h(i) = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4 \cdot \ln 2}{LMH^2} \cdot i^2}$$

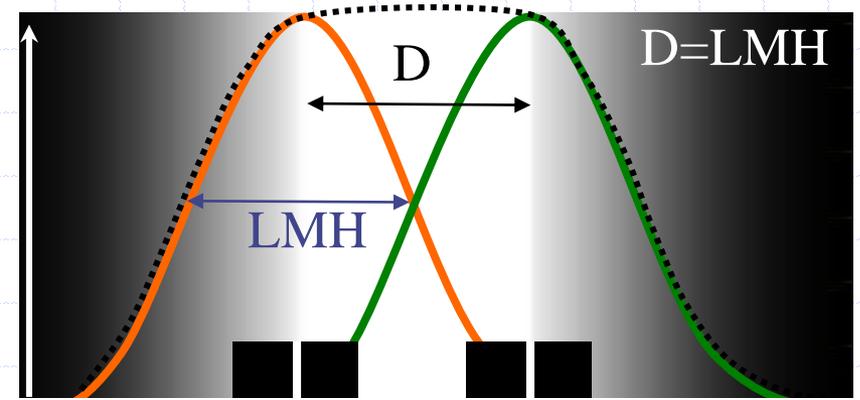
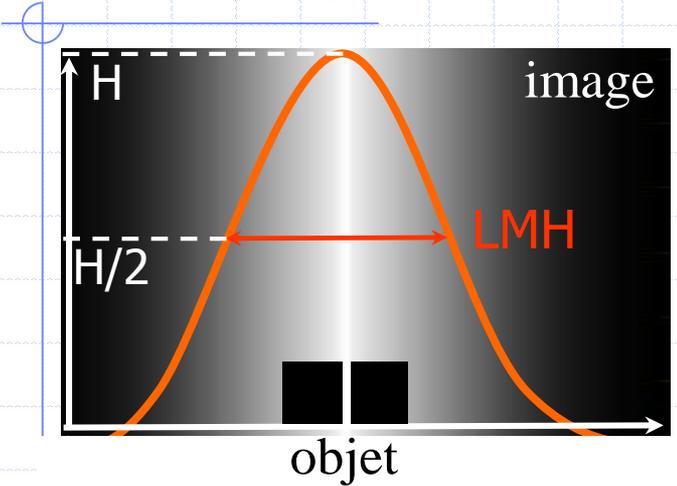


$D$  (cm)

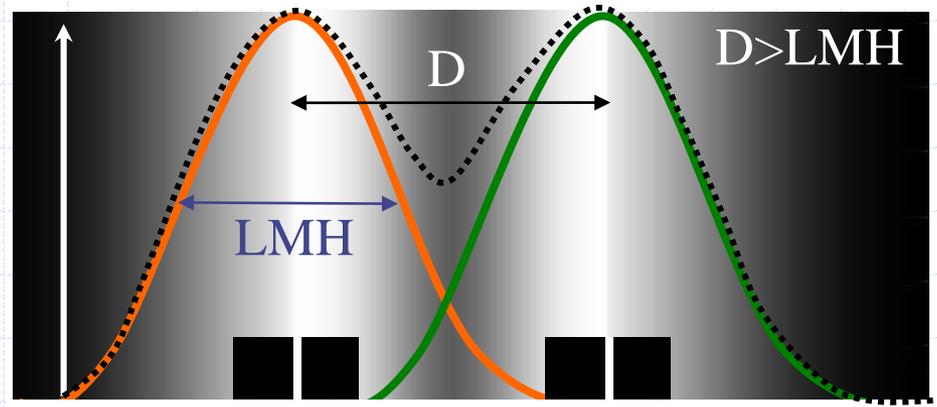
# LMH en imagerie médicale



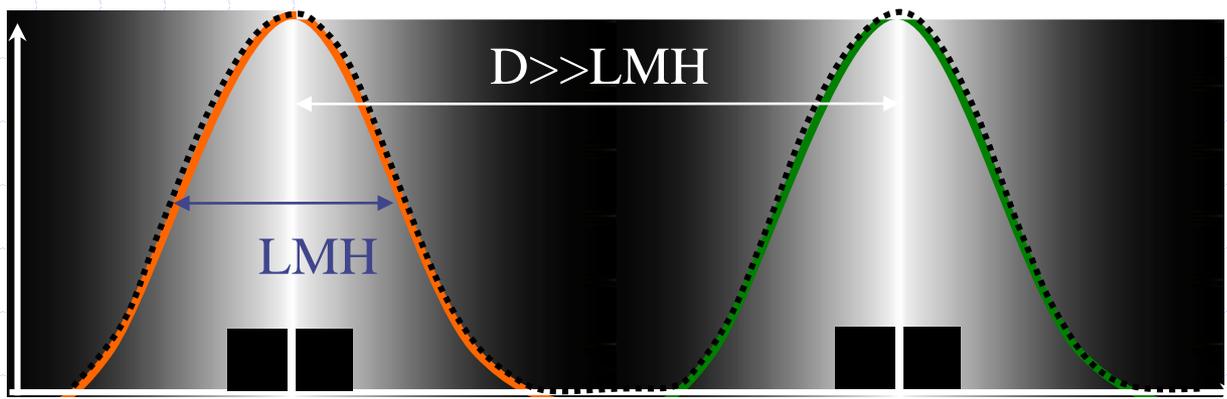
# Interprétation 1



$D \leq LMH \Rightarrow$  images fusionnées



$D > LMH \Rightarrow$   
images  
indépendantes



# Interprétation 2

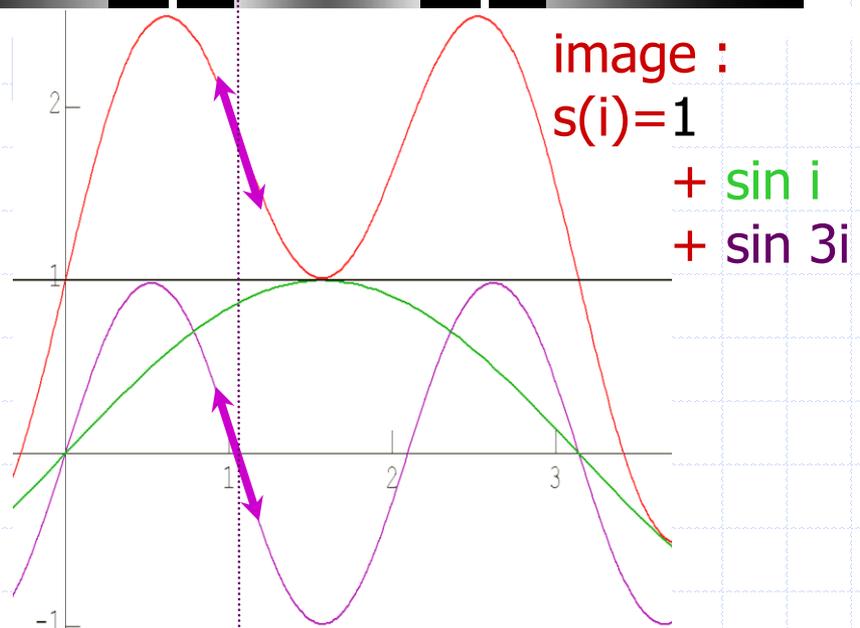
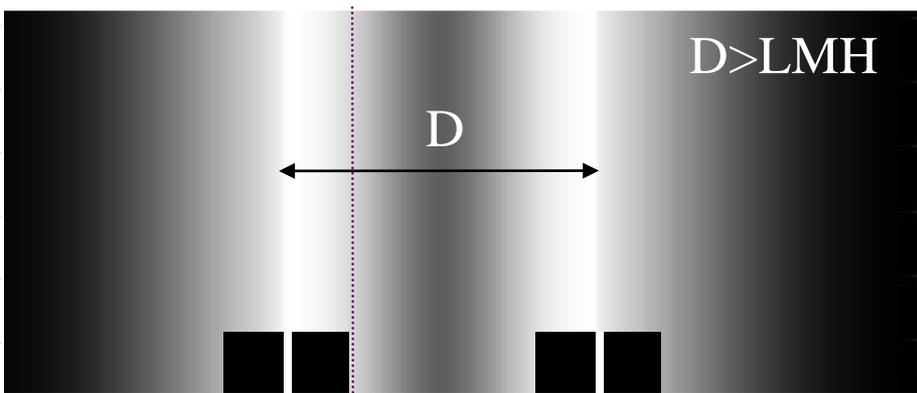


image :  
 $s(i) = 1$   
 +  $\sin i$   
 +  $\sin 3i$

composante HF =  $\sin(3i) = \sin(2\pi f_{\max} \cdot i)$   
 $f_{\max} = 3/2\pi = 3/\text{tour} \Leftrightarrow D_{\min} = 2\pi/3 \text{ mm}$

Chaque composante fréquentielle de la TF code une certaine vitesse de variation des niveaux de gris d'un pixel à l'autre :

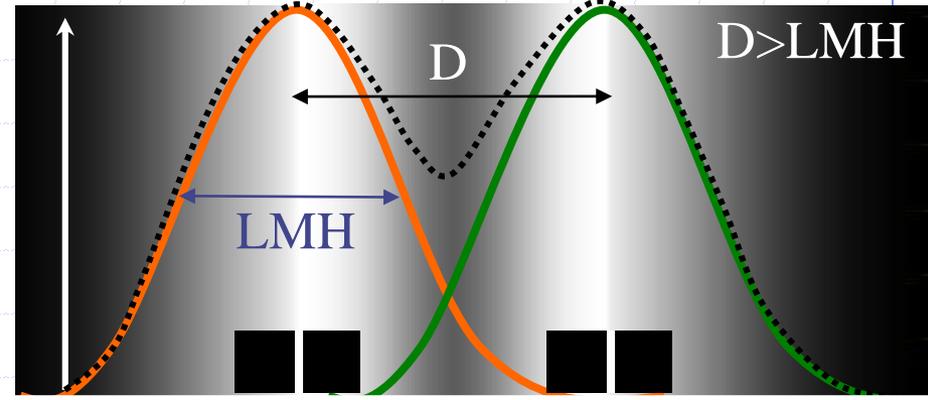
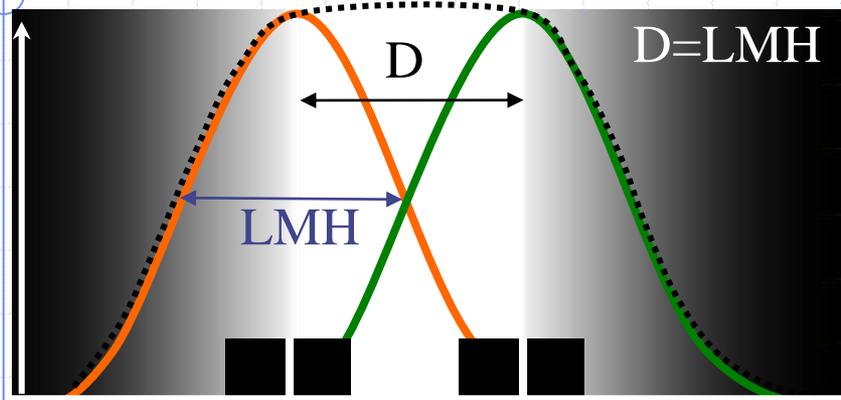
La composante de fréquence maximale ( $f_{\max} = 3/2\pi$ ) code donc pour la variation de niveau de gris la plus rapide, soit une ligne (blanche) se répétant tous les  $D_{\min} = 1/f_{\max} = 2\pi/3 \text{ mm}$

La composante  $\sin(2\pi \cdot i)$  code pour des signaux intenses se répétant tous les  $1/f \text{ mm}$ . Elle adoucit le contraste de la composante HF.

La composante constante correspond au niveau de gris moyen autour duquel les autres harmoniques créent le contraste.



# Interprétation 2



$D \leq LMH \Rightarrow$  images fusionnées

$f = 1/D \geq 1/LMH$

La composante fréquentielle  $f$  n'est pas transmise

$D > LMH \Rightarrow$  images non fusionnées

$f = 1/D < 1/LMH$

La composante fréquentielle  $f$  est transmise

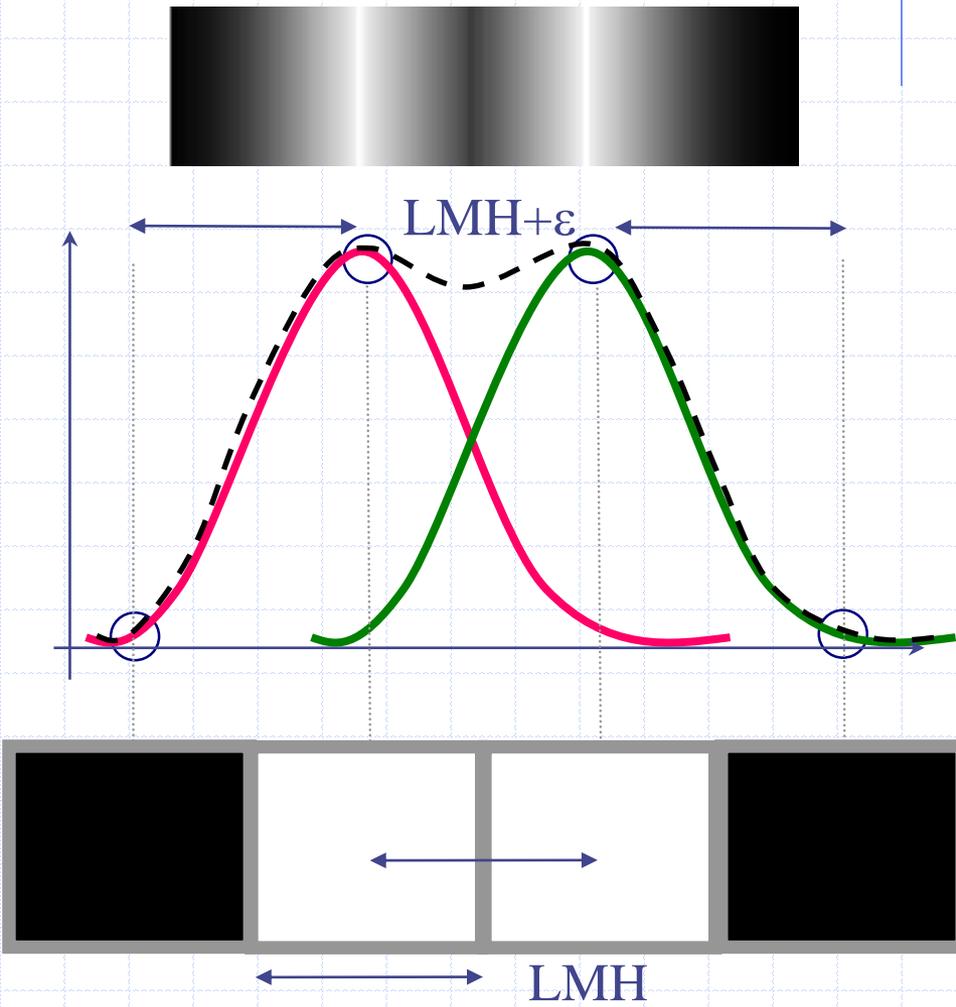
$$LMH = \frac{1}{f_{\max}^{transmise}} = D_{\min}^{transmise} = \text{résolution} = \text{pouvoir séparateur}$$

$LMH \downarrow \Rightarrow f_{\max} \uparrow \Rightarrow$  variation de contraste maximale possible  $\uparrow$

# Théorème de Shannon

Si la taille du pixel est identique à la LMH, alors aucun contraste n'est numérisé pour des objets ponctuels distants d'un peu plus que la LMH:

**Perte de résolution**





# Théorème de Shannon

ECHANTILLONNAGE  
SANS PERTE DE  
RESOLUTION



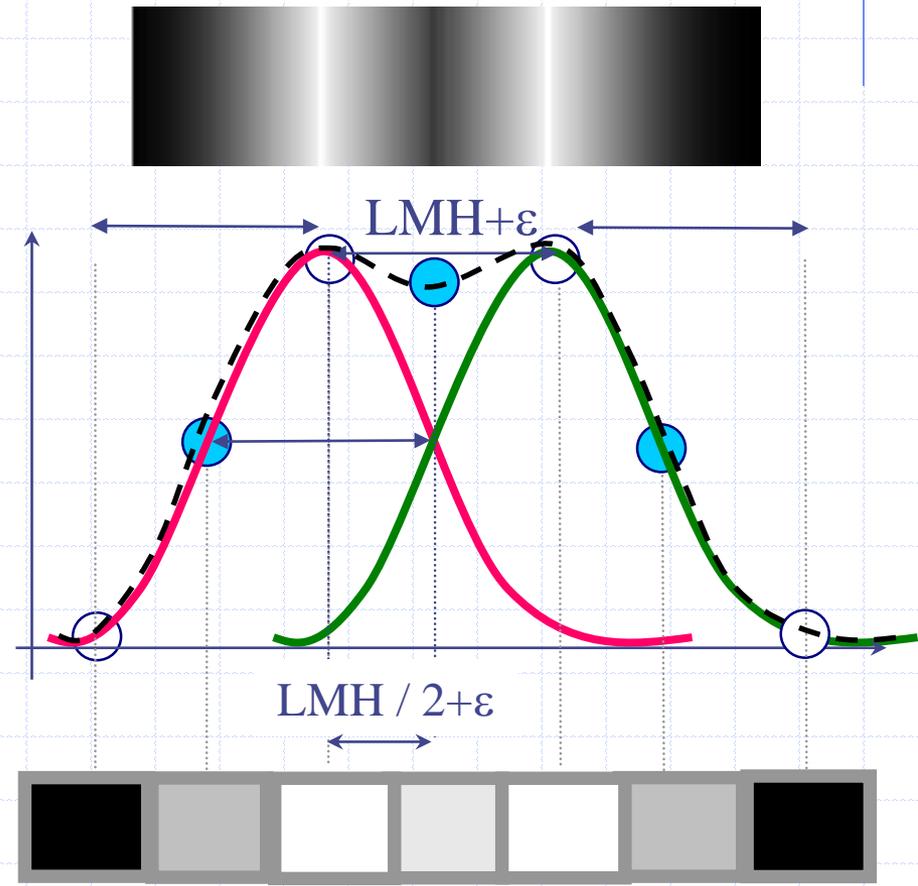
taille du pixel  $d$

$$d \leq LMH/2$$

En pratique :

$$d = LMH/2$$

$$1/d = 2/LMH \Leftrightarrow f_e = 2 \cdot f_{max}$$



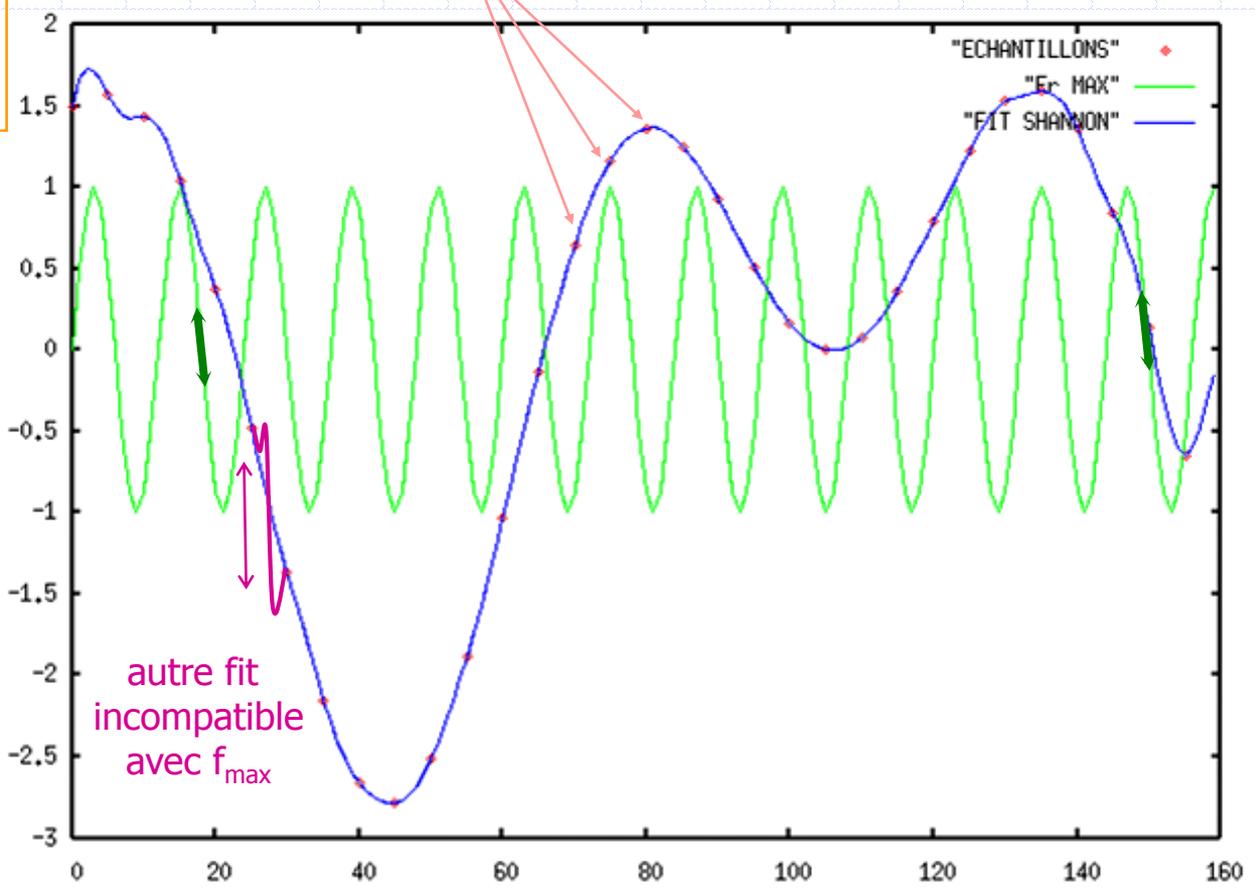
# Théorème de Shannon



**$d = LMH/2$**   
 **$1/d = 2/LMH$**   
 **$f_e = 2.f_{max}$**

$$f(x) = d \cdot \sum_{n=0}^{n=32} f(n.d) \frac{\sin[2.\pi.f_{max}.(x - n.d)]}{\pi.(x - n.d)}$$

$L = 160 \text{ mm}$   
 $f_{max} = 0,1 \text{ mm}^{-1}$   
 donc:  
 $1/d = 2.f_{max}$   
 $1/d = 0,2 \text{ mm}^{-1}$   
 $d = 5 \text{ mm}$   
 $160/5 = 32 \text{ points}$



autre fit incompatible avec  $f_{max}$

# Echantillonnage en pratique (1)

- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- Dimension retenue : 530 mm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - Taille du pixel = 3.5 mm
  - $530 / 3.5 = 151$  pixels / côté
  - Puissance de 2 majorante = 256



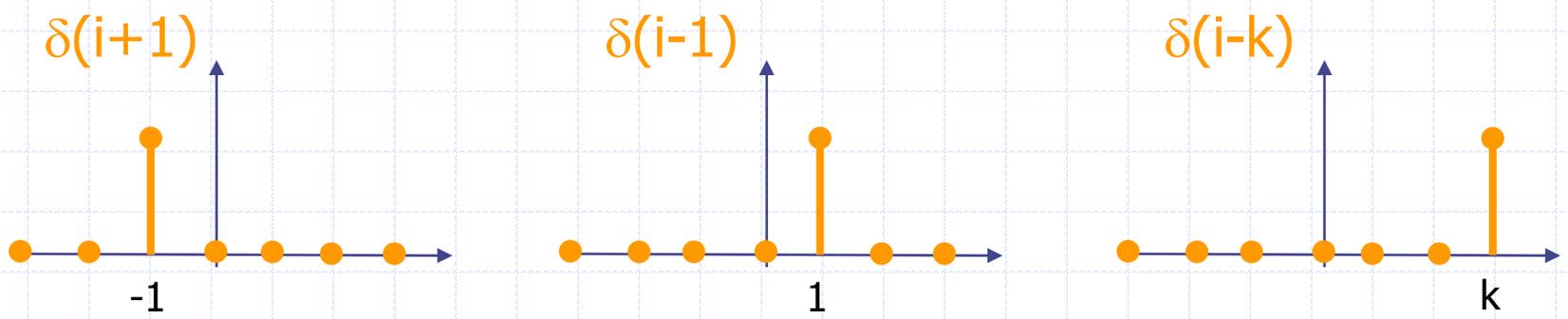
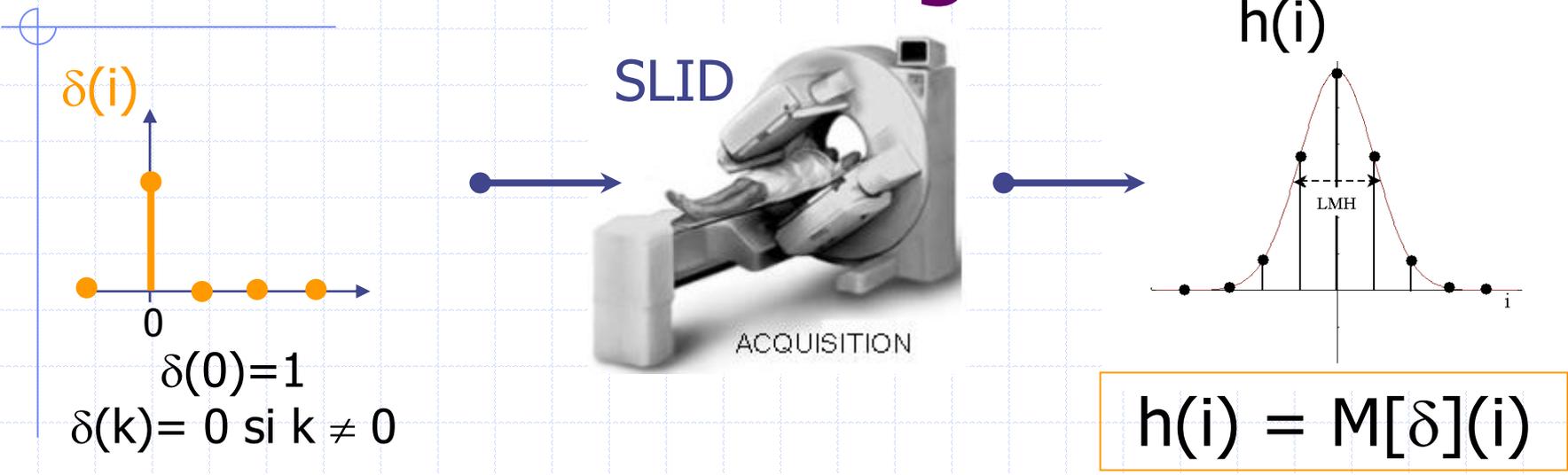
# Echantillonnage en pratique (1)

- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- Dimension retenue : 530 mm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - Taille du pixel = 3.5 mm
  - $530 / 3.5 = 151$  pixels / côté
  - Puissance de 2 majorante = 256
- LMH en mode tomographique = 18 mm
  - Taille du pixel = 9 mm
  - $530 / 9 = 59$  pixels
  - Puissance de 2 majorante = 64

# REPONSE D'UNE $\gamma$ -CAMERA

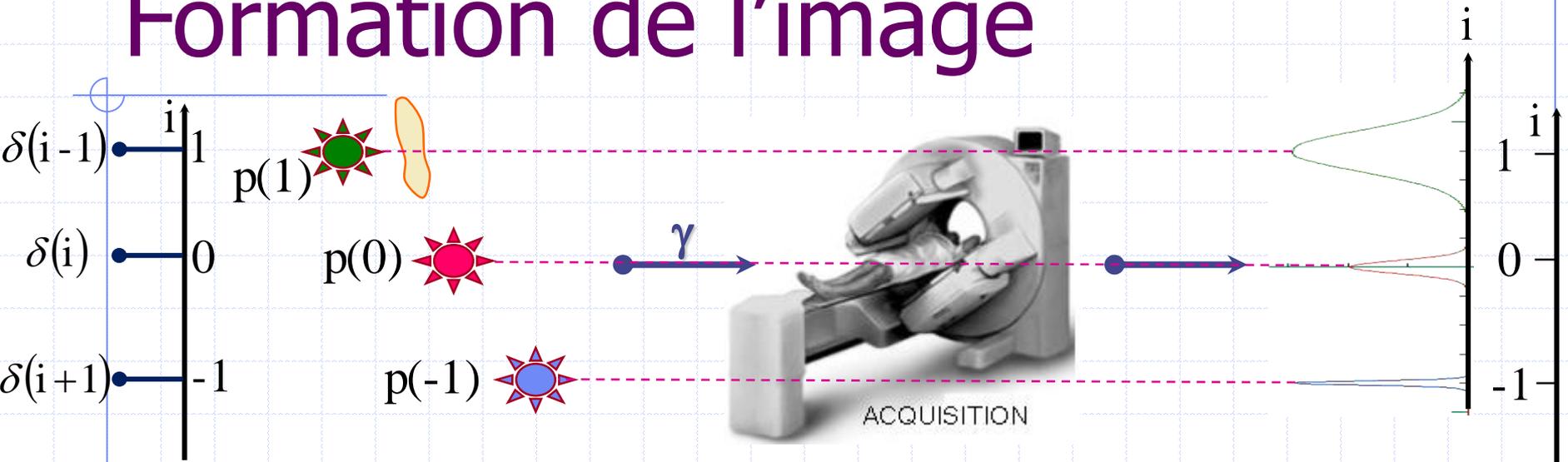
- Réponse d'une  $\gamma$ -caméra = Gaussienne
- LMH de la gaussienne =
  - Résolution
  - Pouvoir séparateur
  - La plus petite période de signal transmise
  - l'inverse de la fréquence spatiale maximale dans l'image
- **LMH linéaire avec distance**(source-collimateur)
- Shannon  $\Rightarrow$  **taille du pixel = LMH/2**

# Formation de l'image



$\delta(i-k) = \text{impulsion centrée en } k$

# Formation de l'image



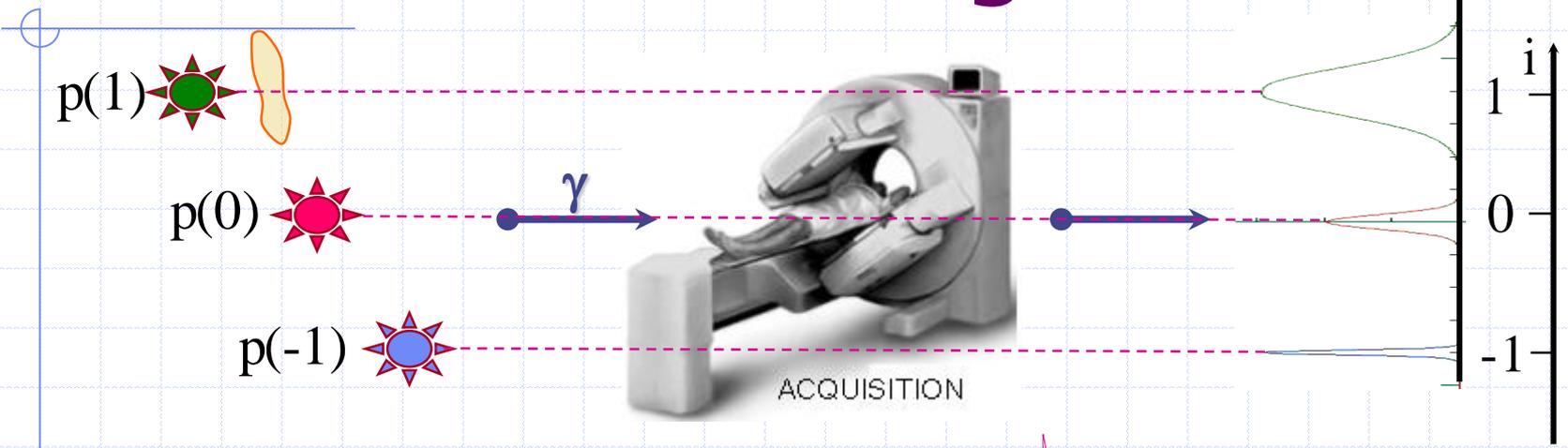
$$p(i) = p(-1)\delta(i+1) + p(0)\delta(i) + p(1)\delta(i-1)$$

exemple :  $i = 1 \Rightarrow p(-1)\delta(2) + p(0)\delta(1) + p(1)\delta(0) = p(1)$

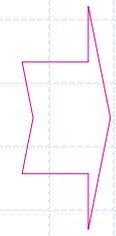
$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k), \quad i \text{ fixé}$$

= 0 sauf si  $k=i$  où  $\delta(0)=1$

# Formation de l'image



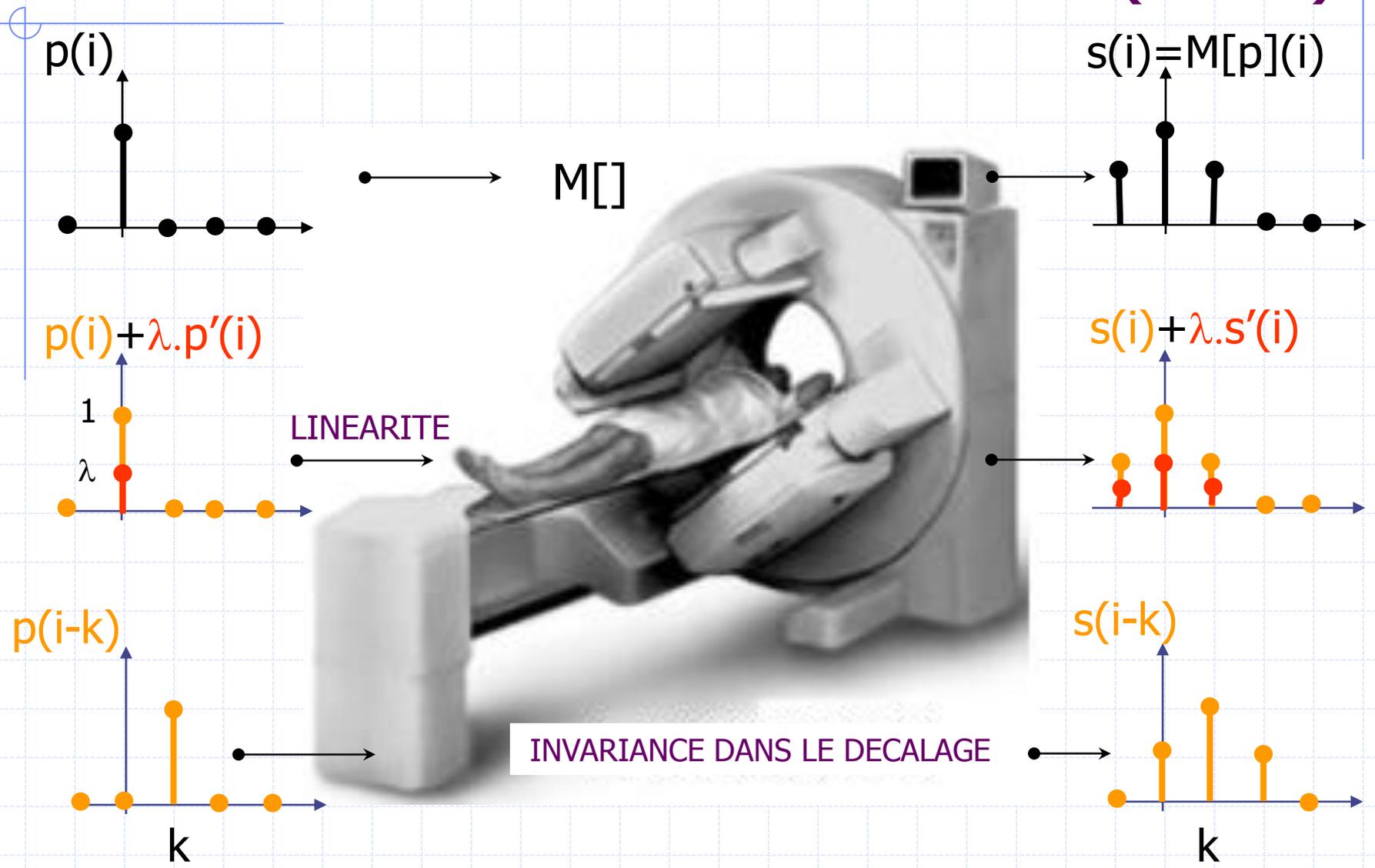
$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k), \quad i \text{ fixé}$$



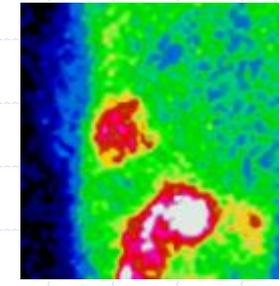
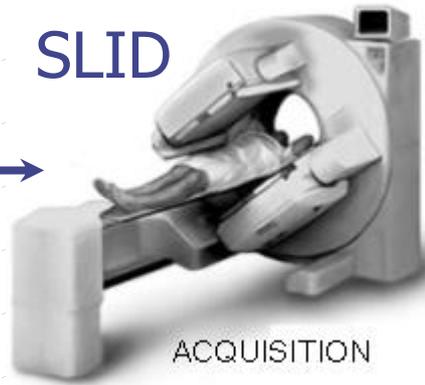
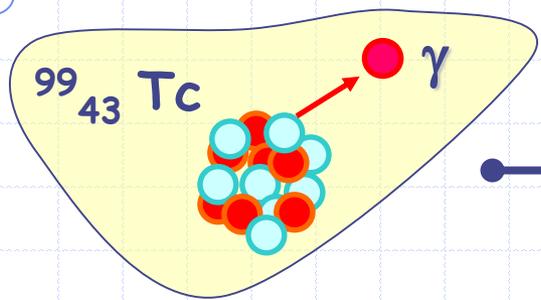
$$s(i) = M[p](i) = ?$$

Pour déterminer  $s$ , il faut faire des hypothèses sur  $M$ , donc sur les caractéristiques de la  $\gamma$ -caméra...

# Caméra $\approx$ linéaire & invariante (SLID)



# Formation de l'image



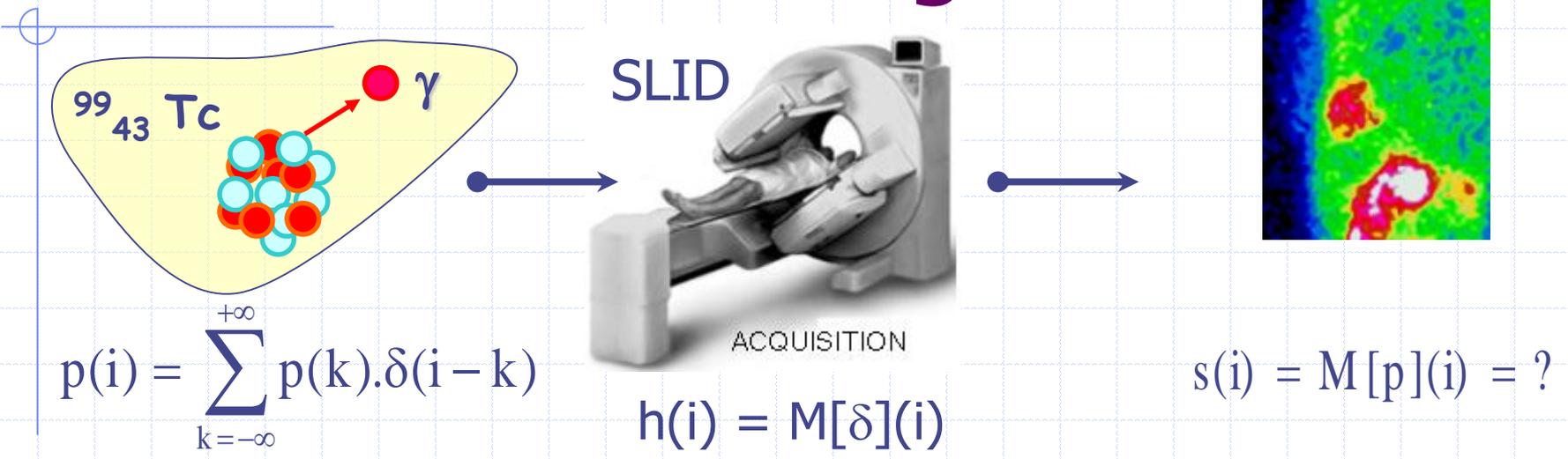
$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i - k)$$

$$h(i) = M[\delta](i)$$

$$s(i) = M[p](i) = ?$$

$$s(i) = M\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i - k)\right]$$

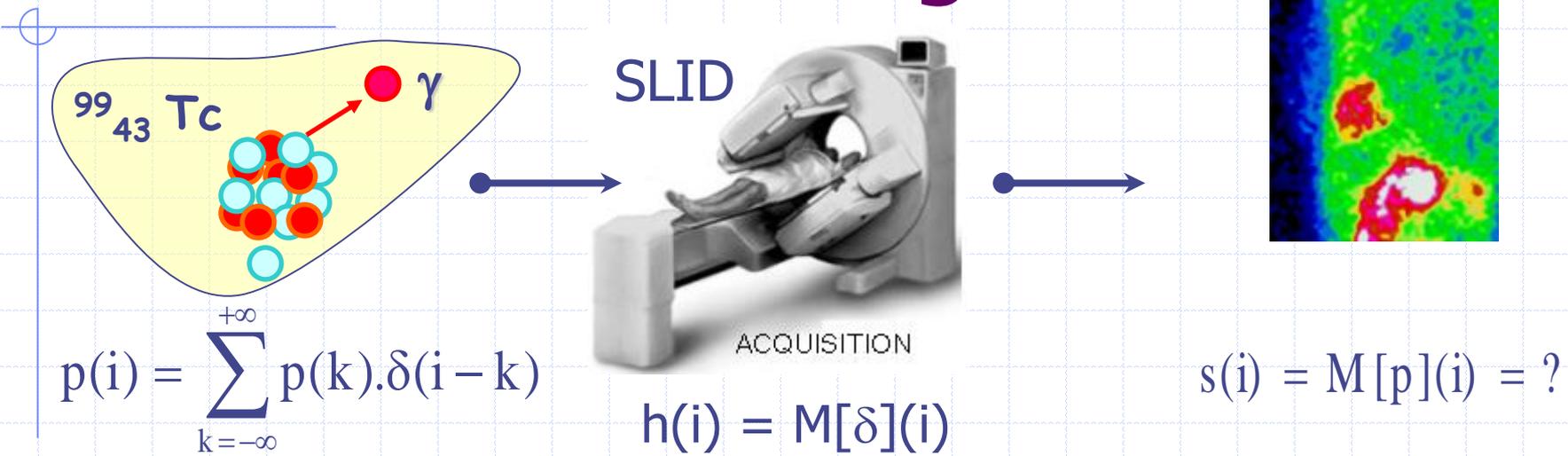
# Formation de l'image



$$s(i) = M\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i - k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot M[\delta(i - k)]$$

linéarité

# Formation de l'image



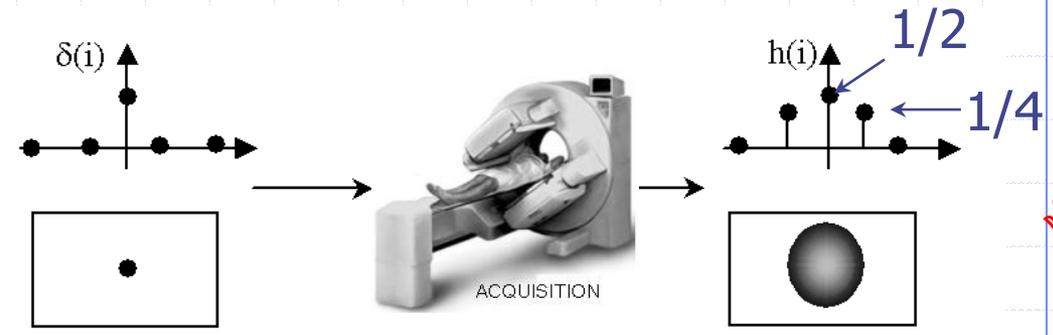
$$s(i) = M\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \underbrace{M[\delta(i-k)]}_{h(i-k)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot h(i-k)$$

invariance dans le décalage

$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot h(i-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(i-k) = (p * h)(i) = (h * p)(i)$$

\* = produit de convolution

# Interprétation

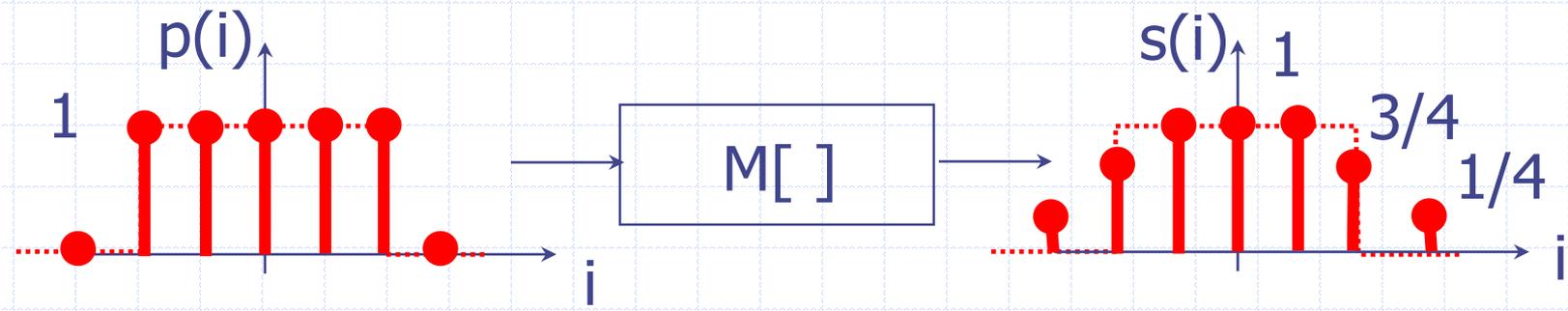


$$s(i) = \sum_{k=-1}^{+1} h(k).p(i-k)$$

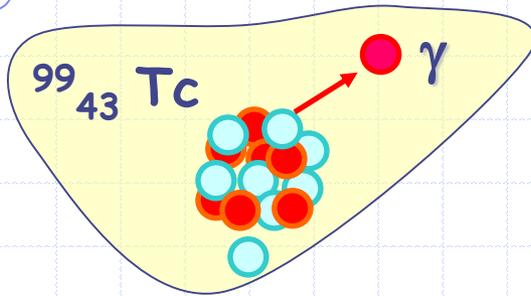
$$s(i) = h(-1).p(i+1) + h(0).p(i) + h(1).p(i-1)$$

$$s(i) = \frac{1}{4}p(i+1) + \frac{1}{2}p(i) + \frac{1}{4}p(i-1) = \frac{2.p(i) + p(i+1) + p(i-1)}{4}$$

$s$  = moyenne pondérée par  $h$  de la grandeur physique  $p$



# Formation de l'image

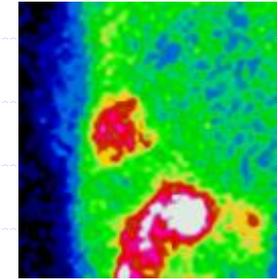


$p(i)$

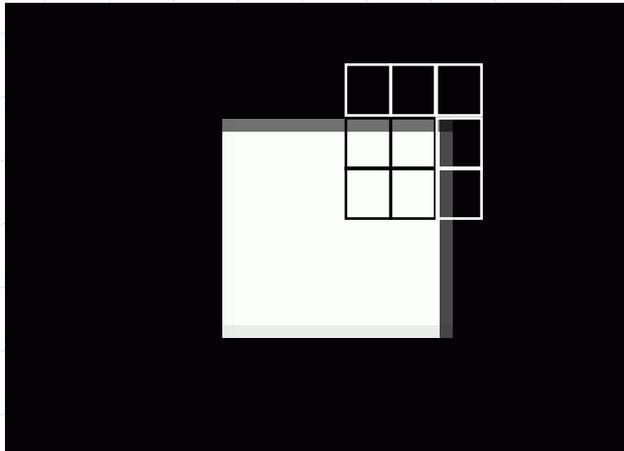
SLID



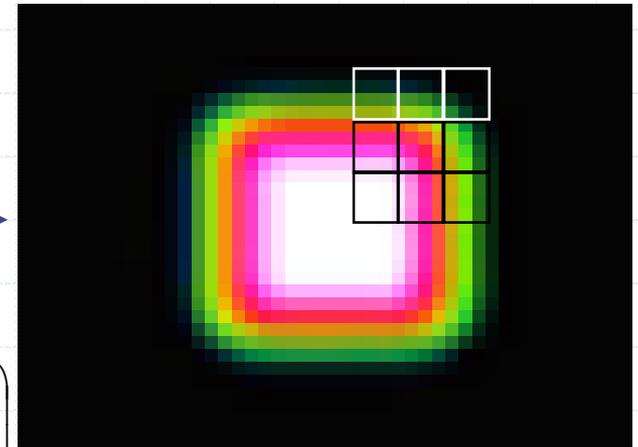
$s(i)$



$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = (p * h)(i)$$



$$h(i, j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$



# Exemple de formation d'image



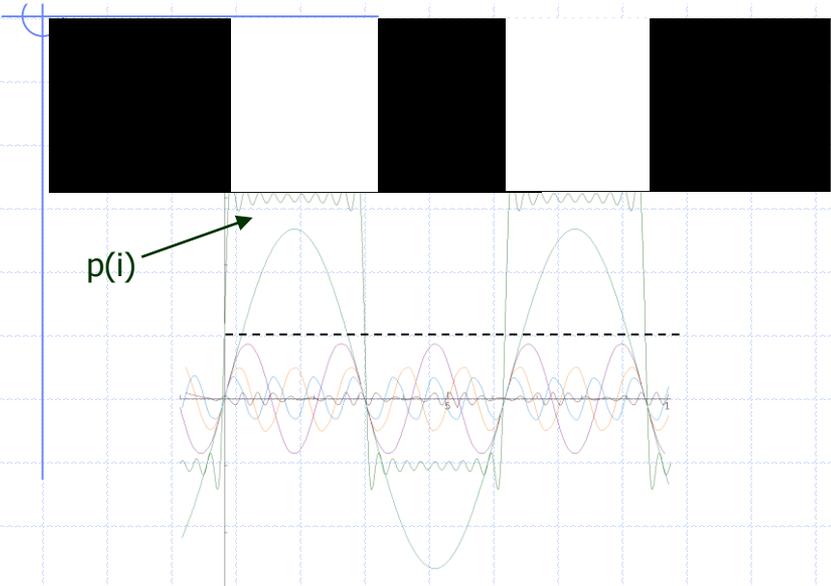
$$h(i, j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

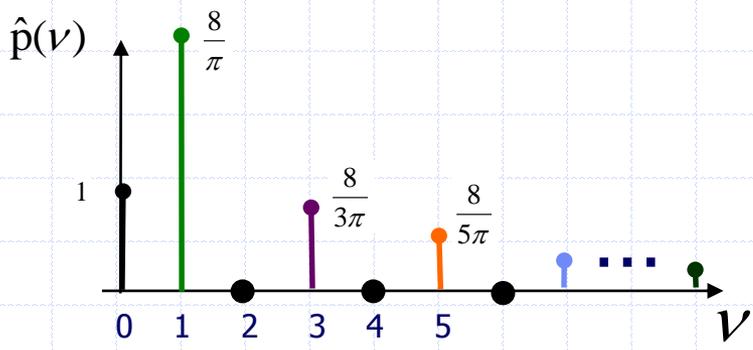
$\Rightarrow S(i, j) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 12 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

# Interprétation en fréquence

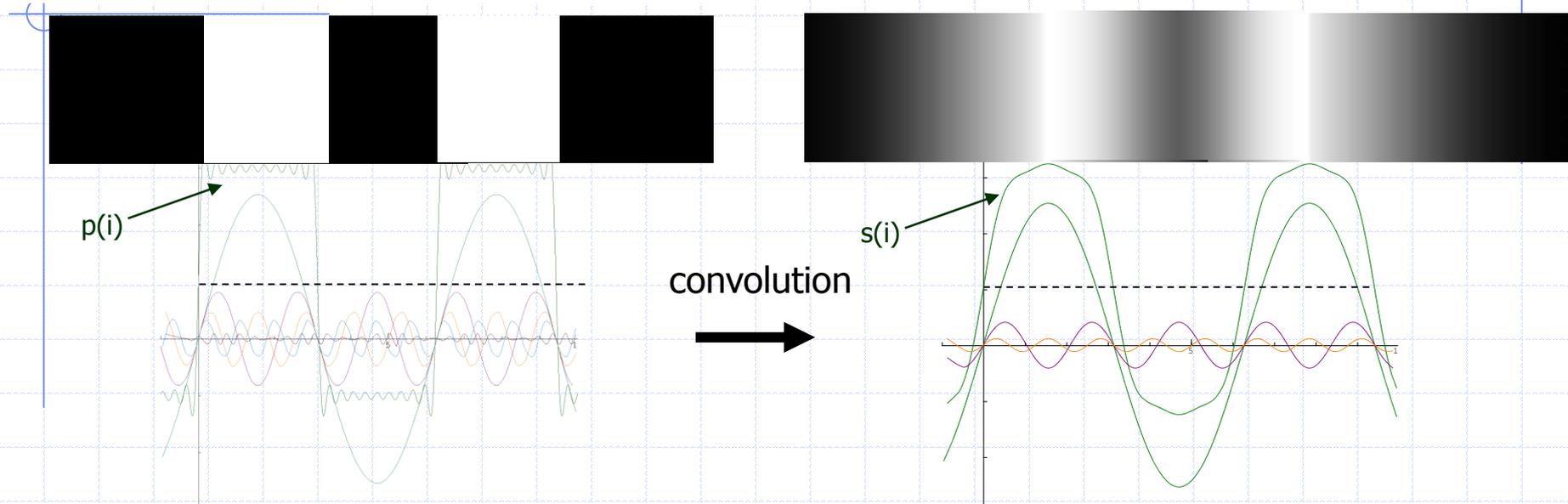


$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[ \sin(i) + \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{5} \sin(5i) + \dots \right]$$



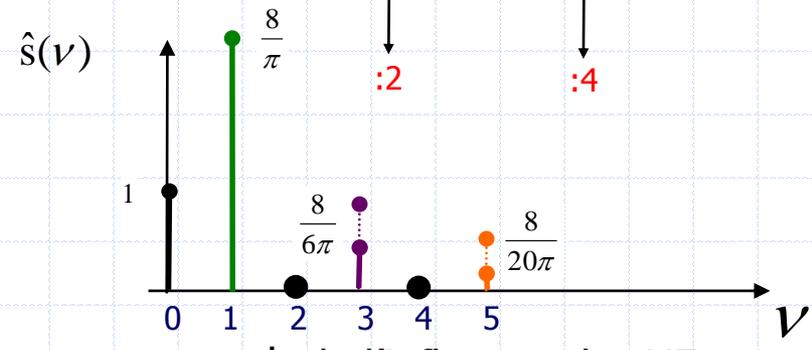
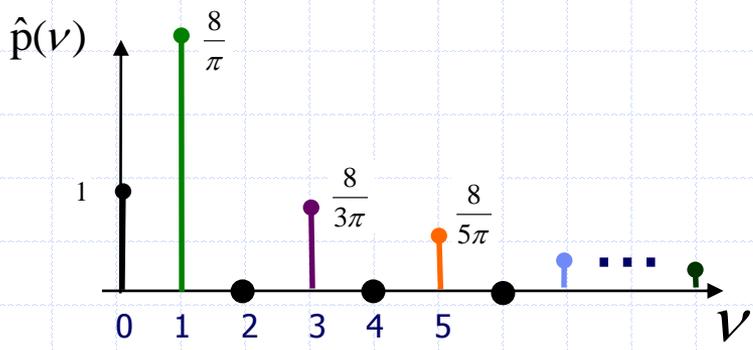
Ce graphe représentant les amplitudes  $\hat{p}(\nu)$  de chaque composante de fréquence  $\nu$  est appelé **spectre** (ou **transformée de Fourier**) du signal  $p(i)$

# Interprétation en fréquence



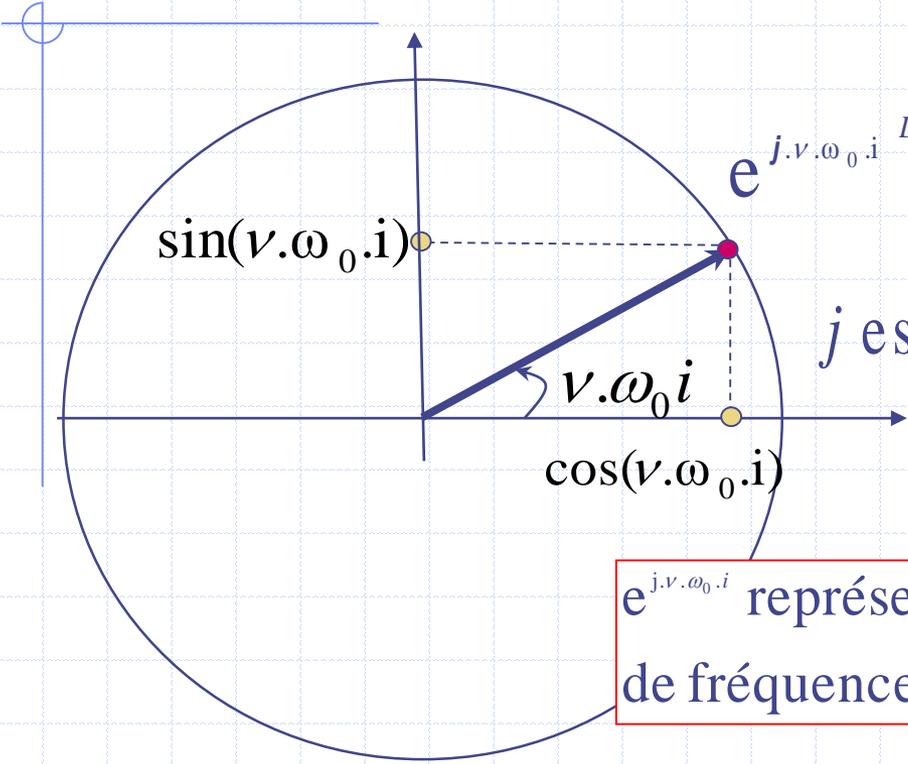
$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[ \sin(i) + \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{5} \sin(5i) + \dots \right]$$

$$s(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[ \sin(i) + \frac{1}{6} \sin(3i) + \frac{1}{20} \sin(5i) \right]$$



↓ de l'influence des HF

# Rappel : expo. complexe & TFD



$$e^{j.v.\omega_0.i} \stackrel{DEF}{=} \cos(v.\omega_0.i) + j.\sin(v.\omega_0.i)$$

$j$  est le nombre complexe de carré  $-1$   
 $f_v = v.f_0 = v.\omega_0 / (2\pi)$

$e^{j.v.\omega_0.i}$  représente la fonction circulaire (sin ou cos) de fréquence  $v$  fois la fréquence  $f_0 =$  harmonique  $v$

$$p(i) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} \hat{p}(v).e^{j.(v.\omega_0)i} \Leftrightarrow p(i) = \frac{1}{N} \left[ \hat{p}(0) + \hat{p}(1).e^{j.\omega_0.i} + \dots + \hat{p}(N-1).e^{j.(N-1).\omega_0.i} \right]$$

où  $\hat{p}(v) = \sum_{k=0}^{N-1} p(k).e^{-j.(v.\omega_0).k} \Leftrightarrow \hat{p}(v) = p(0) + p(1).e^{-j.\omega_0.i} + \dots + p(N-1).e^{-j.(N-1).\omega_0.i}$

# Théorème de convolution

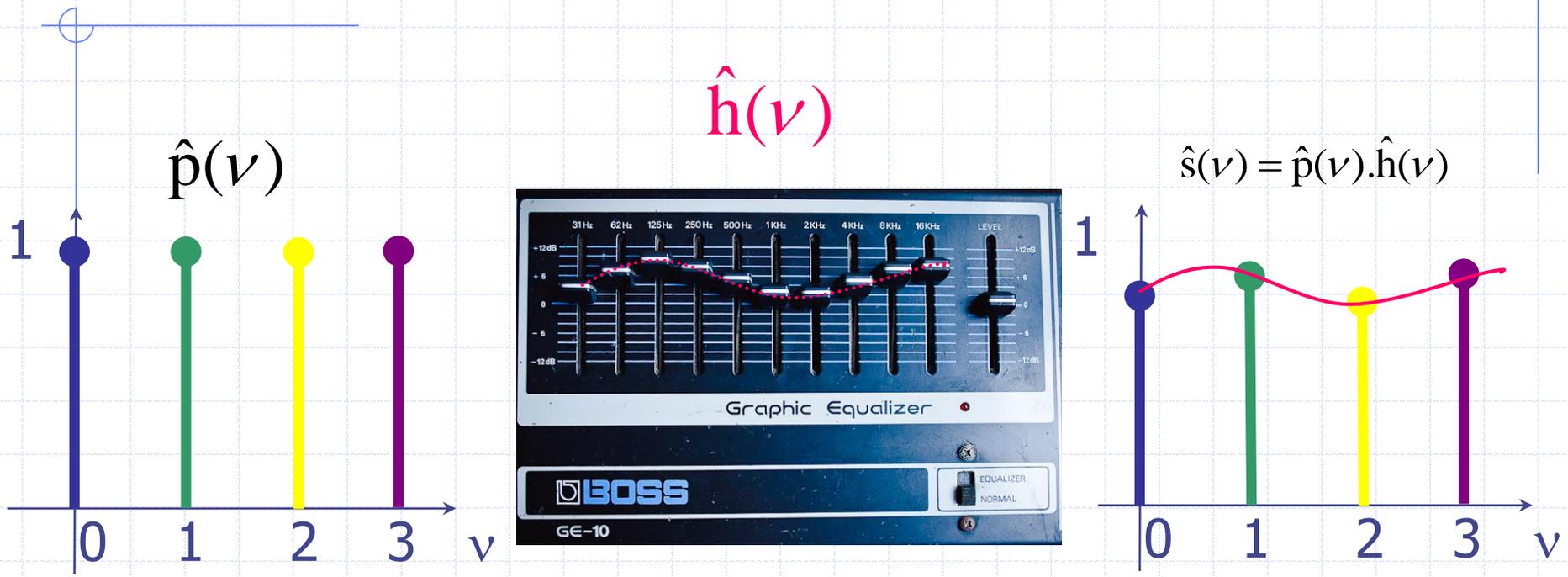
$$p(i) = e^{j \cdot (\nu \omega_0) i} \rightarrow \boxed{M[ ]} \rightarrow s(i) = \sum_k h(k) \cdot p(i - k)$$

$$s(i) = \sum_k h(k) \cdot e^{j \cdot (\nu \omega_0) \cdot (i - k)} = \underbrace{e^{j \cdot (\nu \omega_0) \cdot i}}_{p(i)} \underbrace{\sum_k h(k) \cdot e^{-j \cdot (\nu \omega_0) \cdot k}}_{\hat{h}(\nu)}$$

$$p(i) = e^{j \cdot (\nu \omega_0) i} \Rightarrow s(i) = \hat{h}(\nu) \cdot p(i)$$

Un SLID agit sur l'harmonique  $\nu$  en l'amplifiant par la **réponse en fréquence** en  $\nu$  :  $\hat{h}(\nu)$   
 (*MTF = Modulation Transfer Function*)

# Théorème de convolution

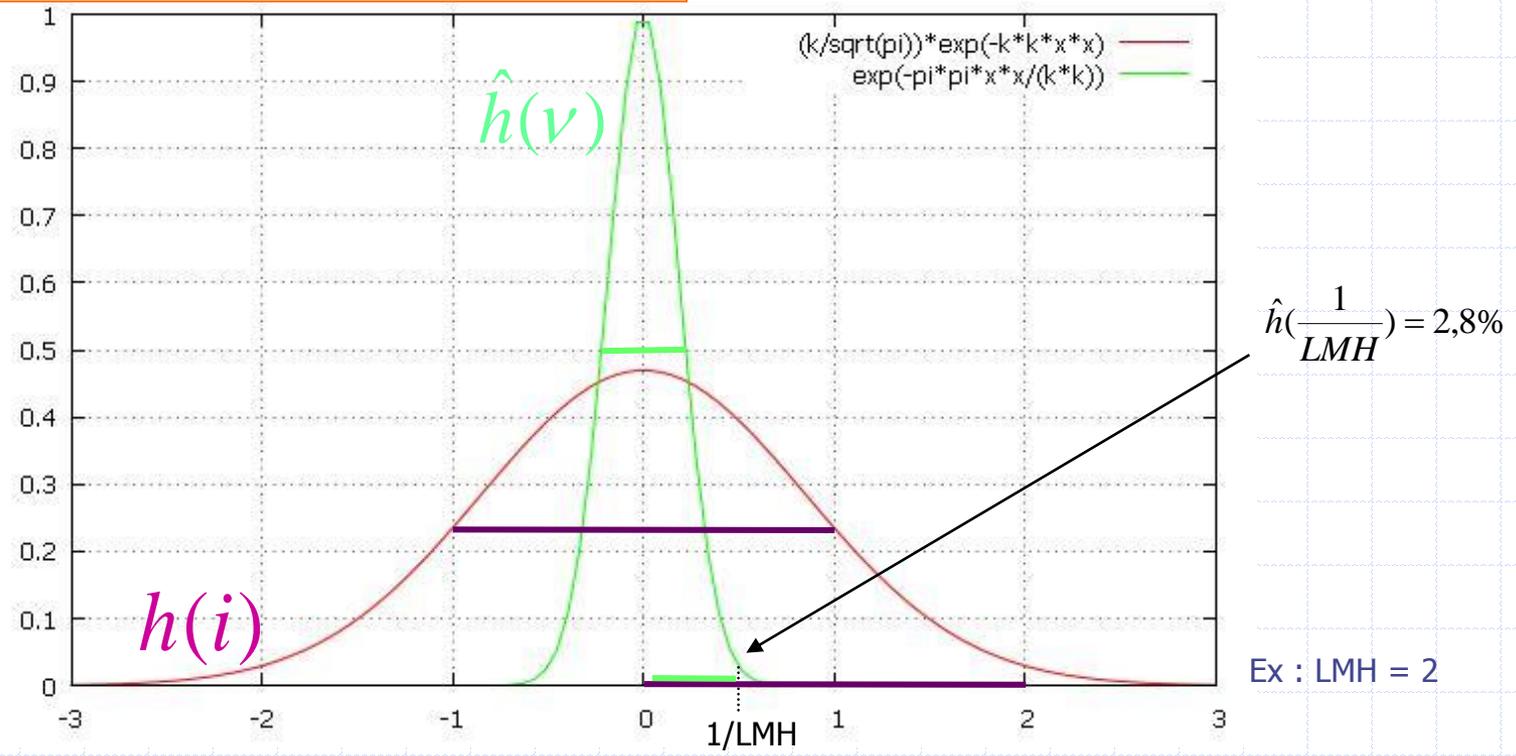


$\hat{s}(v)$  = multiplication par  $\hat{h}(v)$  de la TF de la grandeur physique  $\hat{p}(v)$

s = convolution par h de la grandeur physique p

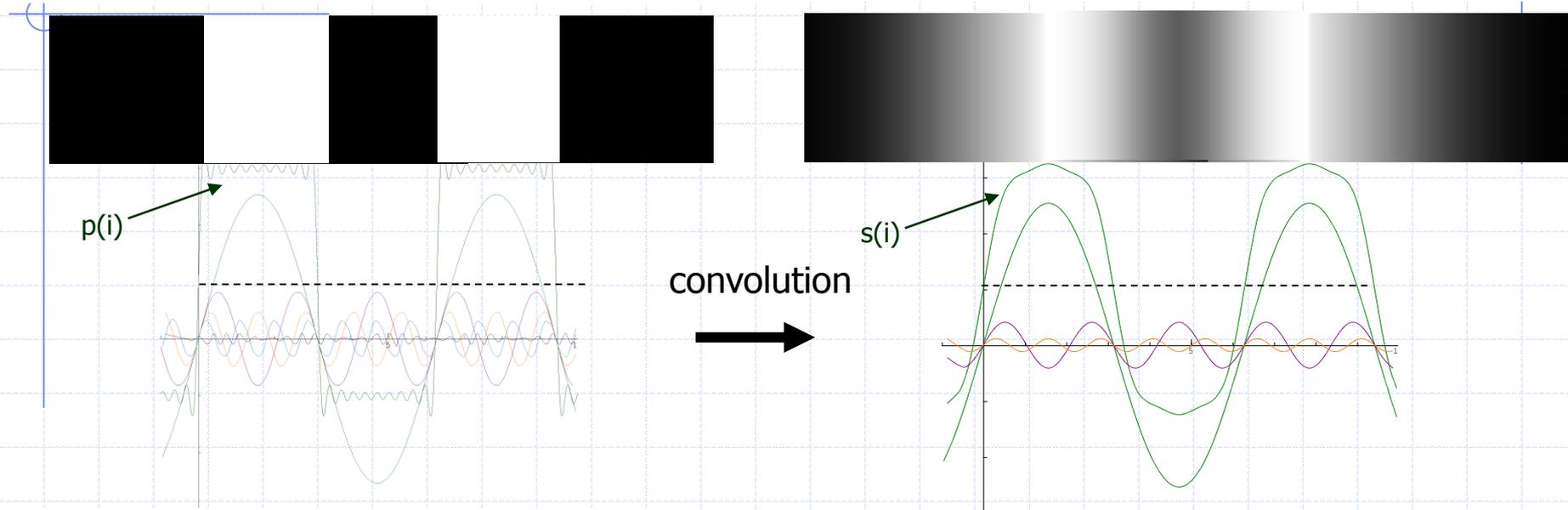
# TF d'une gaussienne

$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-(C \cdot i)^2} \Leftrightarrow \hat{h}(v) = e^{-\left(\frac{\pi \cdot v}{C}\right)^2} \quad C = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$



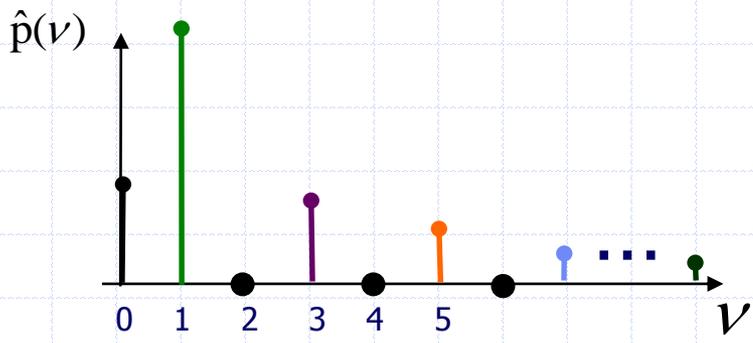
La TF d'une réponse impulsionnelle gaussienne  $\sigma$  est une gaussienne  $\sigma'$  avec  $\sigma\sigma' = 1/(2\pi)$  soit  $LMH \cdot LMH' = 4 \cdot \ln 2 / \pi = 0.9 \approx 1$

# Interprétation en fréquence

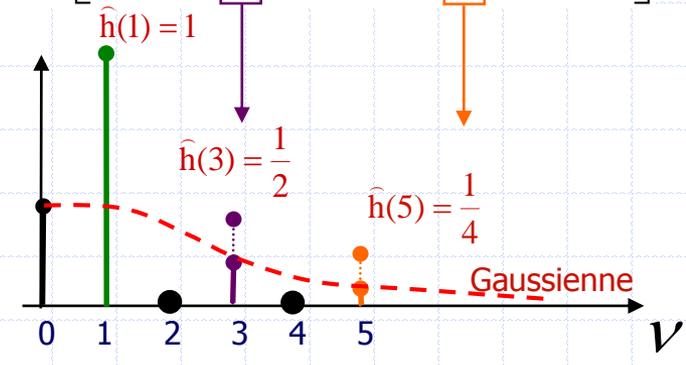


$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[ \sin(i) + \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{5} \sin(5i) + \dots \right]$$

$$s(i) = 1 + \frac{8}{\pi} \left[ \sin(i) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sin(3i) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \sin(5i) \right]$$



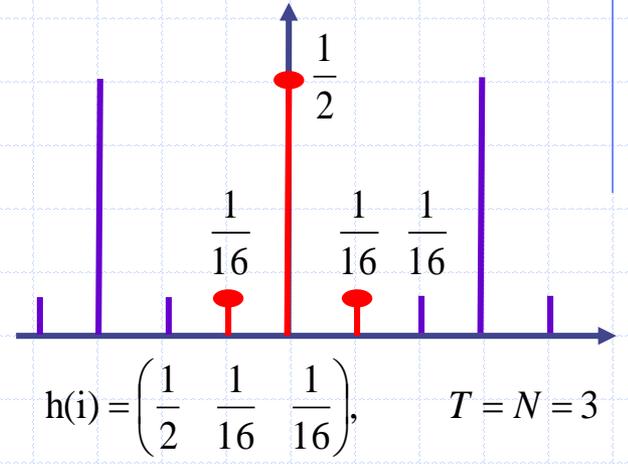
$$\hat{s}(\nu) = \hat{p}(\nu) \cdot \hat{h}(\nu)$$





# Exemple de formation d'image

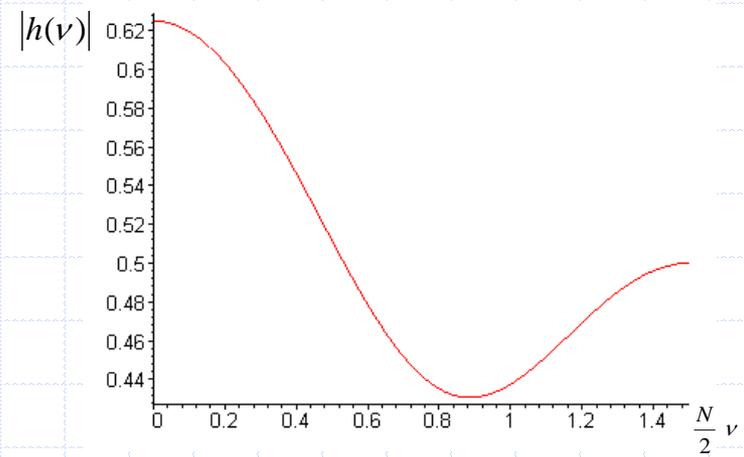
$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow S(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 12 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$



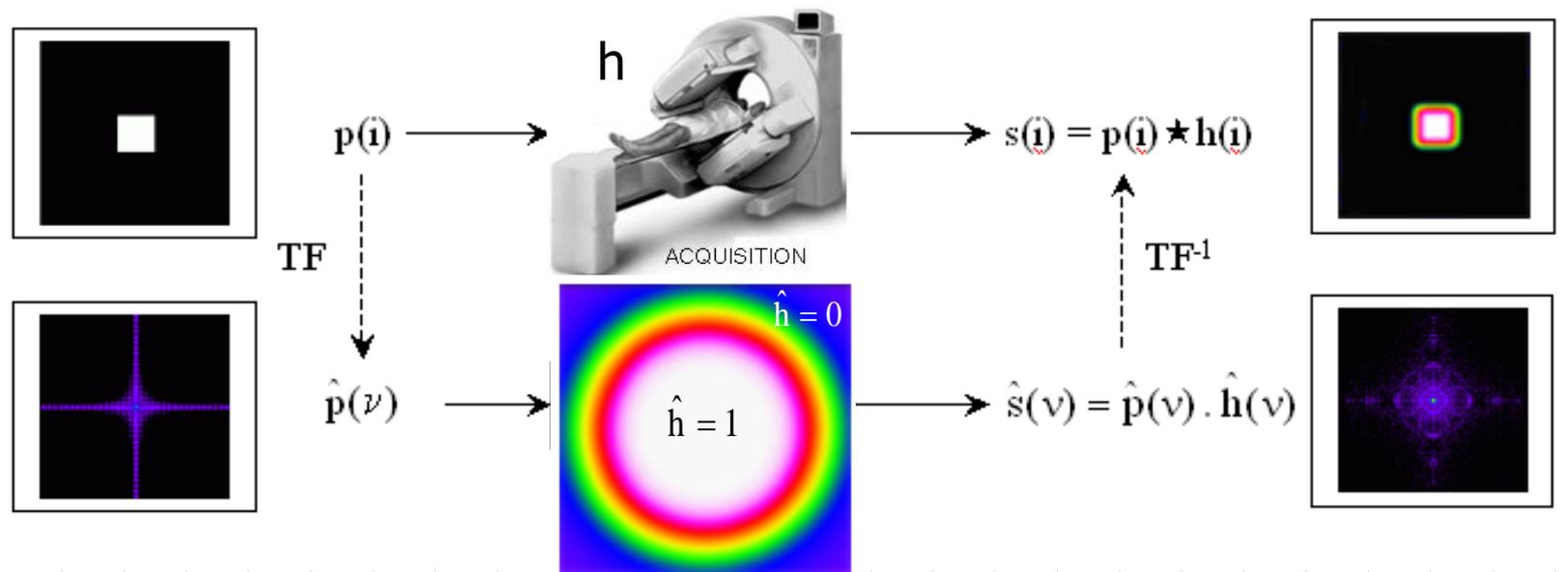
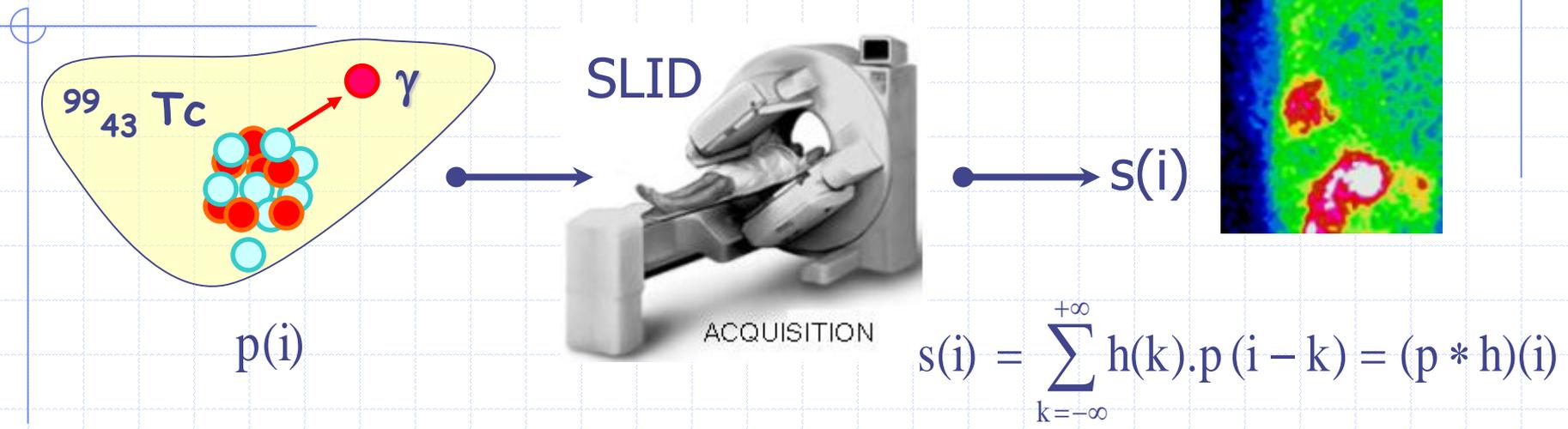
$$h(\nu) = \sum_{k=0}^2 h(k) \cdot e^{-j \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\nu\right) \cdot k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right) \right] + \frac{1}{16} \left[ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right) - j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right) \right]$$

$$h(\nu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right) \right] - j \frac{1}{16} \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right) \right]$$

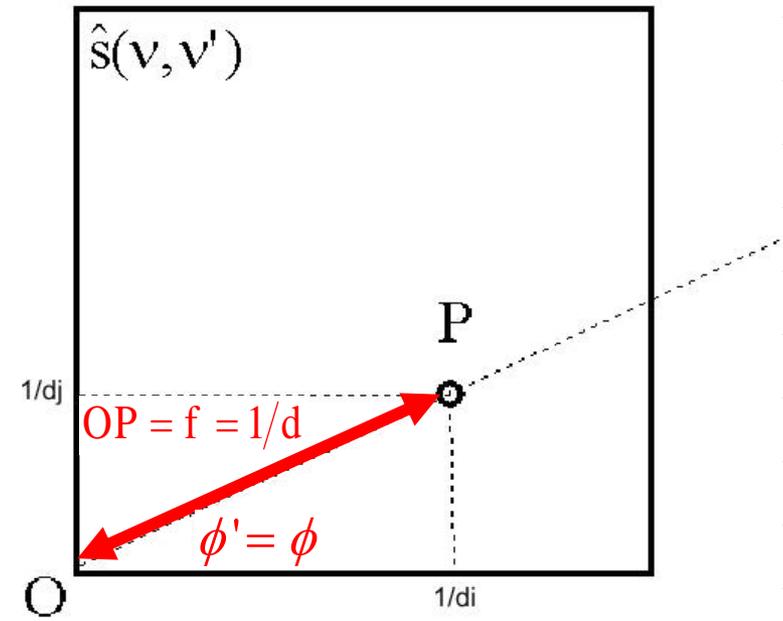
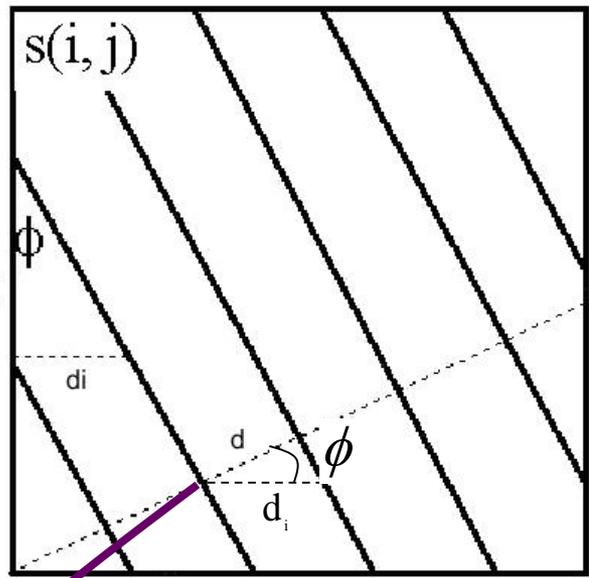
$$|h(\nu)| = \sqrt{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right) \right] \right)^2 + \left( \frac{1}{16} \left[ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right) \right] \right)^2}$$



# Réponses impulsionnelle et en fréquence



# Interprétation d'une image en fréquence



$$\text{tg } \phi = \frac{d_j}{d_i}$$

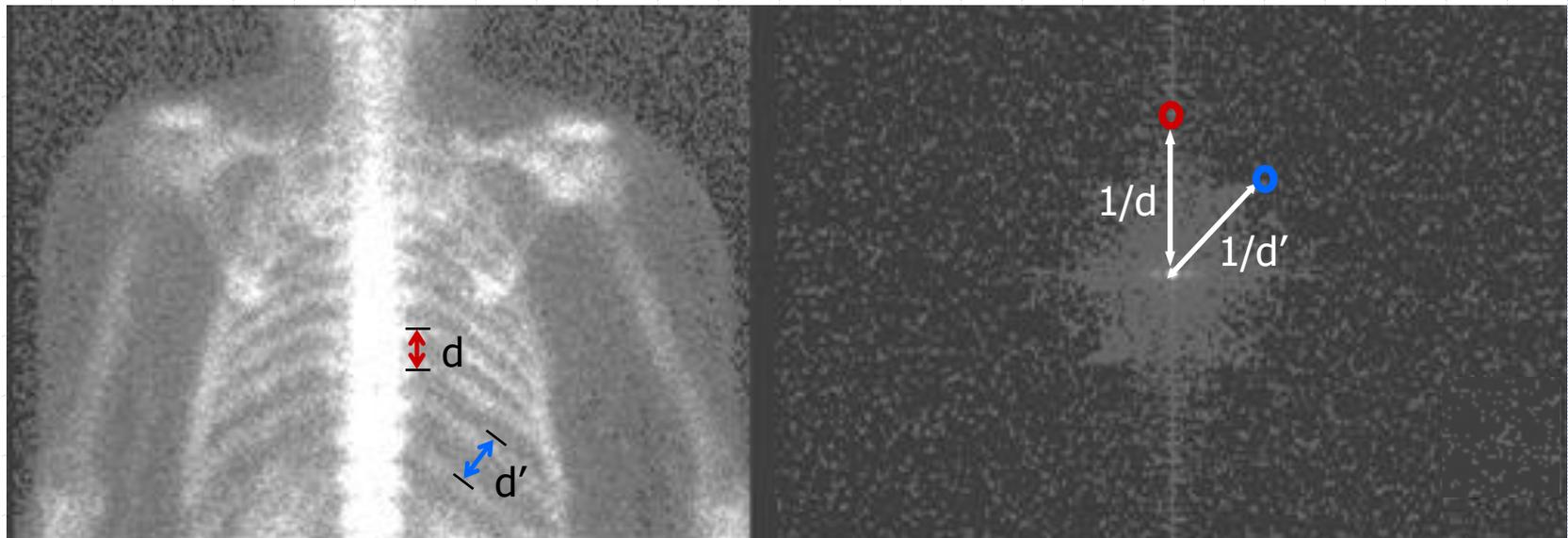
$$\text{tg } \phi' = \frac{1/d_j}{1/d_i} \Rightarrow \phi' = \phi$$

$$\cos \phi = \frac{d}{d_i}$$

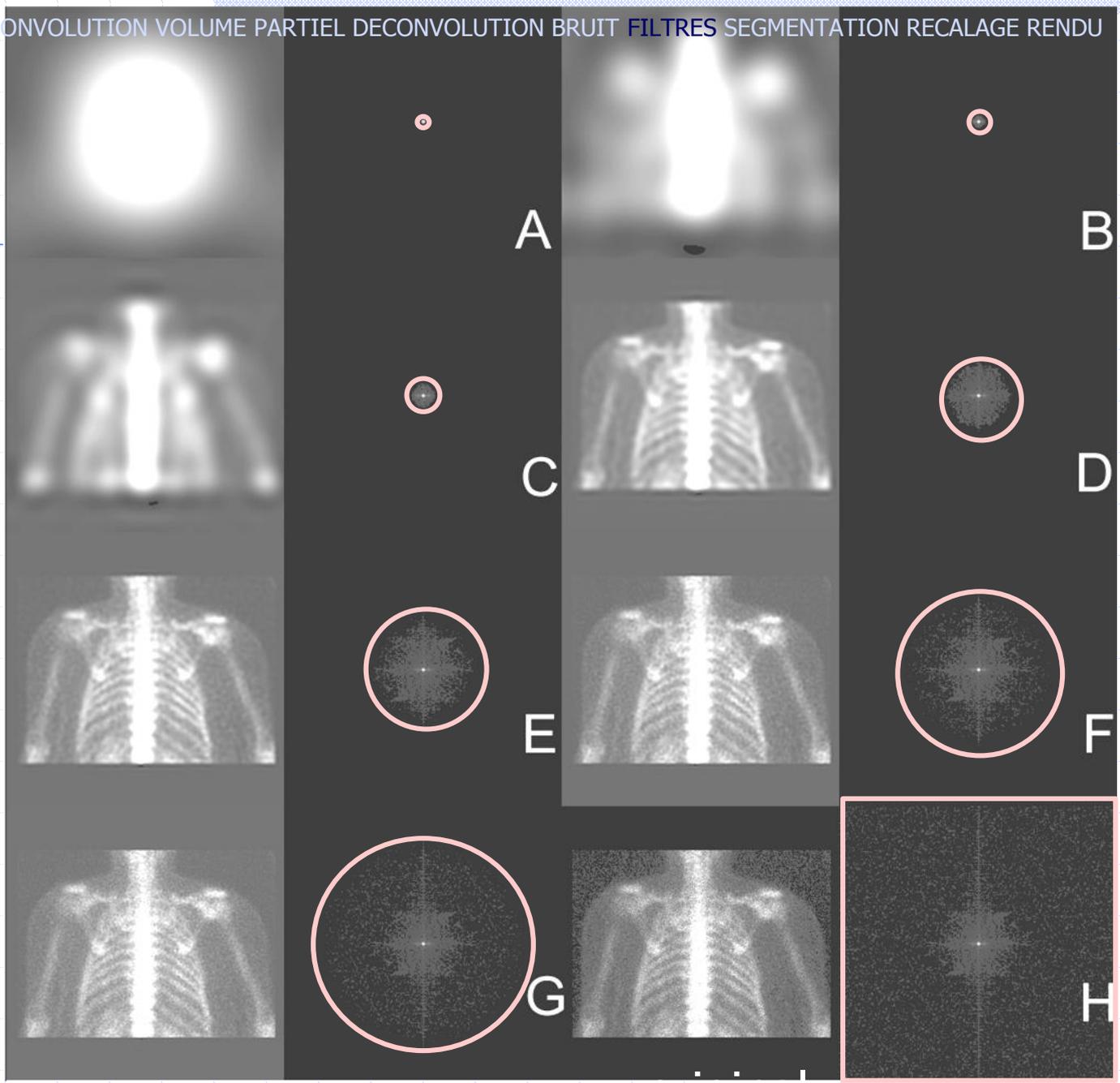
$$\cos \phi = \frac{1/d_i}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{d}$$

# donc en représentation en fréquence...

Les signaux constitués de **droites parallèles** espacées de  $d$  (arcs post. des côtes) sont représentées dans l'espace de Fourier par **un seul point** localisé sur la droite perpendiculaire aux signaux (axe vertical donc) et à la distance  $1/d$  de l'origine



**Arcs postérieurs des côtes**  
**Arcs moyens des côtes à 45%**



De A à H, l'image est reconstruite en prenant en compte de plus en plus de fréquences.

# FORMATION D'UNE IMAGE

- **Convolution** du signal acquis par la réponse impulsionnelle de la  $\gamma$ -caméra
  - **Moyenne pondérée** dans un voisinage du signal RA par les amplitudes de la réponse impulsionnelle (gaussienne)
  - Agit en **lissant** les contours des parties du signal RA acquis

|||

- **Multiplication** du spectre du signal acquis par la réponse en fréquence gaussienne de la  $\gamma$ -caméra
  - Amplification des composantes fréquentielles du signal par les amplitudes de la réponse en fréquence (gaussienne)
  - Agit en diminuant l'influence des HF

# Cq1: Résolution et distance



$s$  = moyenne pondérée par  $h$  de la grandeur physique  $p$

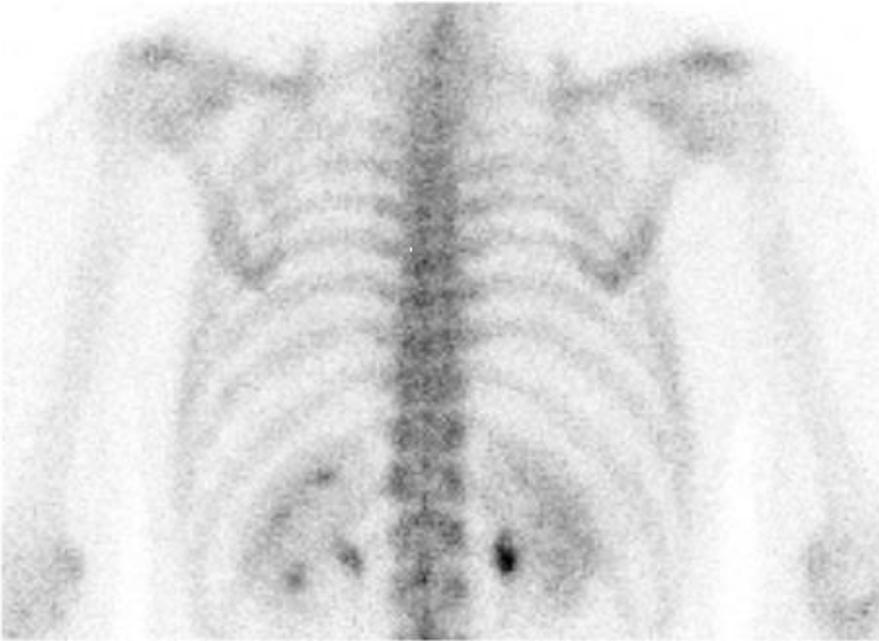
- plus le détecteur est **proche** du patient...
- plus la réponse impulsionnelle est **étroite**
- ...et plus l'image est **fidèle** à l'objet !

- Sinon : lissage = **flou** !

$$\sigma = k.D + k'$$

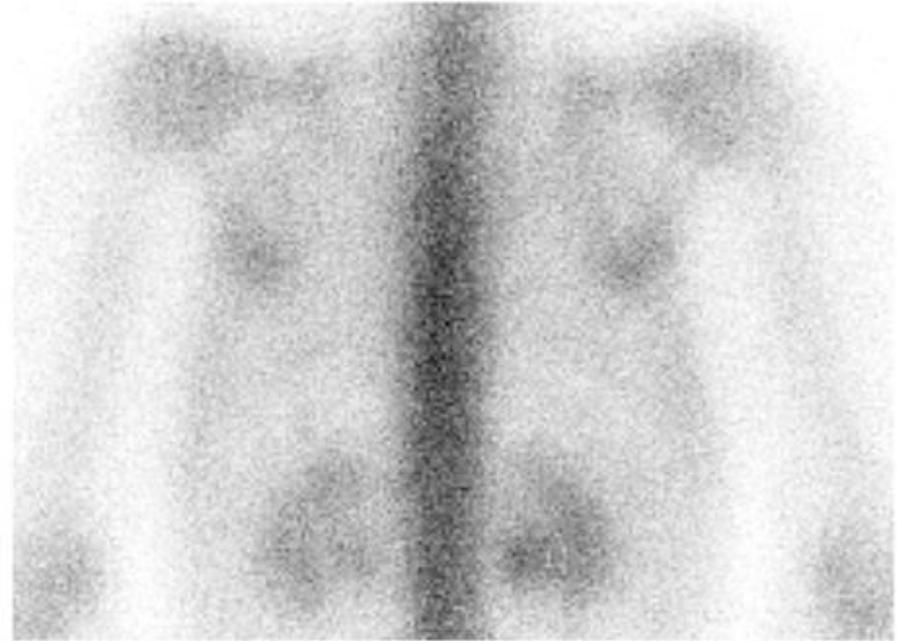


# Cq1: Résolution et distance



FP  
AU CONTACT

DT

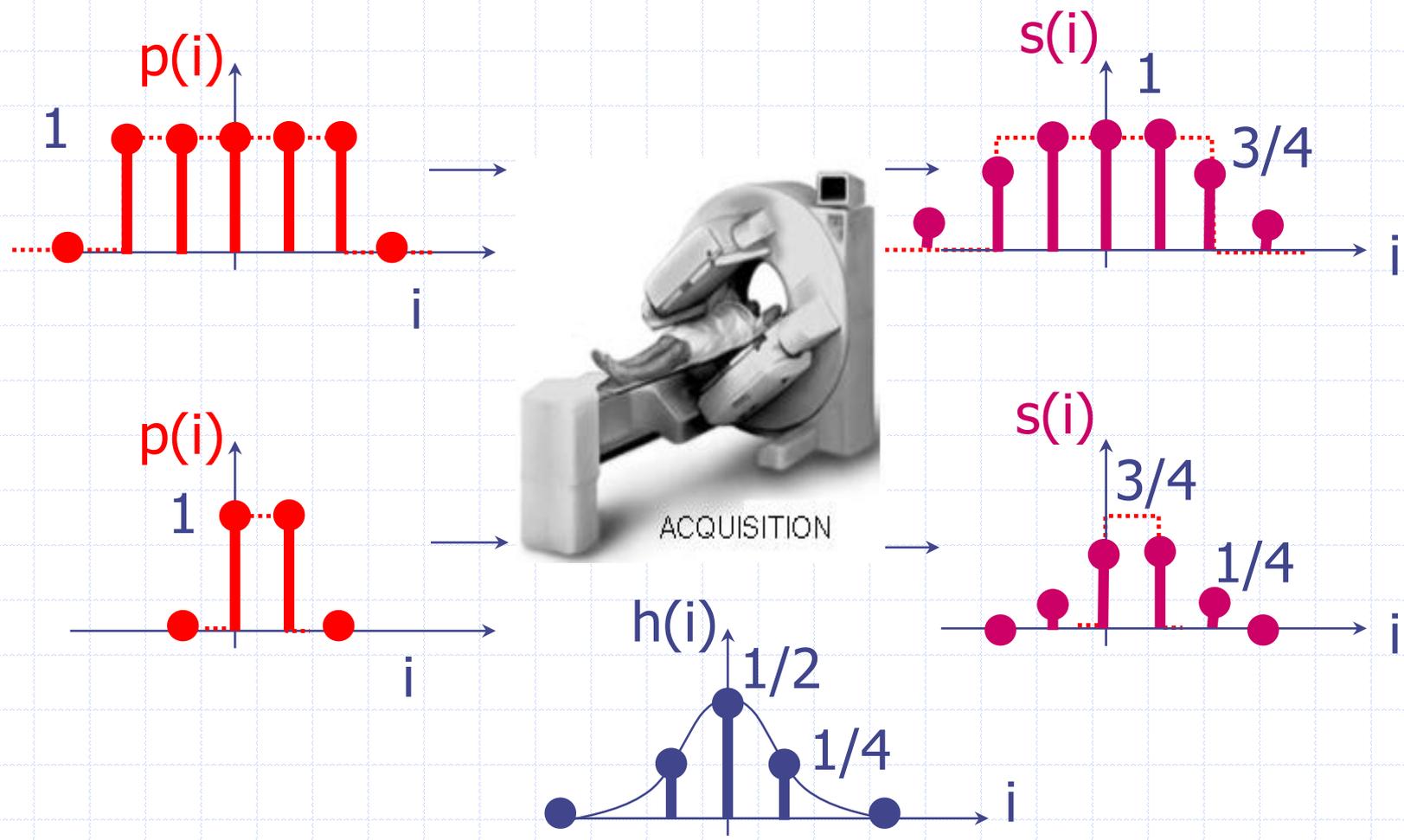


FPOST  
A 50CM

DT

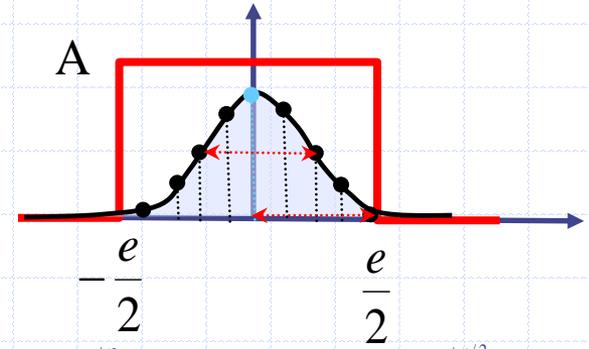
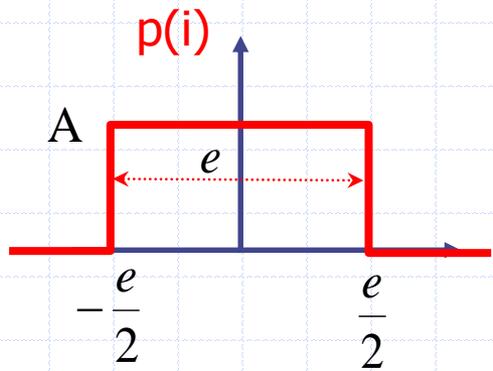
# Cq2: « Effet de volume partiel »

Approche intuitive, aspect qualitatif :



# Cq2: « Effet de volume partiel »

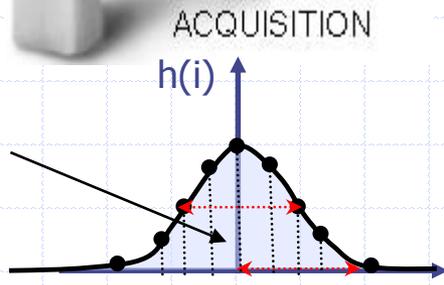
Approche intuitive, si  $e/2 > LMH$  :



$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(0-k) = A. \sum_{k=-e/2}^{+e/2} h(k) \approx A$$

Le centre de l'image est transmis

$$\text{Surface} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2.i^2} = 1$$

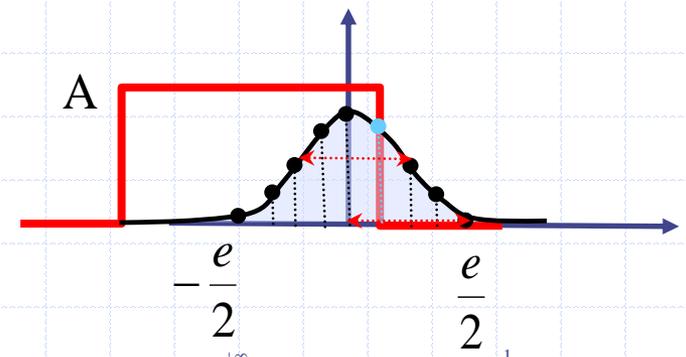


$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2.i^2}$$

$$C = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

98% de l'intégrale d'une gaussienne se trouve entre  $\pm LMH$  :

$$\sum_{k=-LMH}^{LMH} h(k) \approx 1$$

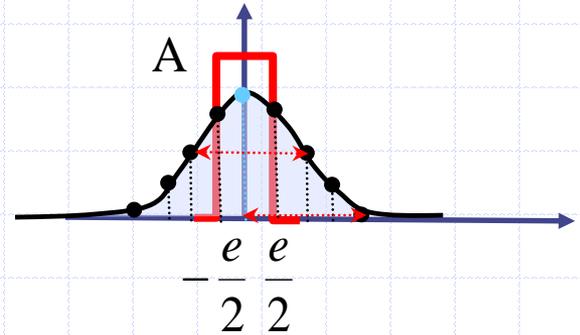
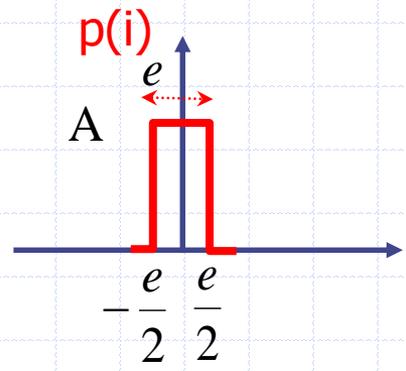


$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = A. \sum_{k=-e/2}^i h(k) < A$$

Les bords de l'image sont sous-estimés

# Cq2: « Effet de volume partiel »

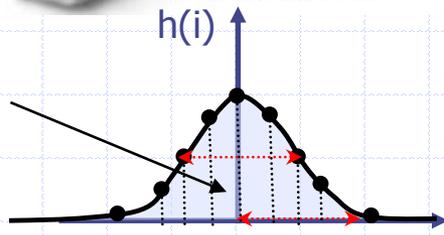
Approche intuitive, si  $e/2 < LMH$  :



$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(0-k) = A. \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k) < A$$

Le centre de l'image est sous-estimé par un facteur CR :

$$\text{Surface} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2.i^2} = 1$$



$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2.i^2}$$

$$C = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

$$CR = \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k)$$

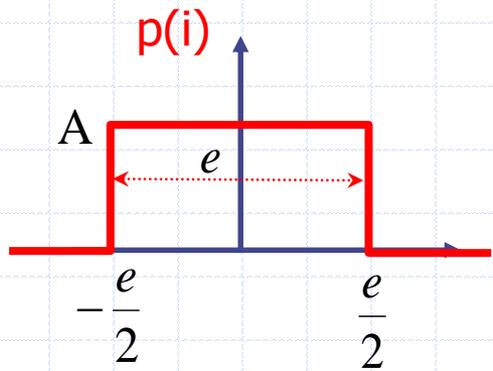
$$CR < 1 \text{ si } \frac{e}{2} < LMH$$

# Cq2: « Effet de volume partiel »



Généralisation :

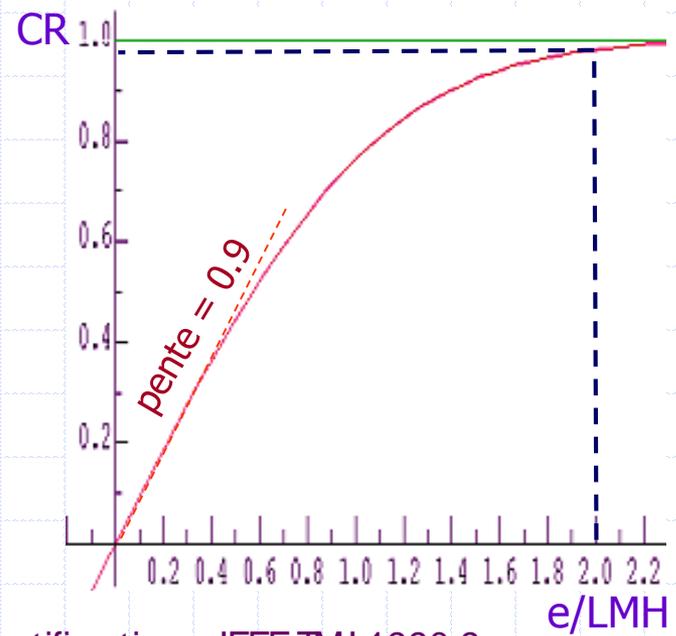
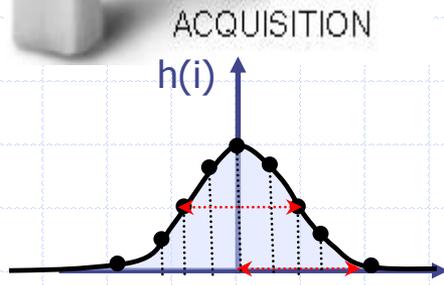
$s(0)$  est le produit du signal A par un Coefficient de Restauration CR:



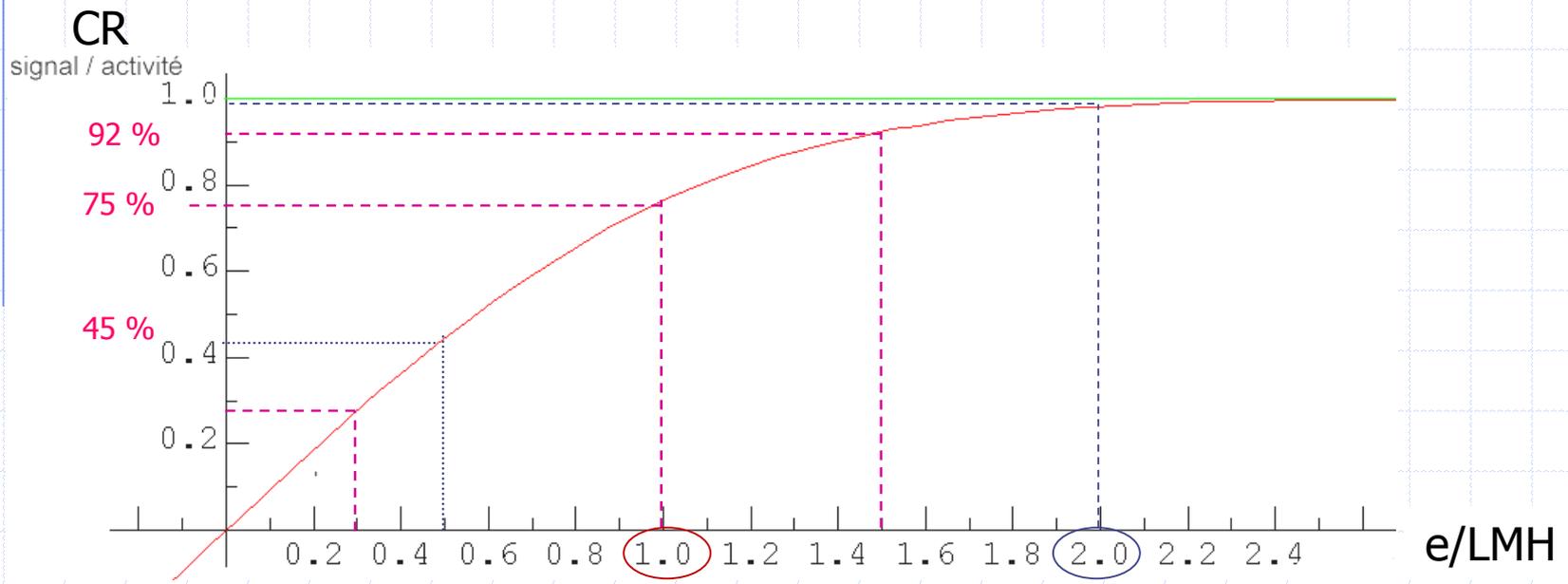
$$CR(e) = \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k)$$

$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \cdot i^2}$$

$$C = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH}$$



# Cq3: Coefficient de Recouvrement

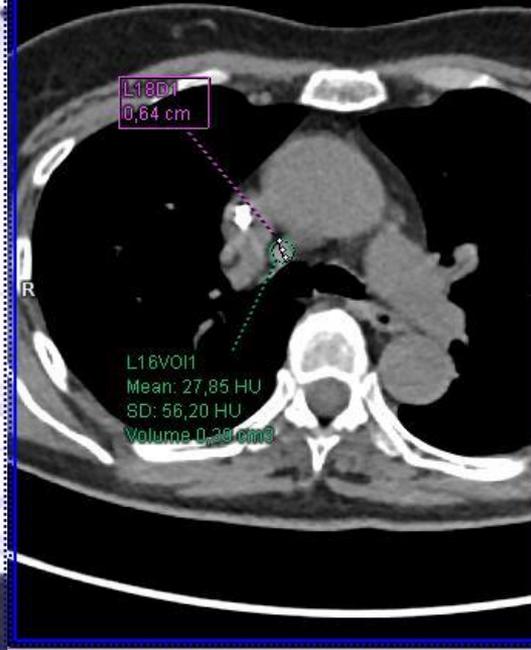


TEP	1	2	4	6	8	(mm)
CZT		3	6	9	12	(mm)
SPECT Anger		7	15	22	30	(mm)
Vraie fixation		2,2	1,3	1,1	1	(x signal)

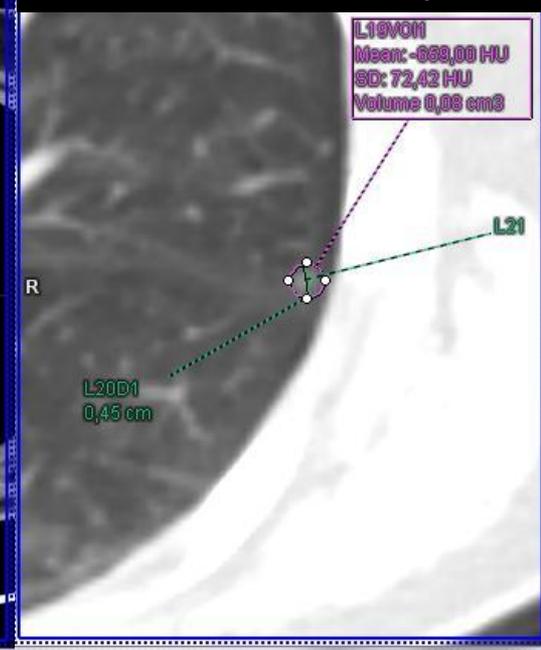
$\varnothing=25.3 \text{ mm} \Rightarrow \text{CR}=1$



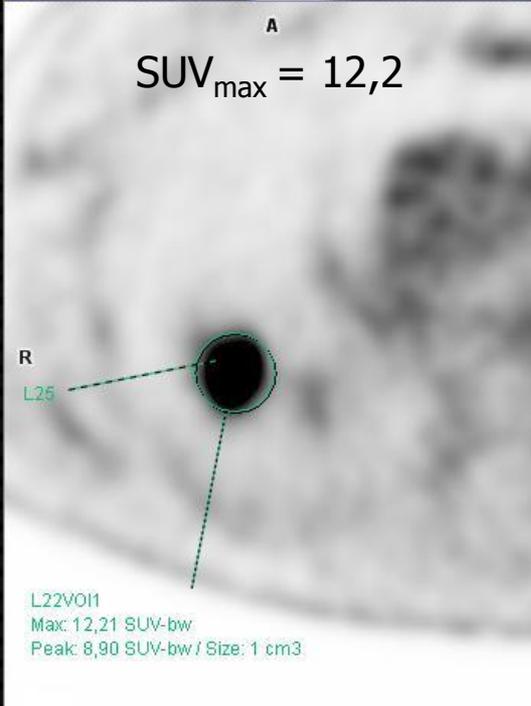
$\varnothing=6.4 \text{ mm} \Rightarrow \text{CR}=1/0.92$



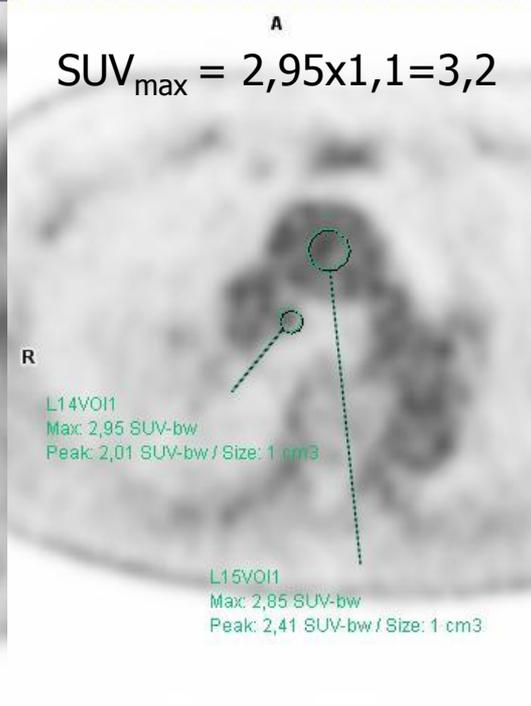
$\varnothing=4.5 \text{ mm} \Rightarrow \text{CR}=1/0.75$



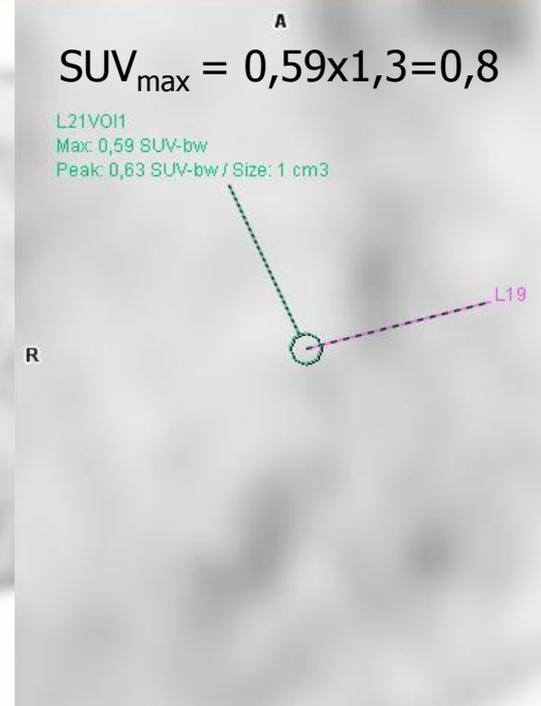
$\text{SUV}_{\text{max}} = 12,2$



$\text{SUV}_{\text{max}} = 2,95 \times 1,1 = 3,2$



$\text{SUV}_{\text{max}} = 0,59 \times 1,3 = 0,8$



# Cq2: « Effet de volume partiel »

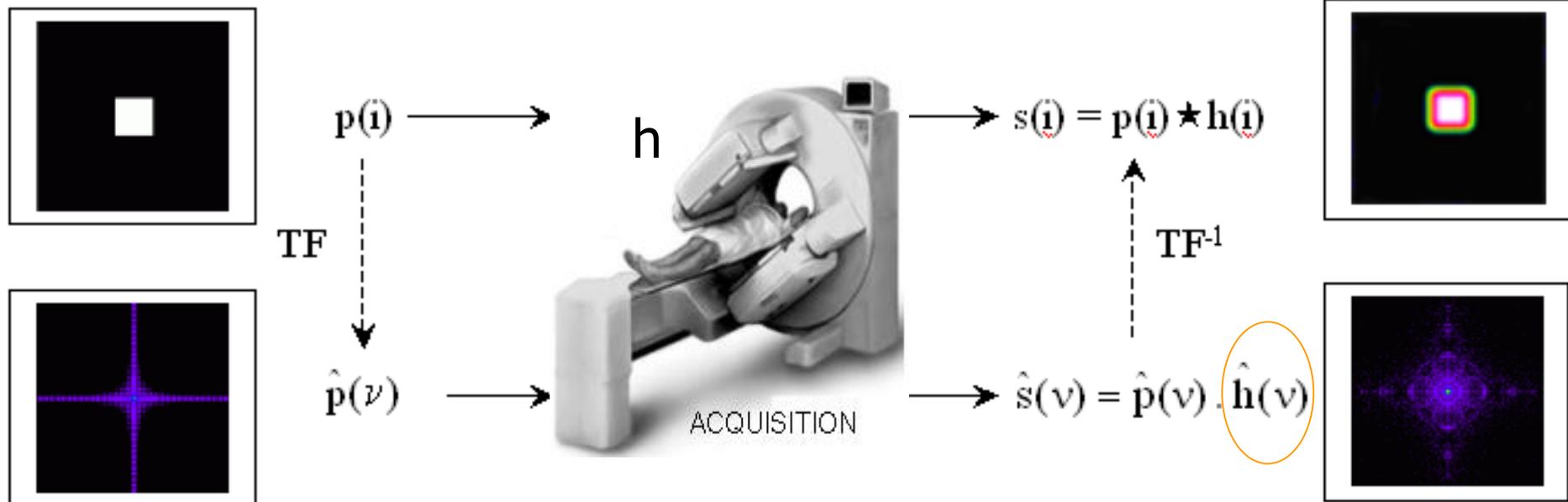
- **Activité sous-estimée si  $e < 2.LMH$** 
  - 75 % de l'activité est mesurée si  $e = LMH$
  - Approximation linéaire possible si  $e < LMH$
  - Rappel :  $LMH \approx 4-6$  mm en PET-CZT et 15 mm en SPECT
- **Rien à voir avec le théorème d'échantillonnage !**
  - échantillonnage sans perte  $\Rightarrow$  dimension du pixel  $d \leq LMH/2$
- **Artefact exploitable**
  - mouvements  $<$  résolution (cf. épaissement systolique)
- Pour limiter cet artefact : **déconvolution**

# Cq3: Déconvolution, pour...

- corriger l'EVP en améliorant la résolution
  - Via un coef. de restauration = activité mesurée/vraie
    - Niveau pixel(s) ou ROI(s), dans les coupes ou les projections
  - Par déconvolution (filtres de Metz, Wiener)
    - ♦ en 2D ou après reconstruction, sous hypothèse d'invariance
    - ♦ En 3D, dans l'espace des projections, en prenant en compte la distance au collimateur (principe fréquence-distance)
  - Par modélisation de la PSF dans l'opérateur de Radon (projection/rétroprojection)
- corriger les artefacts de dilution & recirculation d'un bolus

# Cq3: Déconvolution (planaire)

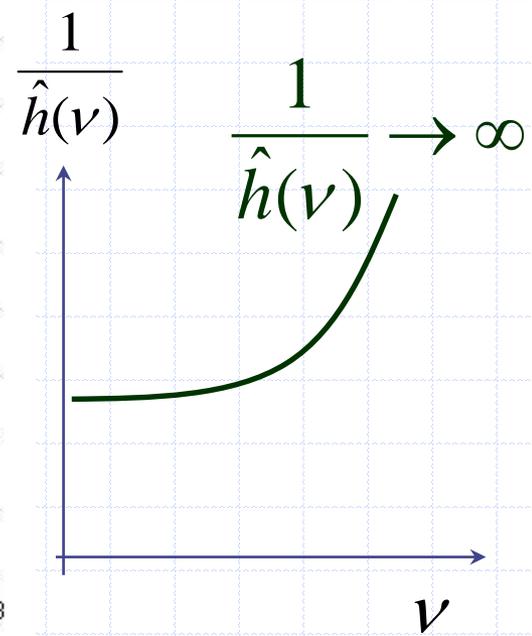
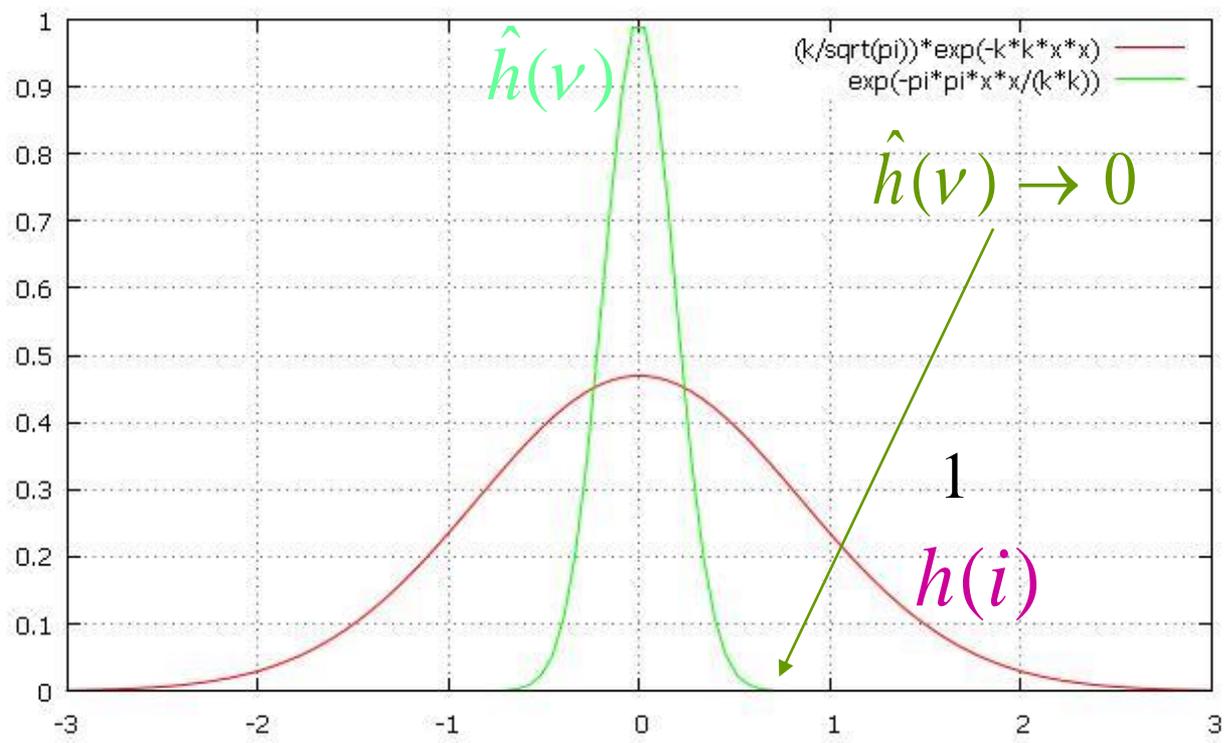
Dans une image de projection, la distance entre la source et le détecteur où se forme l'image est inconnue. On néglige donc la dépendance en  $D$  de la réponse impulsionnelle.



# TF d'une gaussienne

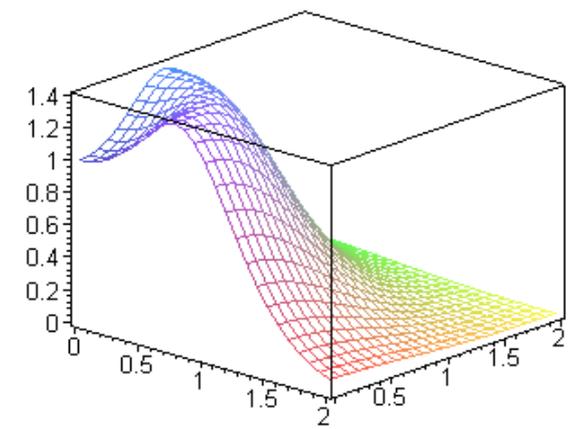
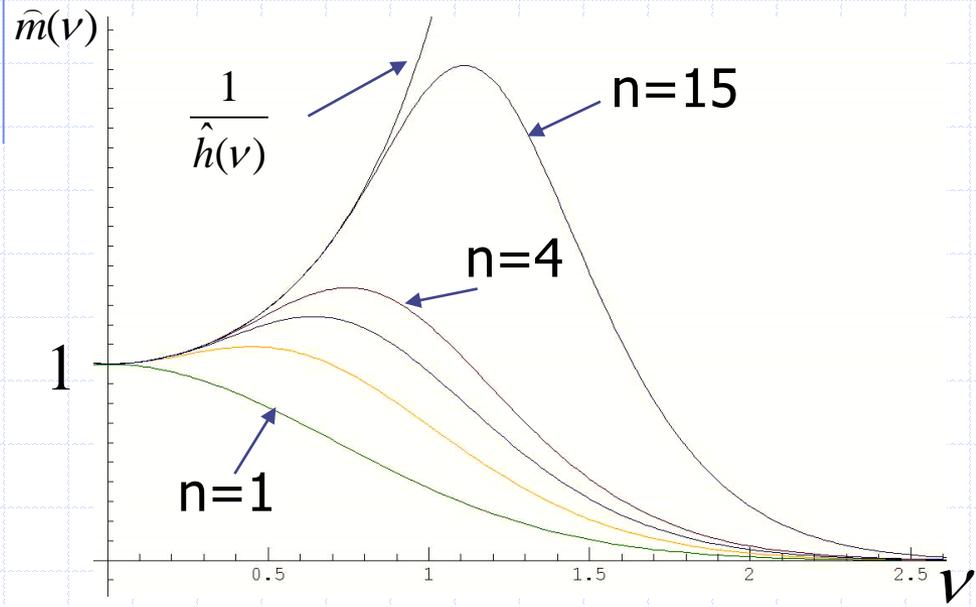
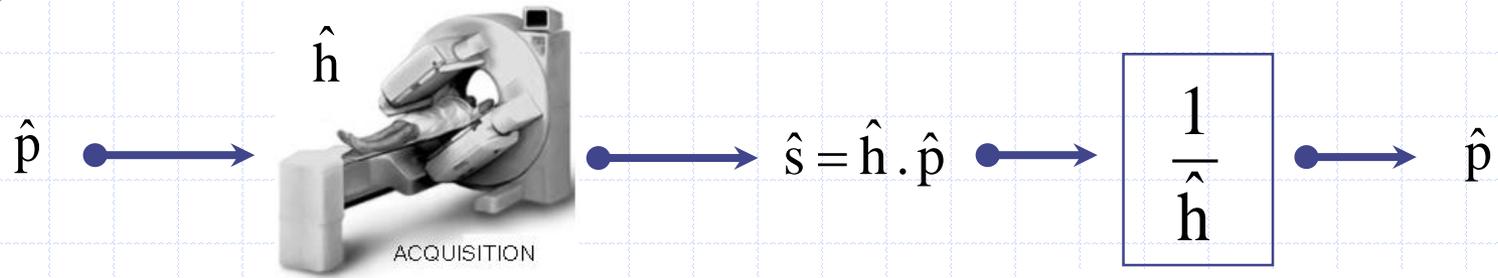
$$h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-(k \cdot i)^2} \iff \hat{h}(v) = e^{-\pi^2 \left(\frac{v}{k}\right)^2}$$

$$k = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$



Réponse impulsionnelle supposée invariante

# Filtre de déconvolution de Metz

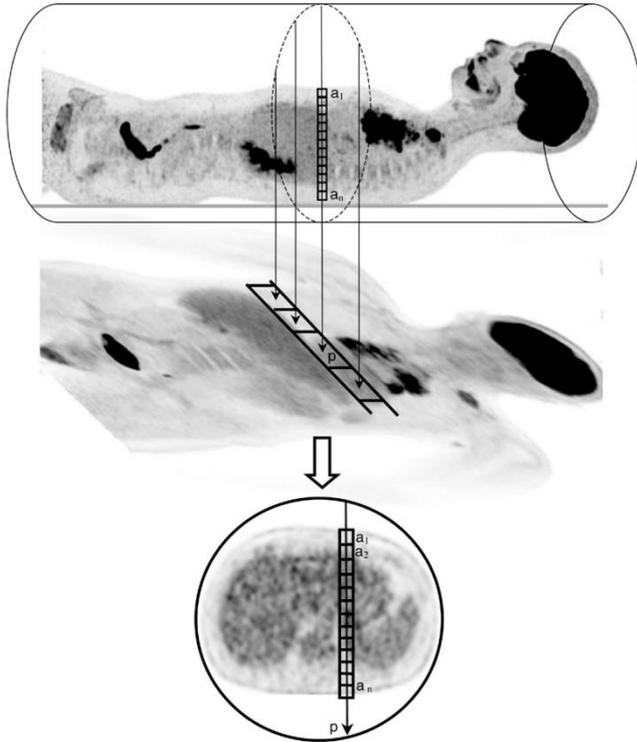


$$\hat{m}(v, v') = \frac{1 - \left[ 1 - \hat{h}(v, v')^2 \right]^n}{\hat{h}(v, v')}$$

$$n = 0,834 \cdot \ln(C) - 7,774$$

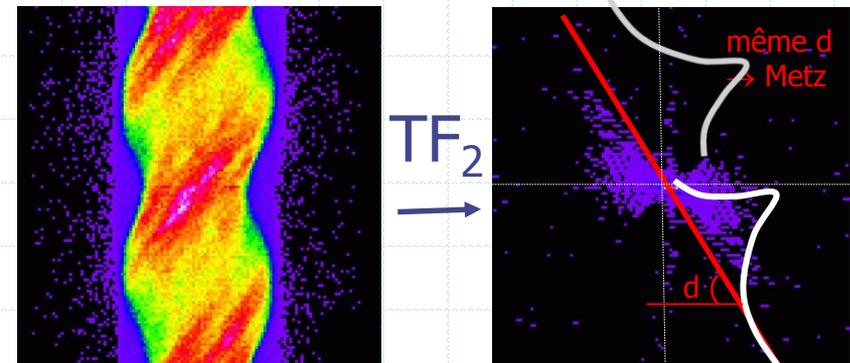
Pb :  $\hat{h}$  dépend de la d(source, collimateur)

# Déconvolution en TEMP et TEP



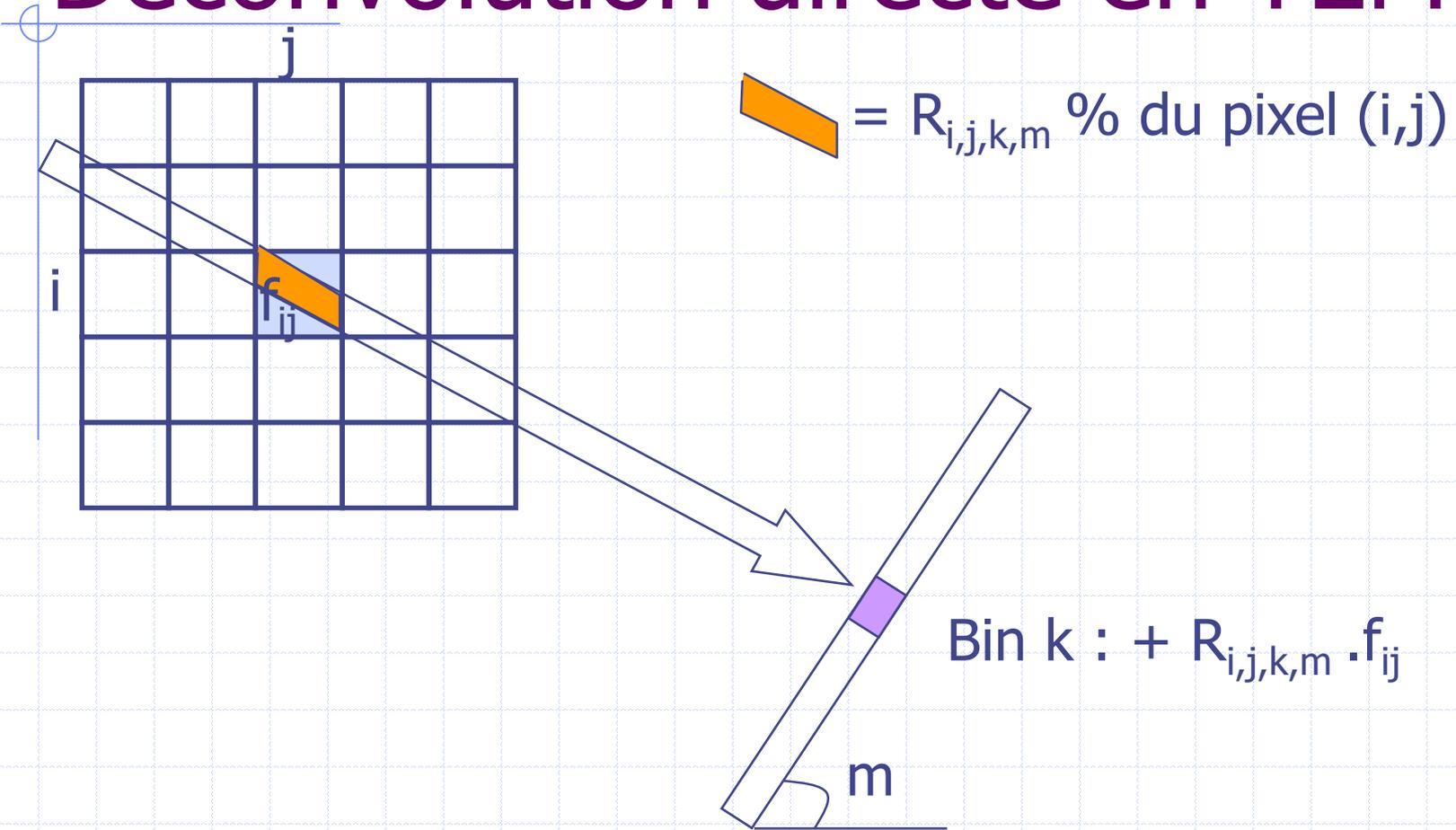
2 techniques de déconvolution en TE :

- Le principe fréquence-distance :
  - Identification de la distance de la source sur la TF du sinogramme et filtrage de Metz



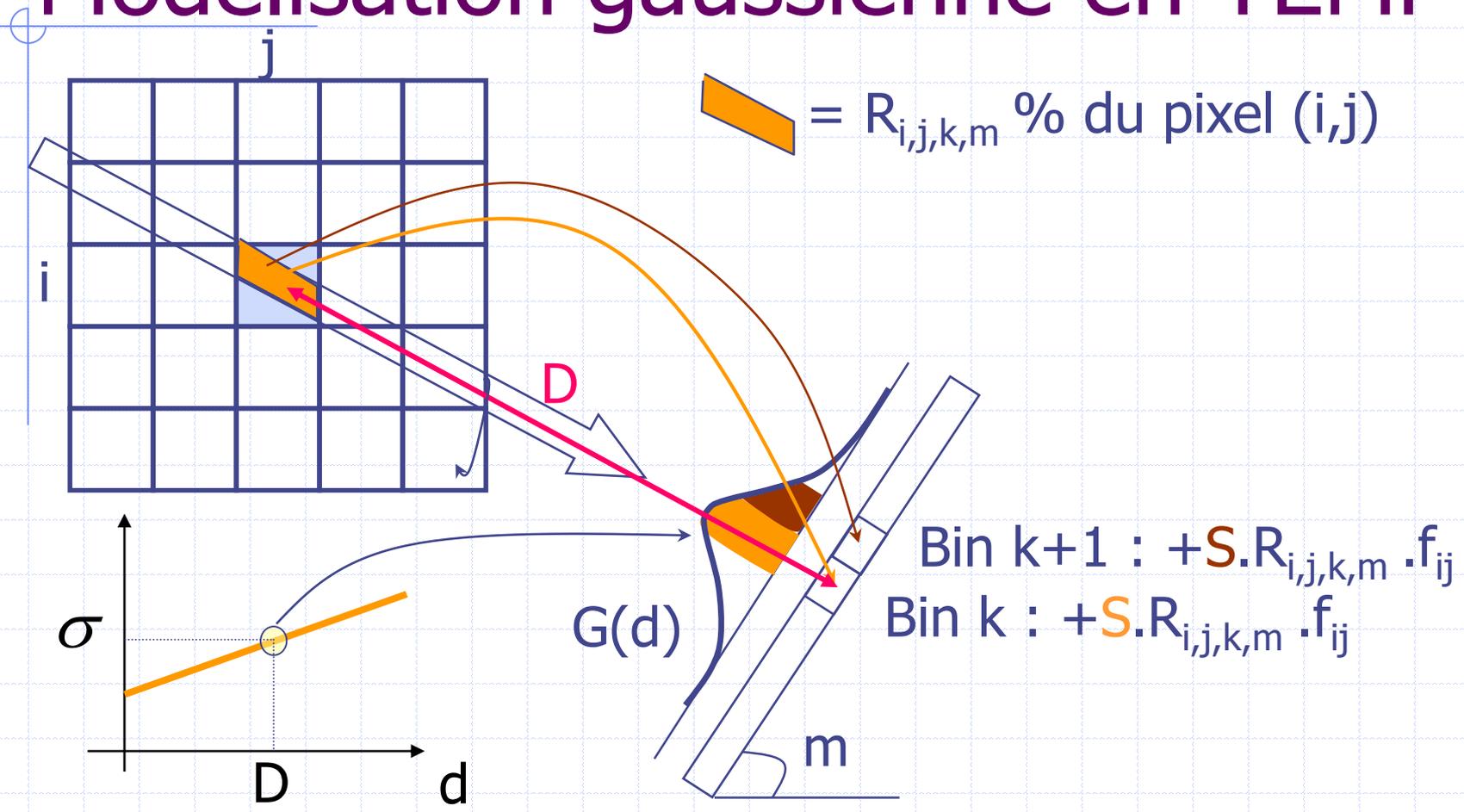
- La modélisation de la réponse impulsionnelle du tomographe dans les opérateurs de retro/projection. C'est la technique la plus utilisée de nos jours.

# Déconvolution directe en TEMP

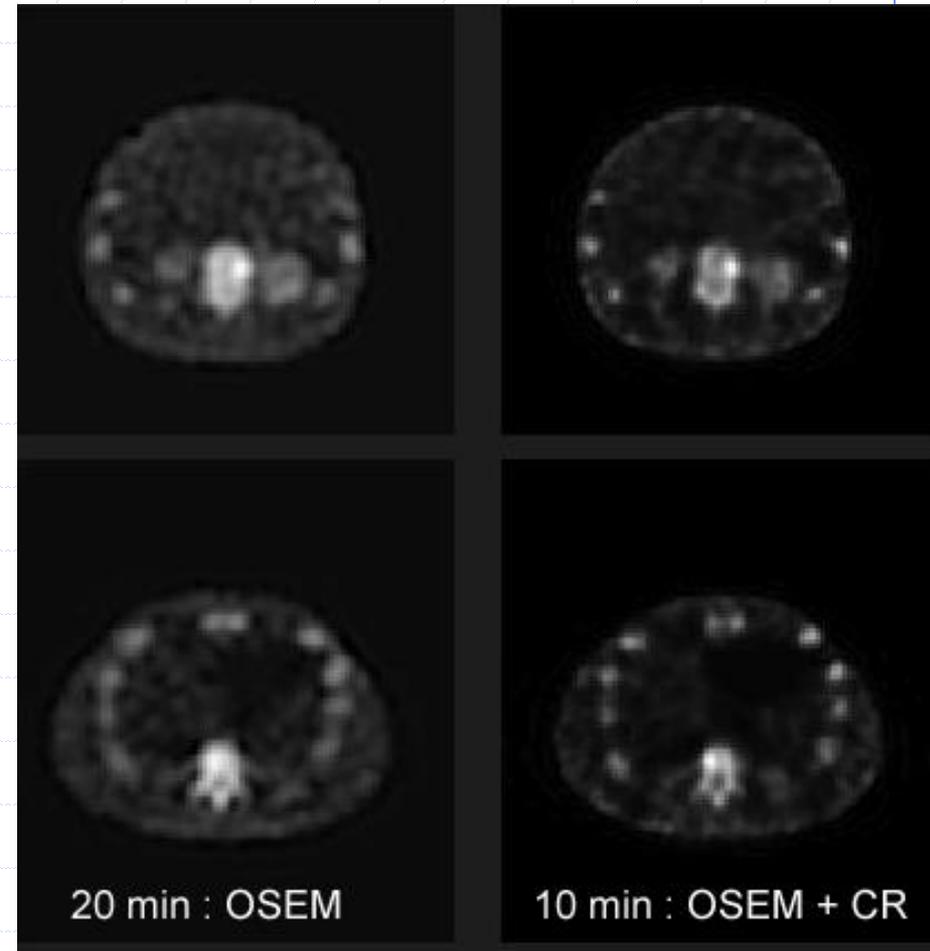
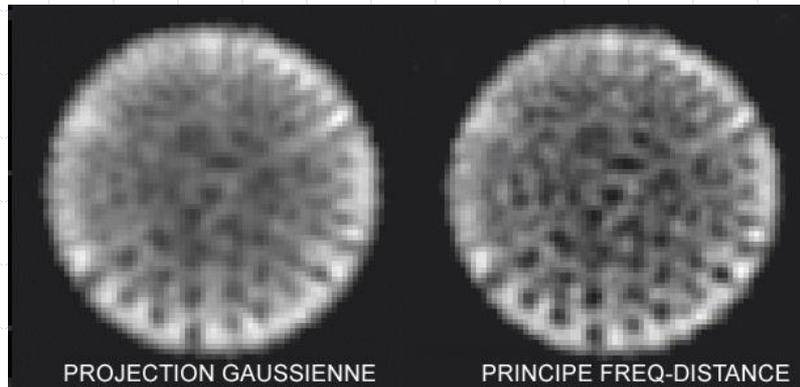
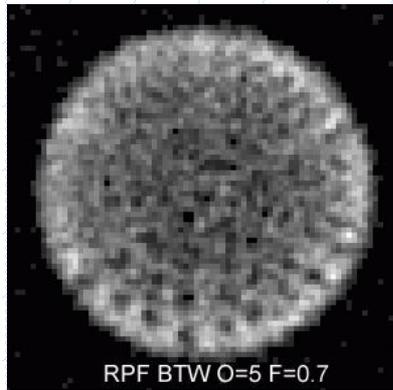




# Modélisation gaussienne en TEMP



# Exemple de déconvolution



Kohli PhysMed Biol  
1998;43.

Applications cliniques: TEP, restore<sup>®</sup>, evolution for bone<sup>®</sup>...

# Généralisation de la méthode

La modélisation de la réponse impulsionnelle est valable pour tous les algorithmes de reconstruction tomographique utilisant des fonctions de projection et de rétroprojection, c'est-à-dire pour:

- les méthodes **itératives** (ART, MLEM, OSEM, GC...)
- mais aussi la **rétroprojection filtrée**

(seule l'inversion directe par la formule de Radon ne peut pas en bénéficier)

En revanche, l'inversion de la transformée de Radon (directe ou par rétroprojection filtrée) se plie mal à une correction des artefacts d'atténuation, ce qui explique (entre autres) le développement d'OSEM en SPECT et PET.

# CONVOLUTION

- Image = convolution de la distribution de radioactivité par la réponse impulsionnelle
  - = moyenne pondérée d'une activité par les activités voisines
  - = atténuation (par  $x$ ) des fréquence spatiales les plus hautes
- Effet de volume partiel =
  - sous estimation de l'activité si dimension anatomique  $< 2.LMH$
  - Environ  $-25\%$  si  $e=LMH$ ; environ  $-55\%$  si  $e=LMH/2$ .
- Déconvolution
  - En / par la réponse en fréquence puis filtre passe-bas (Metz)
  - En / par la réponse en fréquence dans la TF2 du sinogramme
  - En modélisant la projection gaussienne dans le projecteur

## ② BRUIT & FILTRAGES

Statistique de Poisson

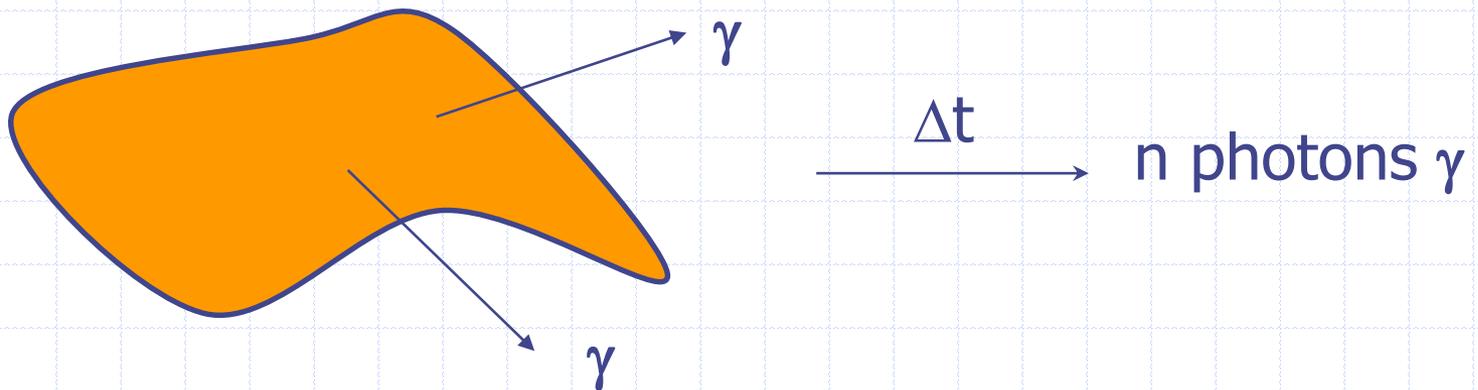
Rapport signal sur bruit

Filtrages Linéaires

Filtrages non linéaires

# Désintégration radioactive

- **N** = Nombre de noyaux radioactifs
- **$\lambda$**  = proba. qu'un isotope se désintègre/sec
- **$\lambda = (-dN/N)/dt$**   
 donc en moyenne  **$\bar{C} = N \cdot \lambda \cdot \Delta t$**  désintégrations en  $\Delta t$
- **$P(C_{\Delta t} = n)$**  : probabilité de mesurer  $n$  désintégrations dans un intervalle de temps  $\Delta t$

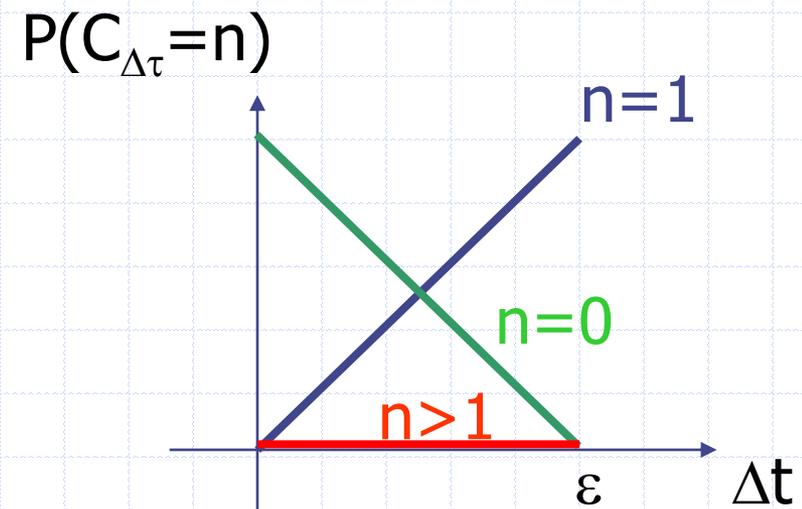


# Désintégration radioactive

- **Sans mémoire** (désintégrations indépendantes)
  - les désintégrations qui ont eu lieu avant l'instant  $t$  n'influencent pas sur celles qui auront lieu après l'instant  $t$ .
- **Stationnaire** la probabilité d'une désintégration entre  $t$  et  $t+h$  ne dépend que de  $h$  (et pas de  $t$ )

- **Rare** : Si  $\Delta t \rightarrow 0$ , alors

- $P(C_{\Delta t} = 1) \rightarrow \lambda N \cdot \Delta t$
- $P(C_{\Delta t} = 0) \rightarrow 1 - \lambda N \cdot \Delta t$
- $P(C_{\Delta t} > 1) \rightarrow 0$



# Statistique de Poisson (2)

*Phénomène rare,  
sans mémoire  
et stationnaire*



Radioactivité = Processus **POISSONNIEN**

$$P(C_{\Delta t} = n) = e^{-\lambda N \Delta t} \frac{(\lambda N \Delta t)^n}{n!}$$



# Statistique de Poisson (3)



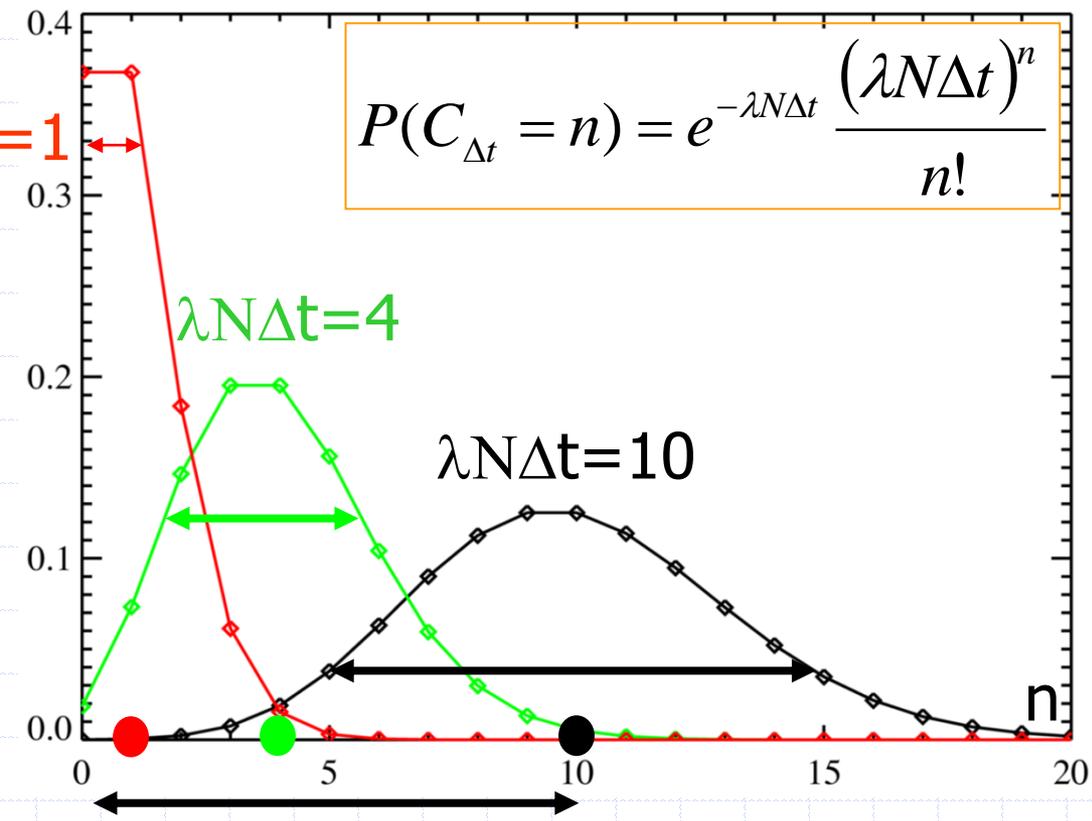
$$P(C_{\Delta t}=n)$$

$$\bar{C} = \lambda N \Delta t = 1$$

$$E = \sigma^2 = \lambda N \Delta t = \bar{C}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{B} = \frac{E}{\sigma} = \frac{\bar{C}}{\sqrt{\bar{C}}} = \sqrt{\bar{C}}$$

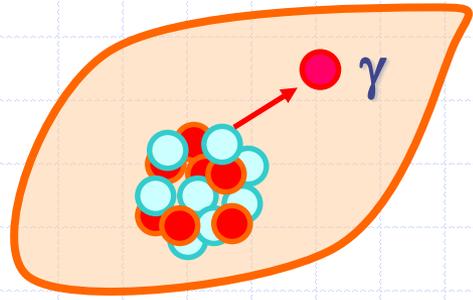
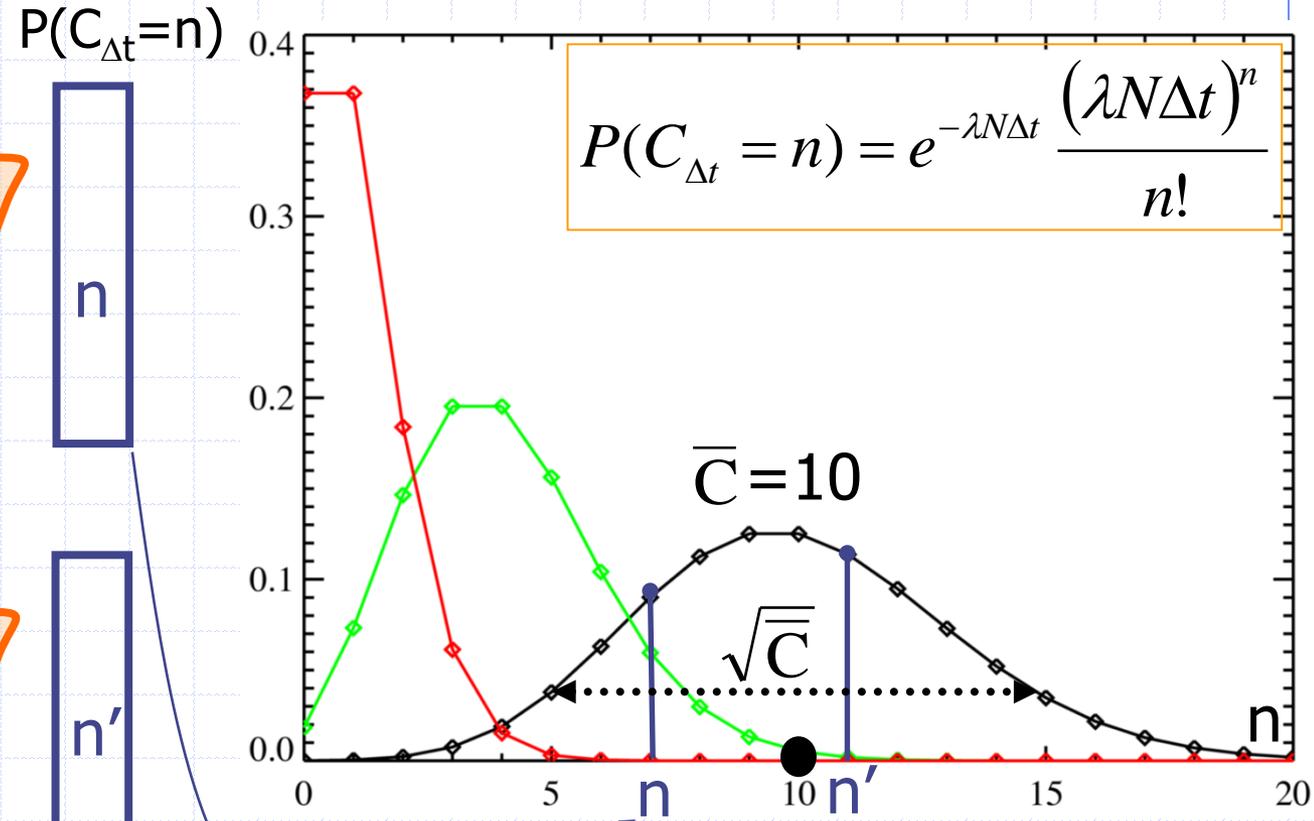
$$\frac{S}{B} = \sqrt{\bar{C}}$$



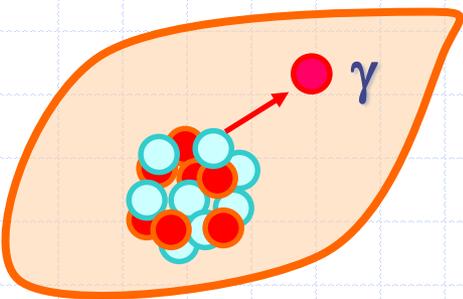
$\bar{C}$  nombre moyen de désintégration pendant  $\Delta t = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$



# Statistique de Poisson (4)



n

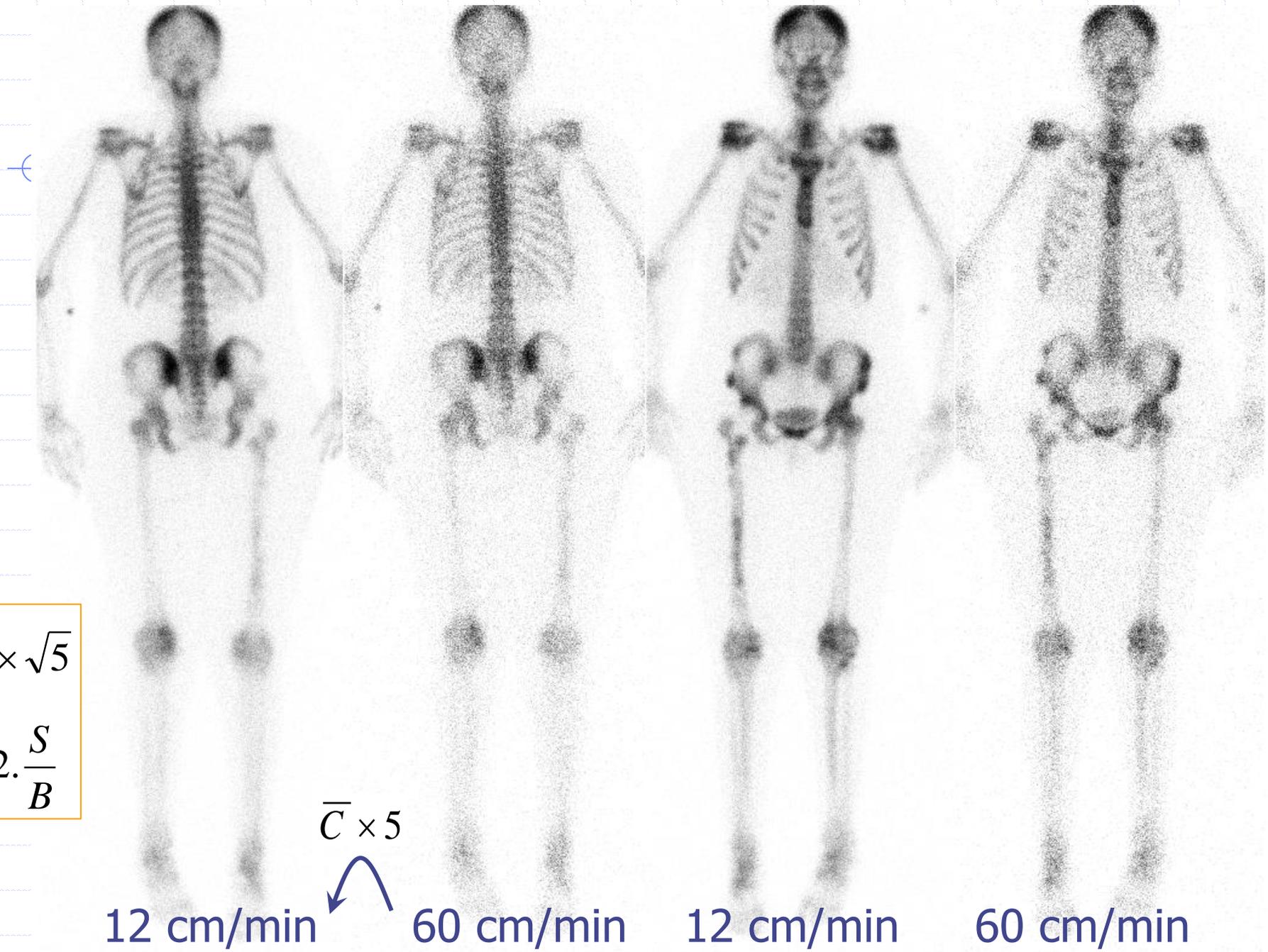


n'

$$C \in [\bar{C} - \sqrt{\bar{C}}, \bar{C} + \sqrt{\bar{C}}]$$

$$p = 68,3\%$$

Un comptage RA est un « tirage au sort » suivant P



$$\frac{S}{B} \times \sqrt{5}$$
$$\approx 2 \cdot \frac{S}{B}$$

$\bar{C} \times 5$

12 cm/min

60 cm/min

12 cm/min

60 cm/min

# ECHANTILLONNAGE pratique (2)

- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - $530 / 3.5 = 151$  pixels / côté  $\Rightarrow$  256 pixels
  - Si 512 pixels (pixels découpés en 4) :
    - Résolution inchangée
    - C divisé par 4  $\Rightarrow$  S/B divisé par 2

# ECHANTILLONNAGE pratique (2)

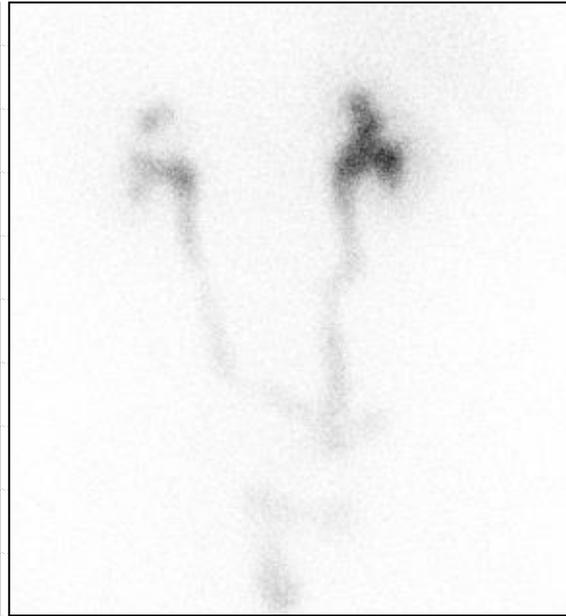
- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - $530 / 3.5 = 151$  pixels / côté  $\Rightarrow$  256 pixels
  - Si 512 pixels (pixels découpés en 4) :
    - Résolution inchangée
    - C divisé par 4  $\Rightarrow$  S/B divisé par 2
- LMH en mode tomographique = 18 mm
  - $530 / 9 = 59$  pixels / côté  $\Rightarrow$  64 pixels
  - Si 128 pixels (pixels découpés en 4) :
    - Résolution inchangée
    - C divisé par 4  $\Rightarrow$  S/B (fortement) diminué

# ECHANTILLONNAGE pratique (2)

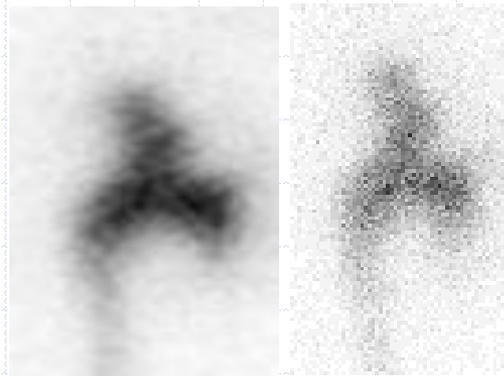
256

512

1024



256

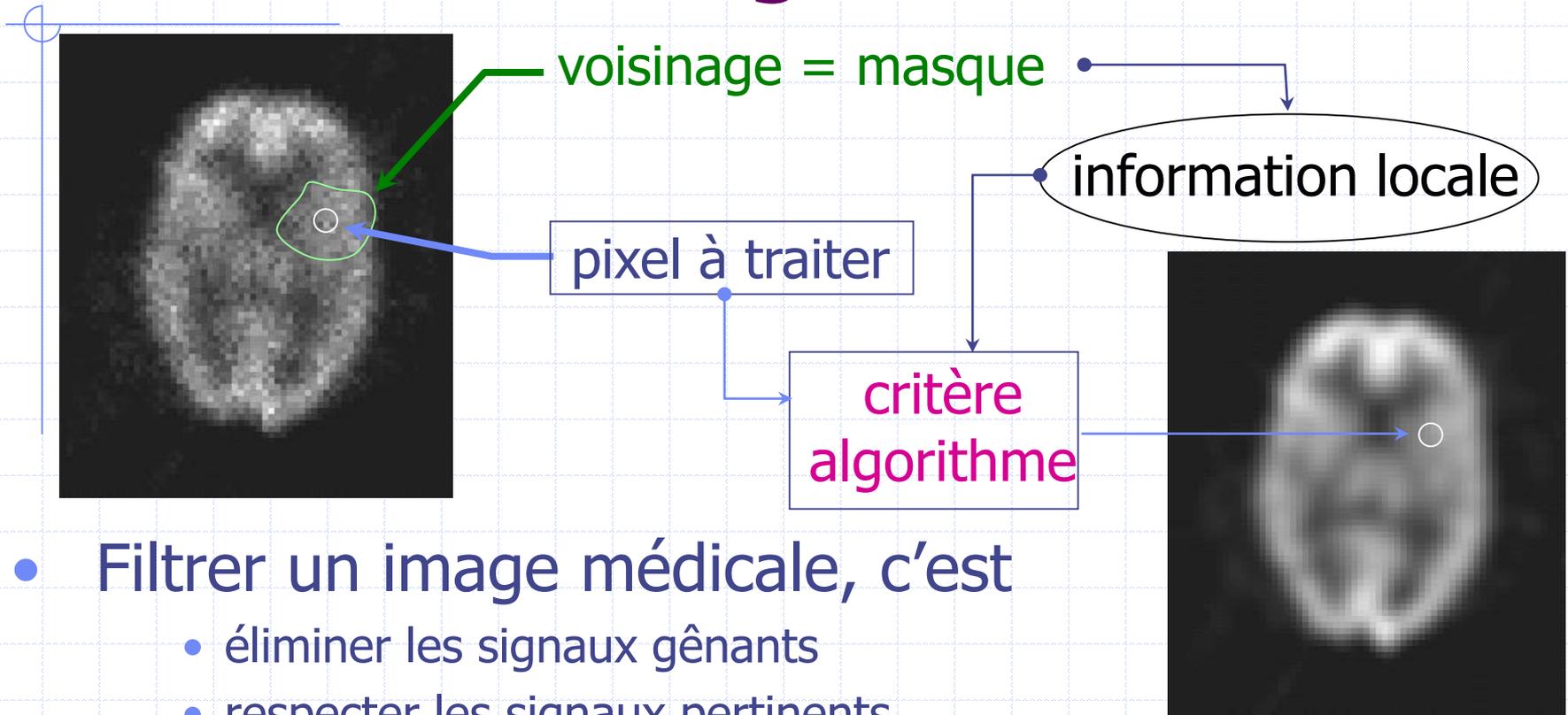


1024

# TAUX DE COMPTAGE

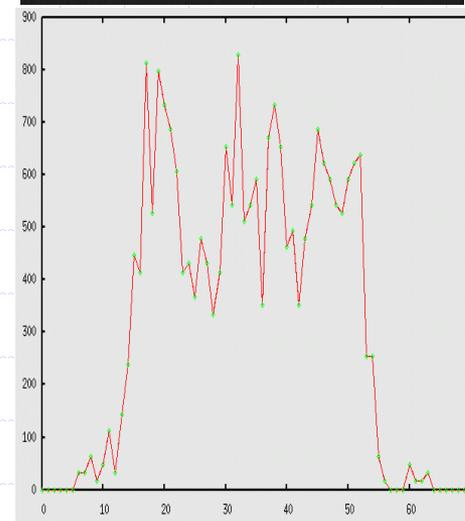
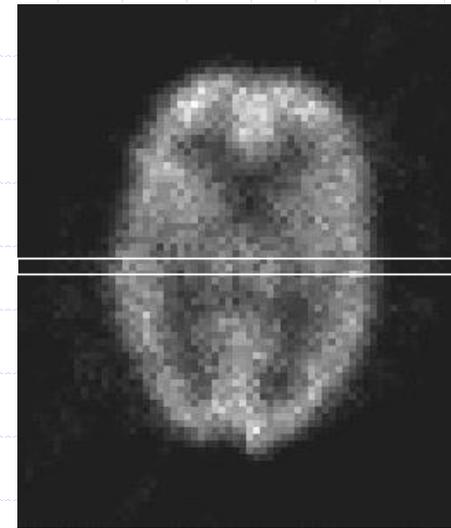
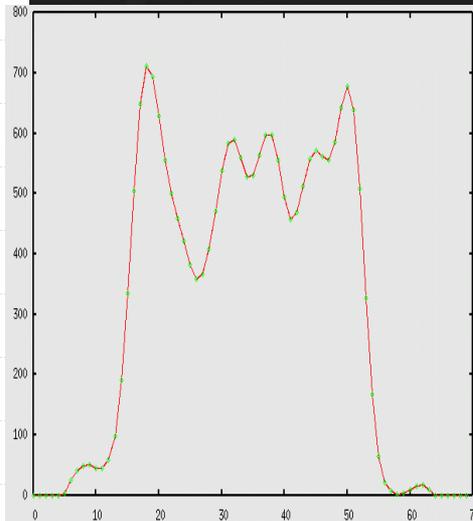
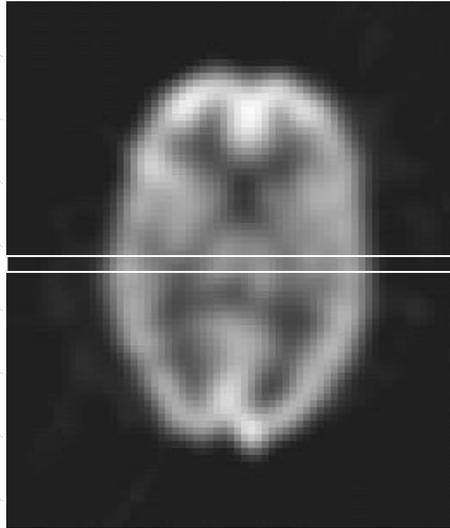
- Désintégration = rare, sans mémoire, stationnaire
  - Donc statistique de Poisson de moyenne  $\bar{C} = \sigma^2$
  - Donc  $S/B = \sqrt{\bar{C}}$
- Conséquence : optimiser le taux de comptage
  - Activité injectée suffisante, pas de point d'injection (masqué)
  - Mais surtout : temps de pose suffisant
- Taille des pixels lors de la numérisation
  - $d = LMH/2$
  - Si  $d < LMH / 2$ , on dégrade le rapport S/B sans gain en résolution.
  - Si  $d > LMH / 2$  on dégrade la résolution et on aggrave les effets de volume partiel.

# Notion de filtrage

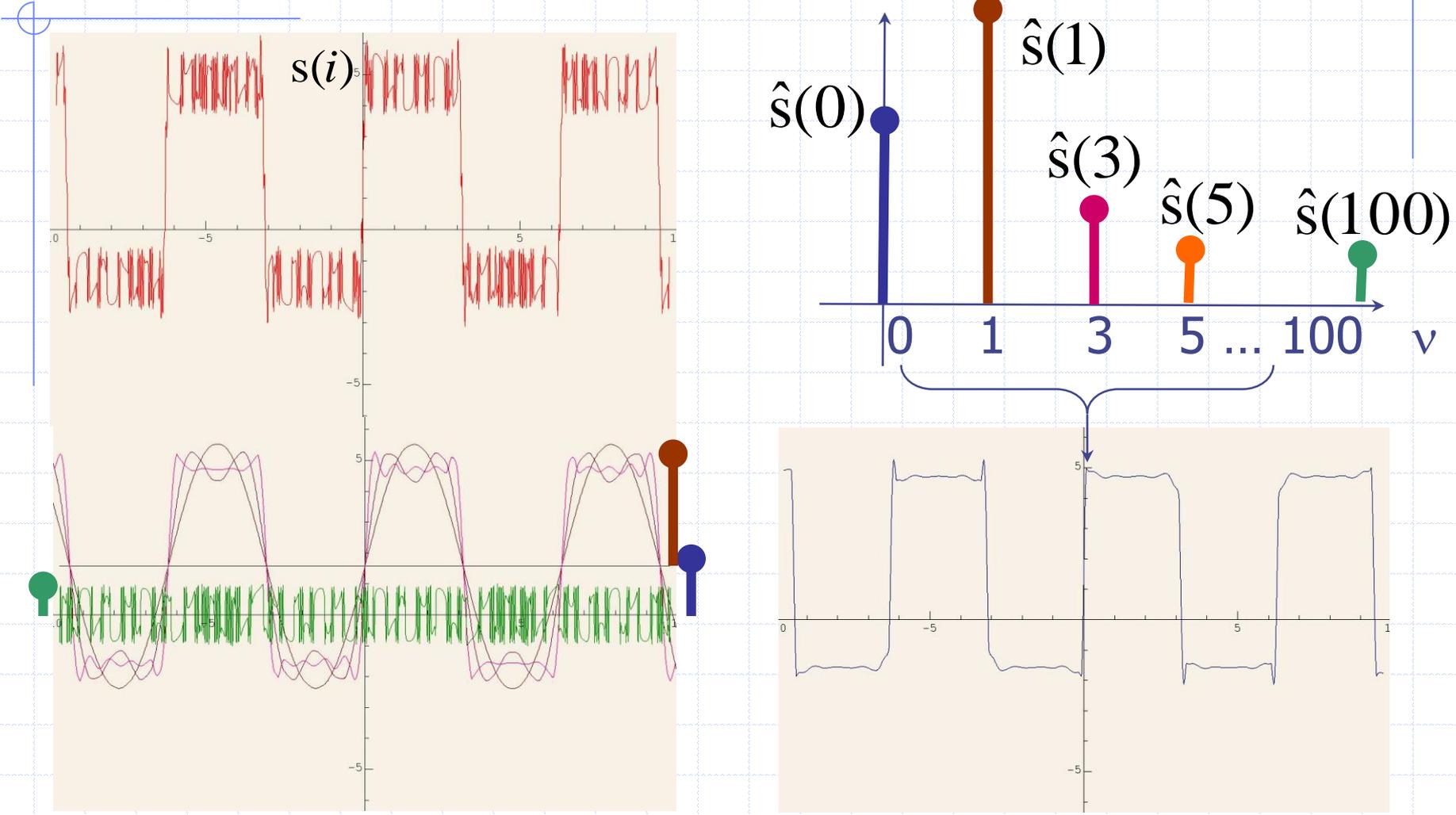


- Filtrer un image médicale, c'est
  - éliminer les signaux gênants
  - respecter les signaux pertinents
- C'est donc au médecin nucléaire de définir :
  - un critère pour discriminer signaux parasites et pertinents
  - un algorithme pour éliminer les signaux parasites

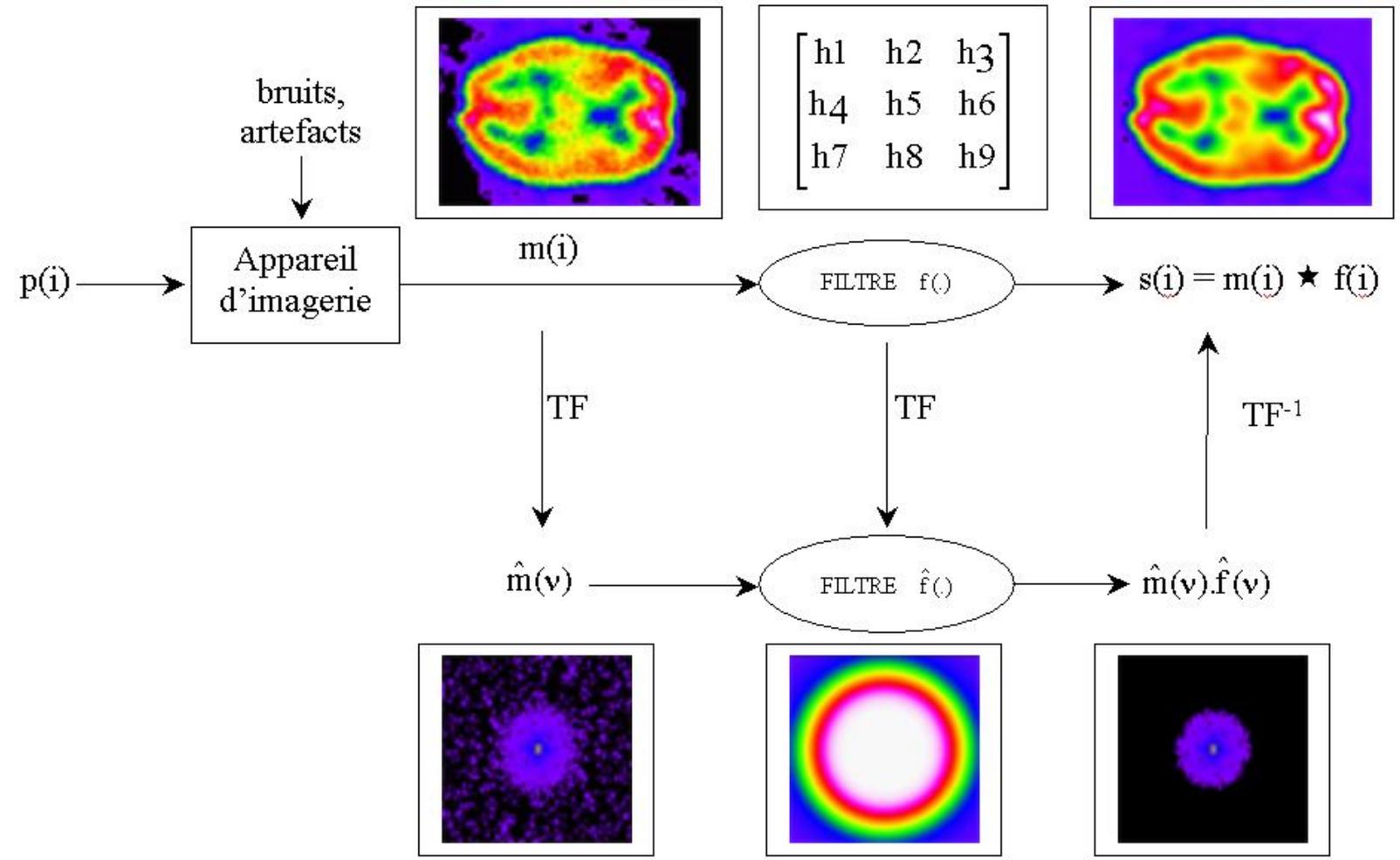
# 1° idée : critère fréquentiel



# Représentation fréquentielle



# Filtrage linéaire d'image



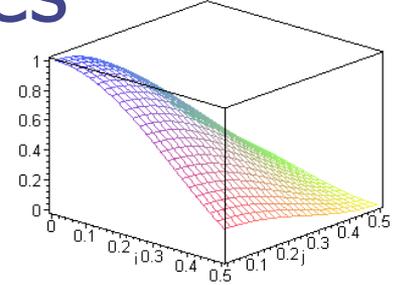


# Filtres passe-bas

- Convolution:  $s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k).m(i-k)$
- Remplace chaque NG par une moyenne pondérée des NG voisins  $\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

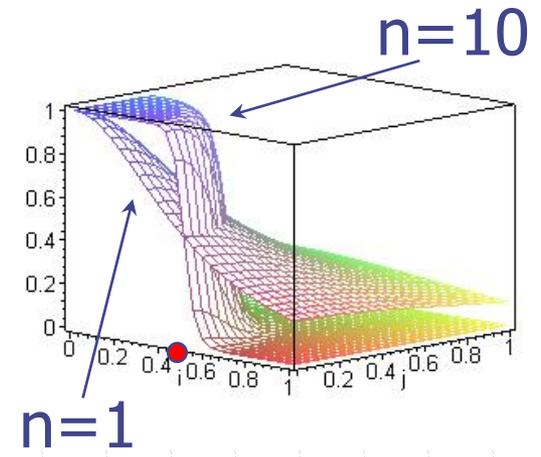
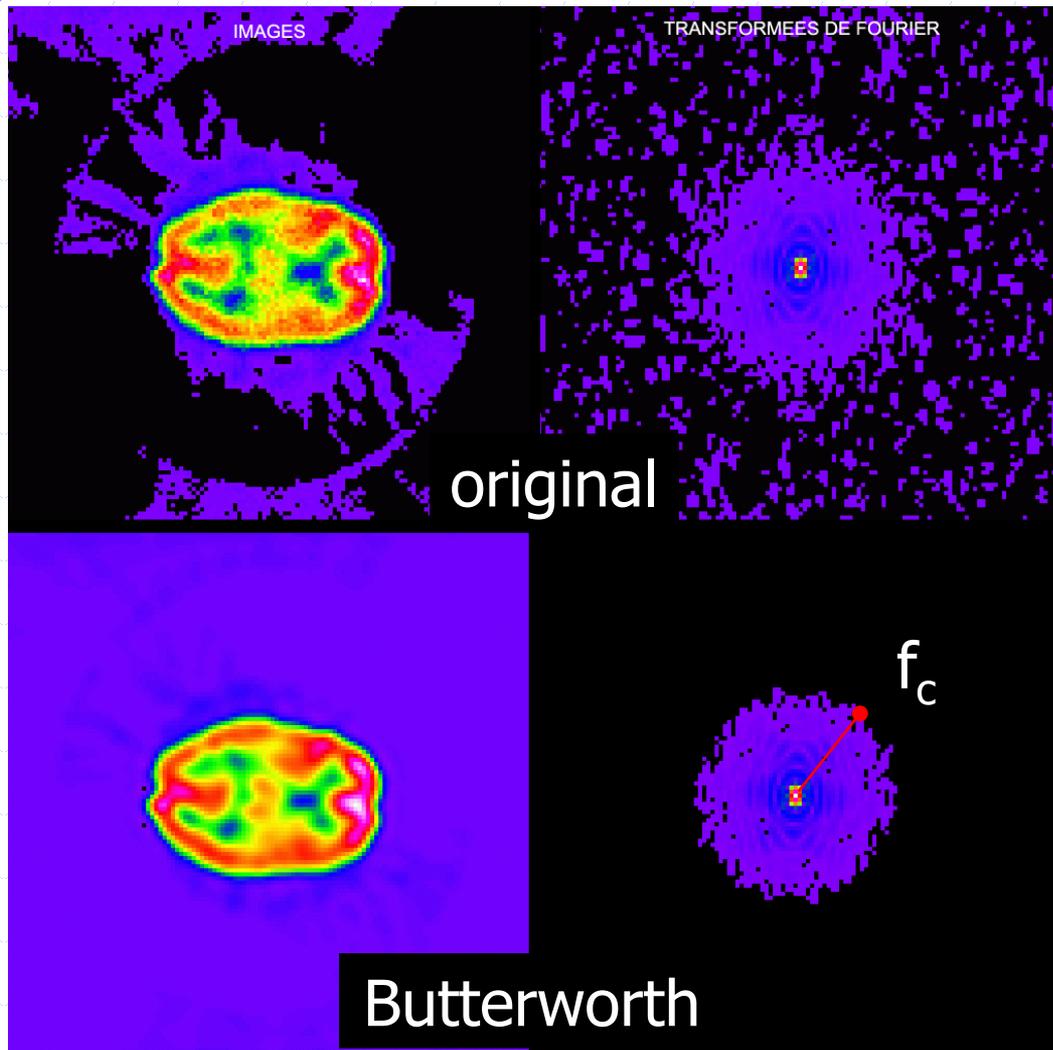
- Atténuation sélective de certaines fréquences

$$\hat{f}(\nu) = 0,5.[1 + \cos(\pi \frac{\nu}{\nu_e})]$$



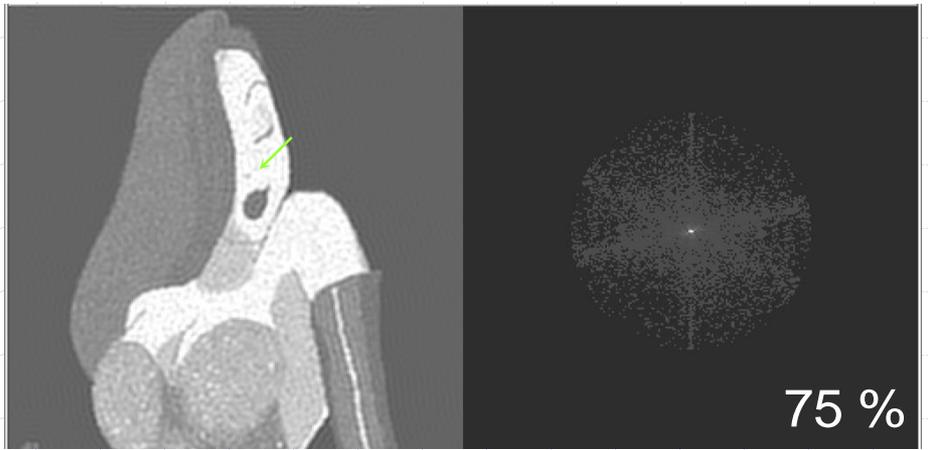
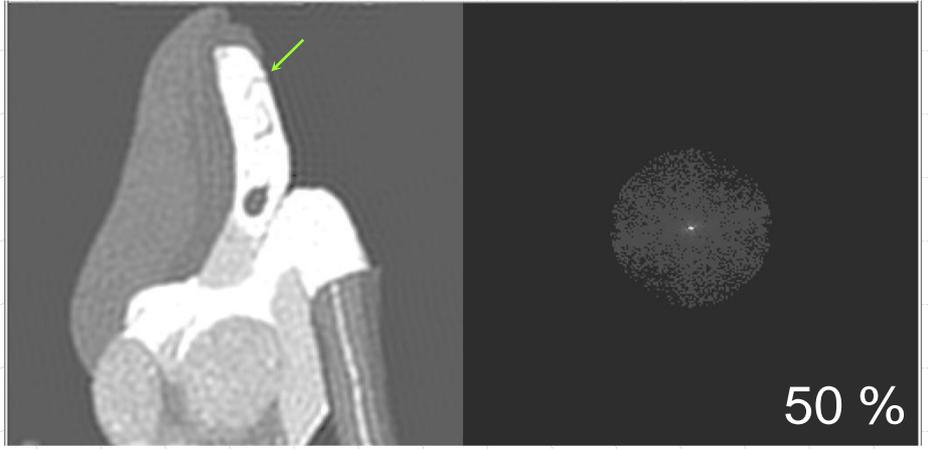
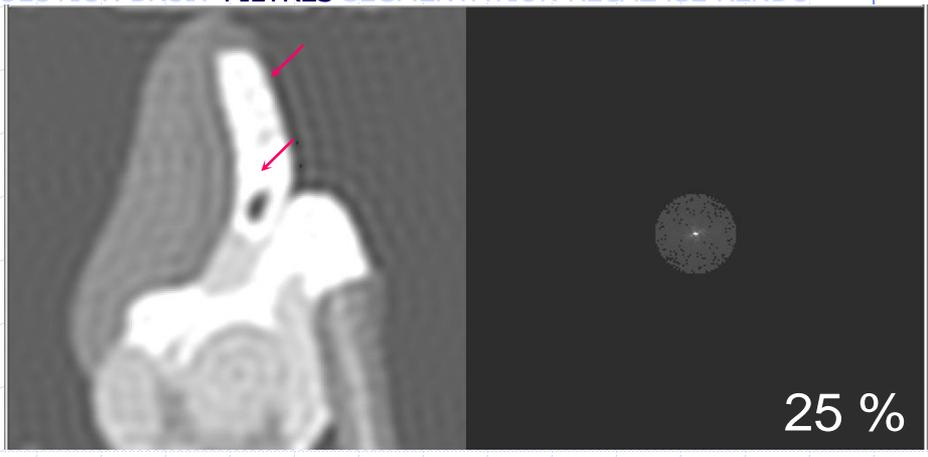
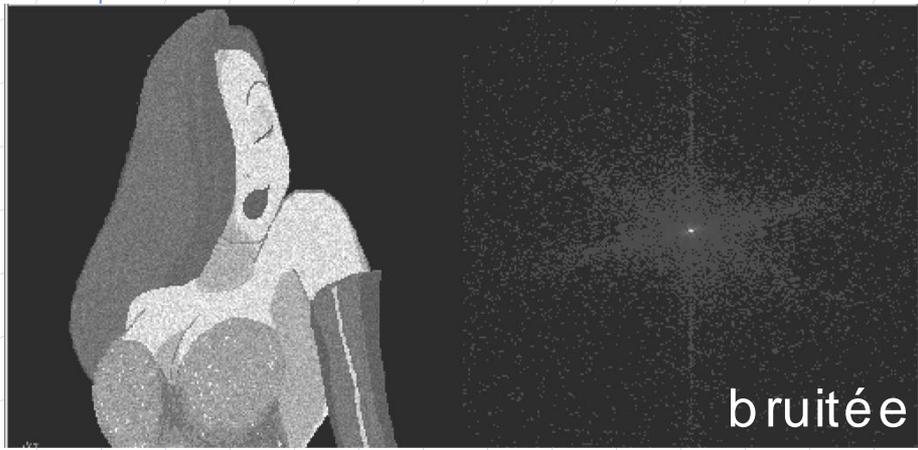
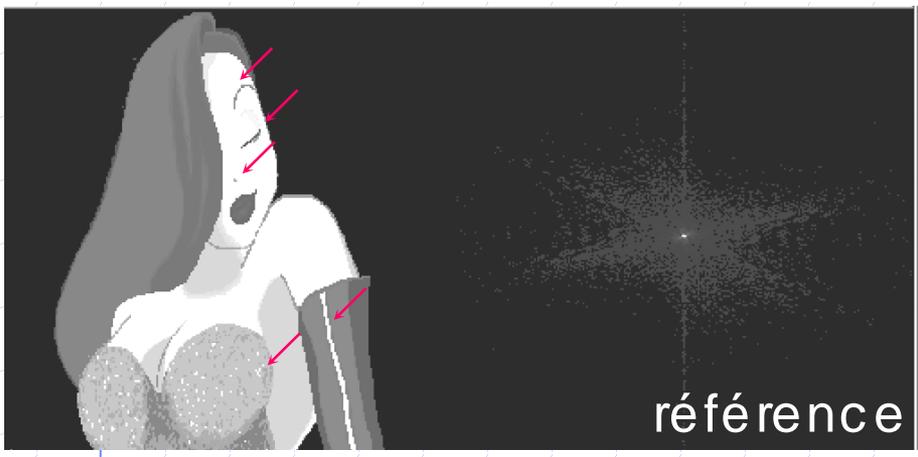
- Un appareil d'imagerie est un exemple de filtre linéaire passe-bas

# Exemple: filtres de Butterworth



$$\hat{f}(v, v') = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sqrt{v^2 + v'^2}}{f_c} \right)^{2n}}$$

# Filtres linéaires



# FILTRES LINEAIRES

Ils opèrent par convolution (moyenne pondérée) ou par amplification sélective des fréquences spatiales. Ces filtres sont réversibles si  $\hat{h}(v) \neq 0$  pour toute fréquence de l'image.

## ▲ Facilité (relative) de synthèse

- ▲ via une fréquence de coupure et un gabarit
- ▲ ou par définition d'un masque de convolution

## ▲ Contrôle des caractéristiques modifiées

- ▲ via les fréquences spatiales amplifiées
- ▲ en lien avec la résolution de la  $\gamma$ -caméra

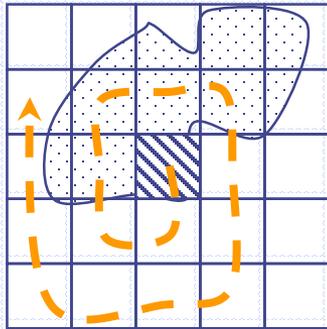
▼ Information de voisinage mal prise en compte

▼ Altération de la résolution si filtrage passe-bas

# D'autres types de filtrages...

ALGORITHME MASQUE	MOYENNE PONDEREE	AUTRE
INVARIANT	FILTRE LINEAIRE ( $\bar{x}$ , masque fixe, discrimination en fréquences)	FILTRE MEDIAN (MEDIANE)  FILTRE MORPHOLOGIQUE (MIN, MAX)
NON INVARIANT	LISSAGE SUR MASQUE ADAPTE ( $\bar{x}$ sur masque variable)	SHINE (ACP)  FILTRE MORPHOLOGIQUE (MIN, MAX)

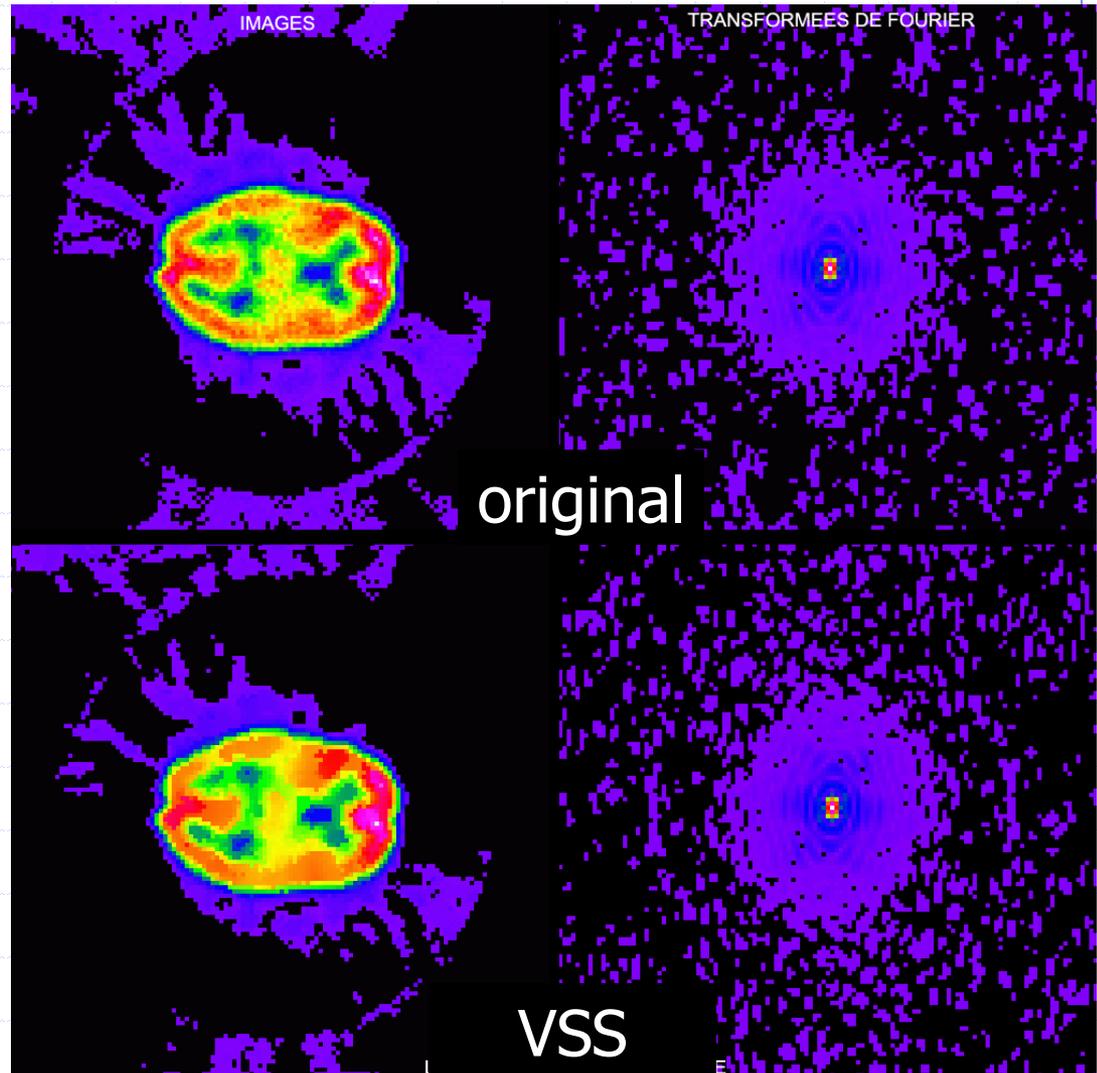
# Lissage sur masque adapté (VSS)



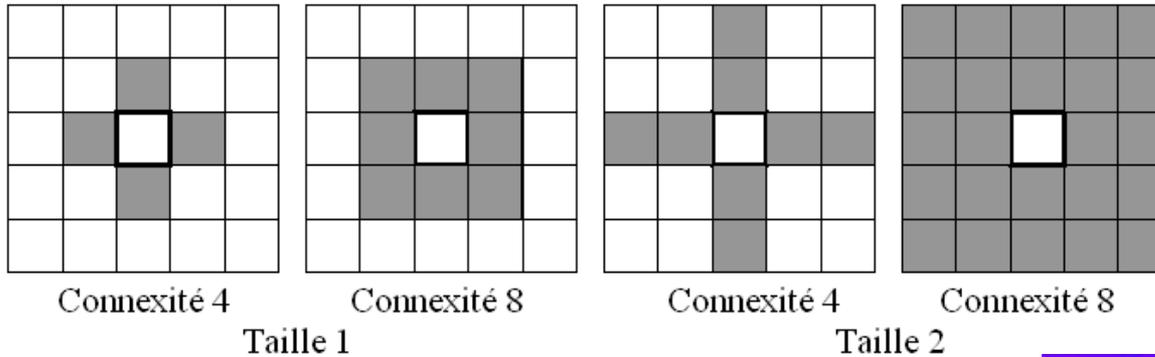
Accumulation pour  
moyenne des

$$s(i',j') \in s(i,j) \pm 2\sqrt{s(i,j)}$$

Ce filtre opère toujours une  
moyenne, mais n'est plus  
linéaire car non invariant en  
translation (le masque change).

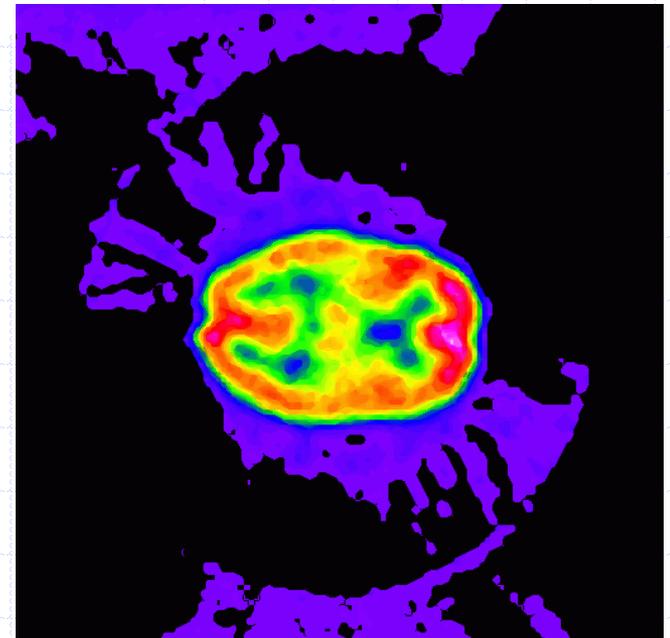


# Filtre médian



On remplace  $s(i,j)$  par la valeur de pixel médiane dans un voisinage fixe de  $(i,j)$

Ce filtre opère de façon non linéaire (il ne calcule pas de moyenne pondérée)





# Opérateurs morphologiques

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

EROSION :

$$\varepsilon(i, j) = \mathop{\text{Inf}}_{(i', j') \in V(i, j)} s(i', j')$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Voisinage :

$$V(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

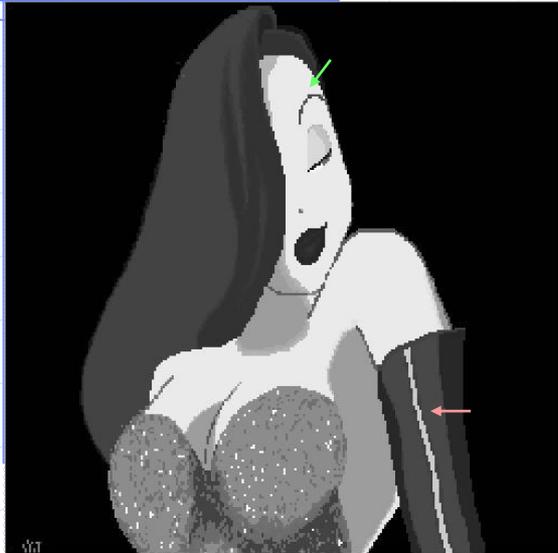
DILATATION :

$$\delta(i, j) = \mathop{\text{Sup}}_{(i', j') \in V(i, j)} s(i', j')$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon$  remplace chaque valeur de pixel par le minimum des valeurs des pixels du voisinage  
 $\delta$  remplace chaque valeur de pixel par le maximum des valeurs des pixels du voisinage

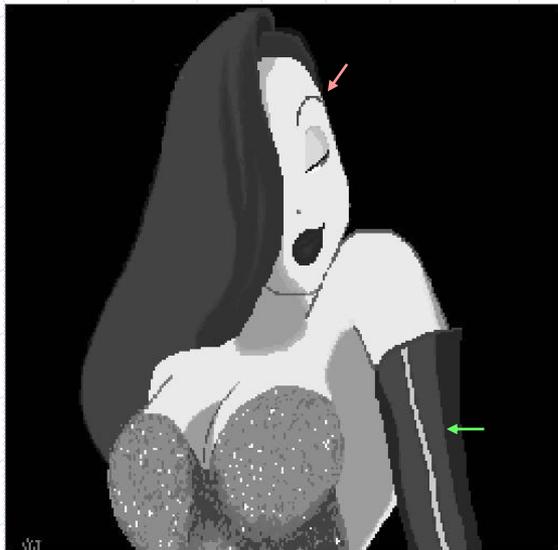
# Opérateurs morphologiques



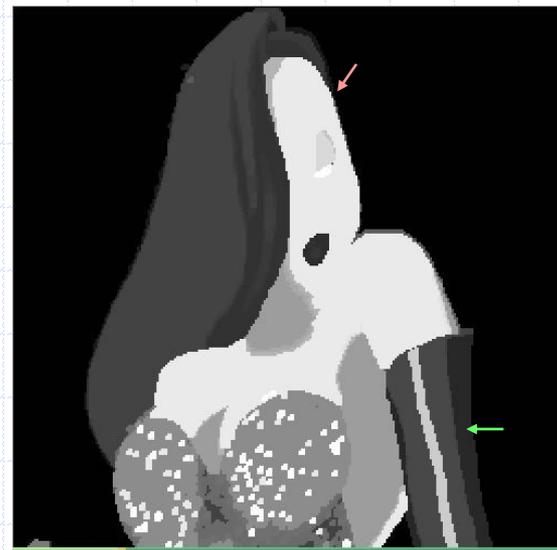
$\varepsilon$  →



$\varepsilon$  diminue le signal,  
élargit les hypo-signaux,  
gomme les hyper-signaux



$\delta$  →



$\delta$  augmente le signal,  
gomme les hypo-signaux,  
élargit les hyper-signaux

# Filtres morphologiques

$$P(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \varepsilon(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

OUVERTURE:

$\rightarrow \gamma(i,j) = \delta \varepsilon(i,j) =$   
 ↪ gomme les hyper-signaux  
 petits par rapport à V

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 14 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \delta(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

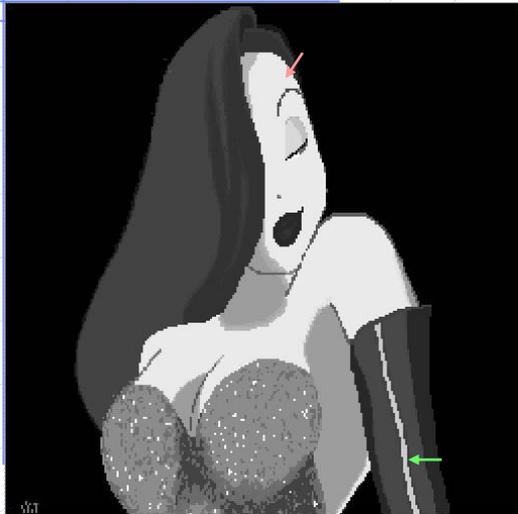
FERMETURE:

$\rightarrow \varphi(i,j) = \varepsilon \delta(i,j) =$   
 ↪ gomme les hypo-signaux  
 petits par rapport à V

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$



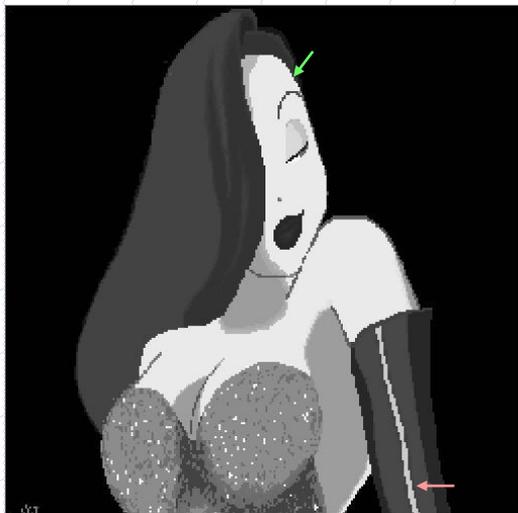
# Opérateurs morphologiques



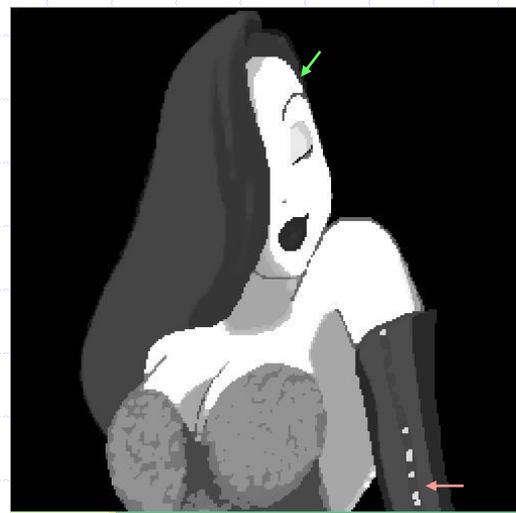
$\varphi$  →



↪ gomme les hypo-signaux  
petits par rapport à V

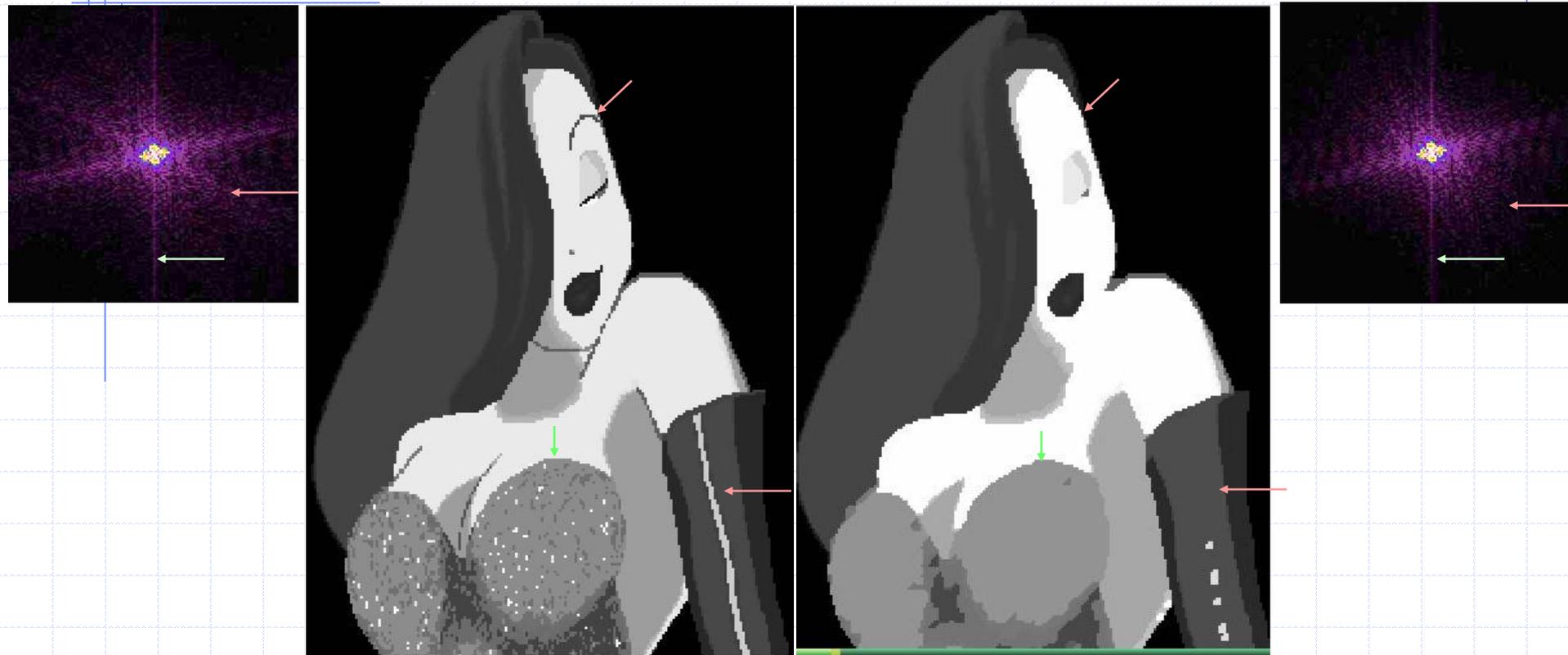


$\gamma$  →



↪ gomme les hyper-signaux  
petits par rapport à V

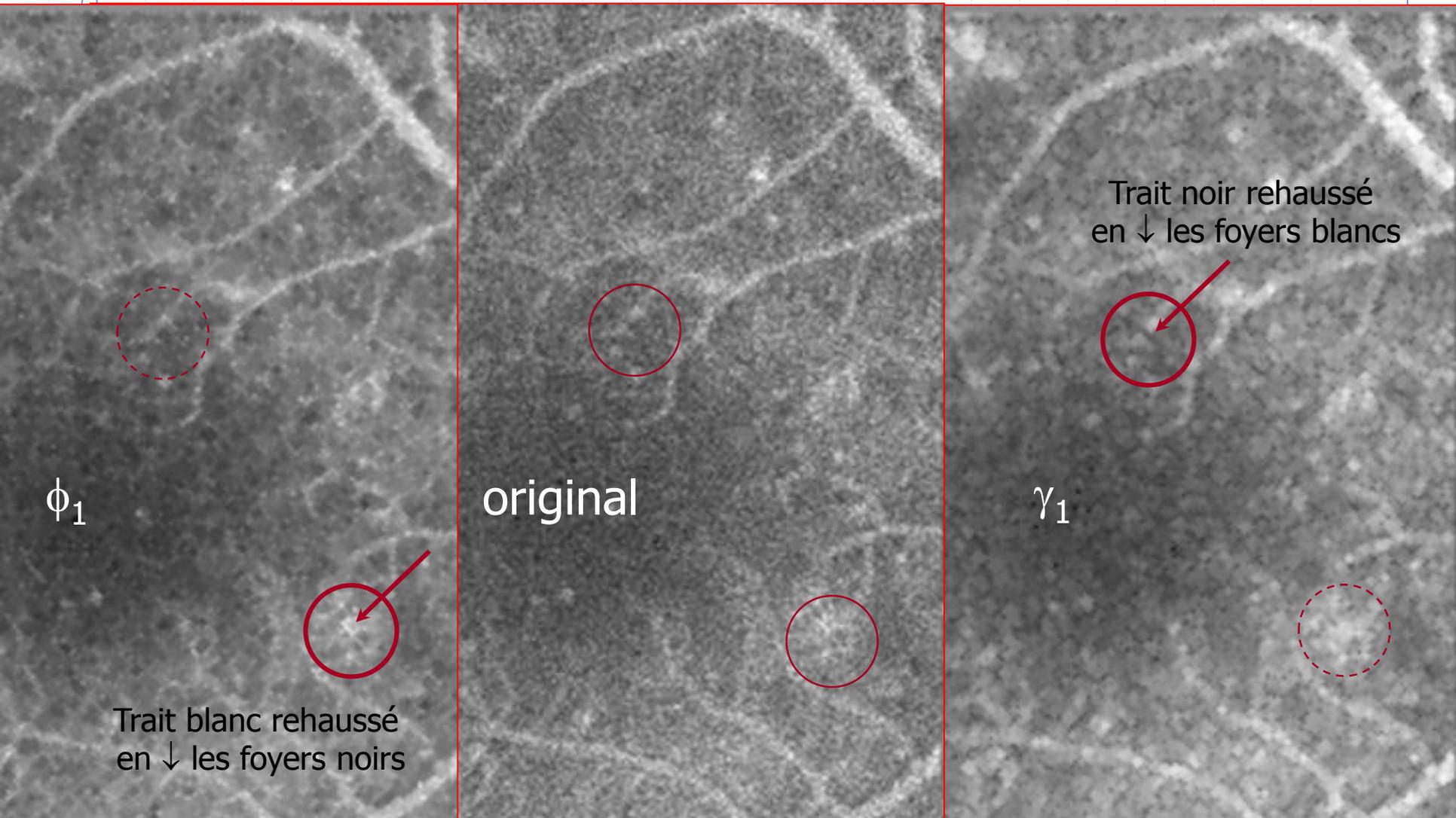
# Filtres morphologiques



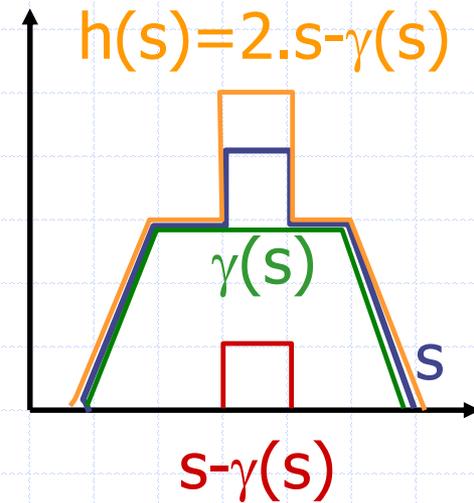
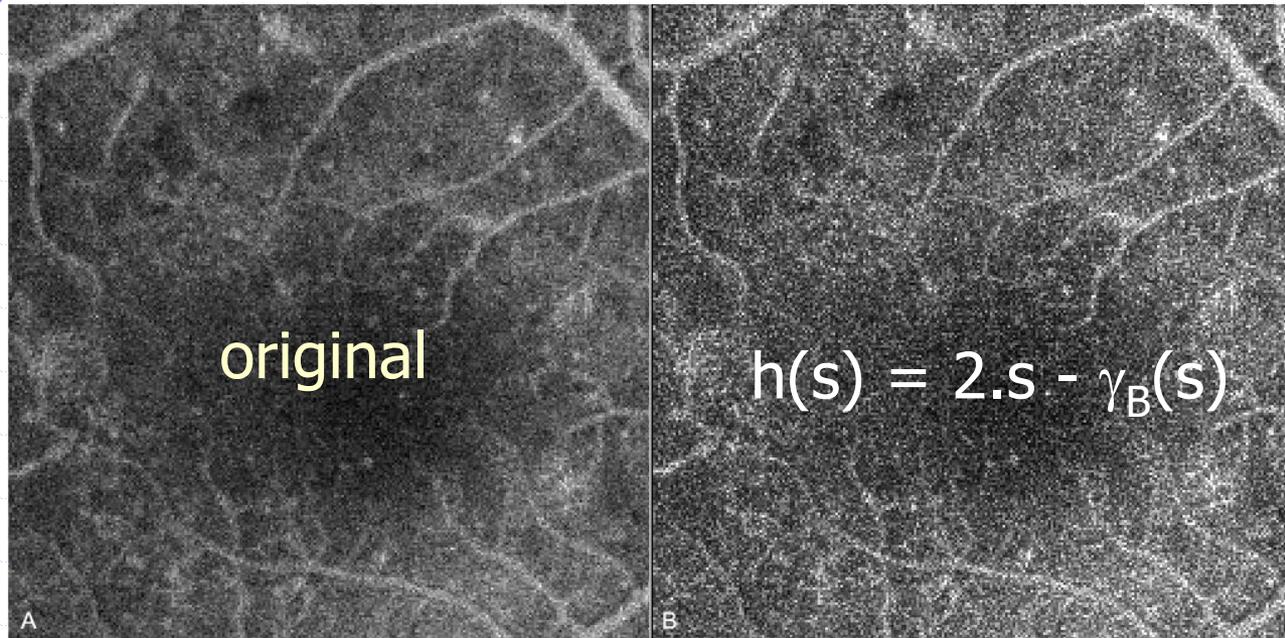
$$\gamma\varphi(s)(i, j) = (\delta \circ \varepsilon)(\varepsilon \circ \delta)(s)(i, j)$$

Algorithme : fermeture suivie d'une ouverture : gomme les hyper et les hypo-signaux petits par rapport à V sans utiliser la fréquence comme critère

# Filtres morphologiques

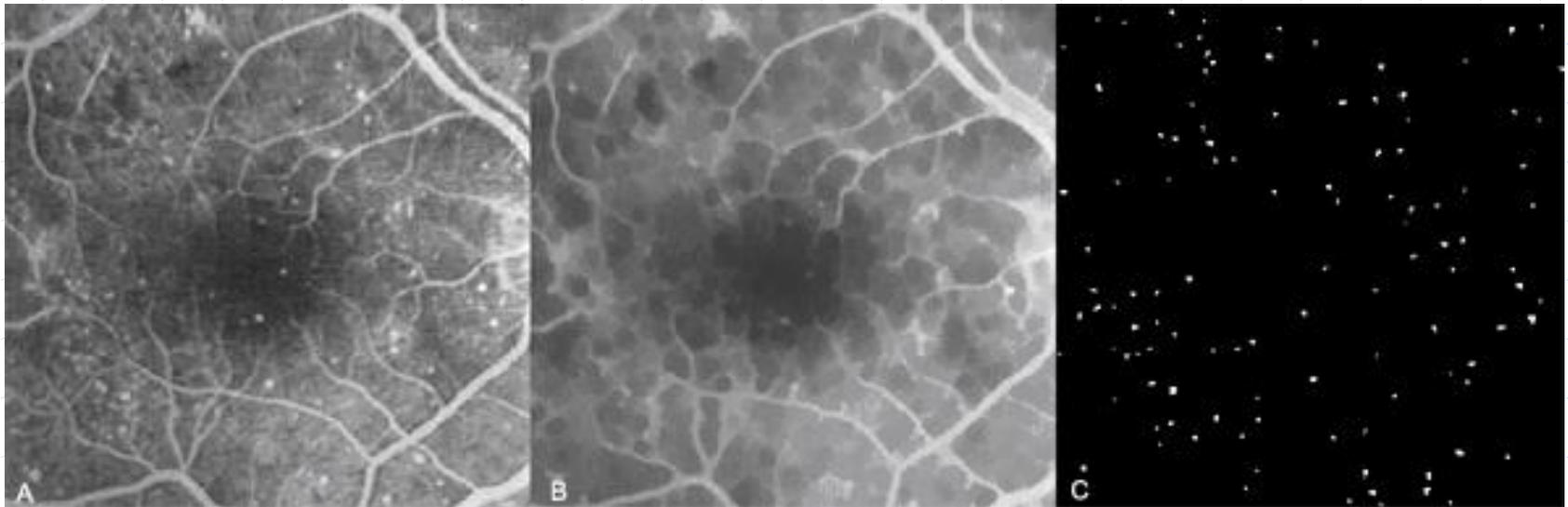


# Transformation « chapeau haut de forme »



# Contrôle de l'activité d'un filtre

- Opérateurs géodésiques
  - ♦ dilater  $m < s$  tant que  $\delta(m) < s$
  - ♦ éroder  $m > s$  tant que  $\varepsilon(m) > s$



original

$\delta_s^\infty(\varepsilon)$  puis  $\varepsilon_s^\infty(\delta_B)$

Différence seuillée

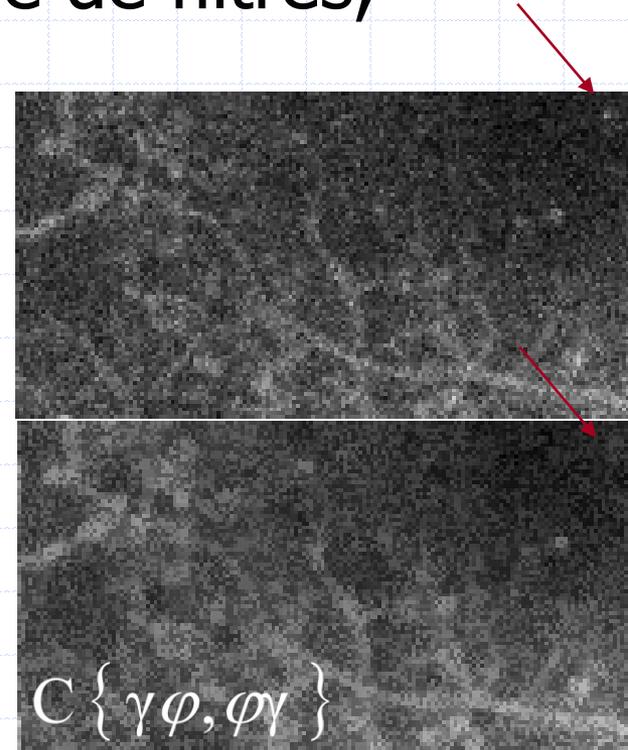
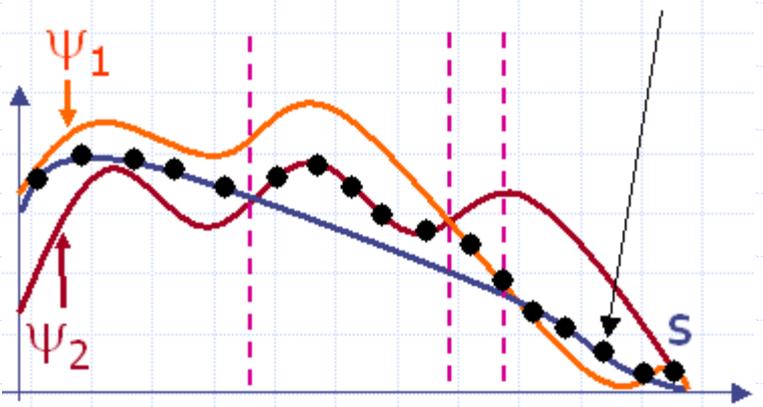
# Contrôle de l'activité d'un filtre

- Opérateurs géodésiques

- ◆ dilater  $m < s$  tant que  $\delta(m) < s$
- ◆ éroder  $m > s$  tant que  $\varepsilon(m) > s$

- Centres: on se donne une famille de filtres,

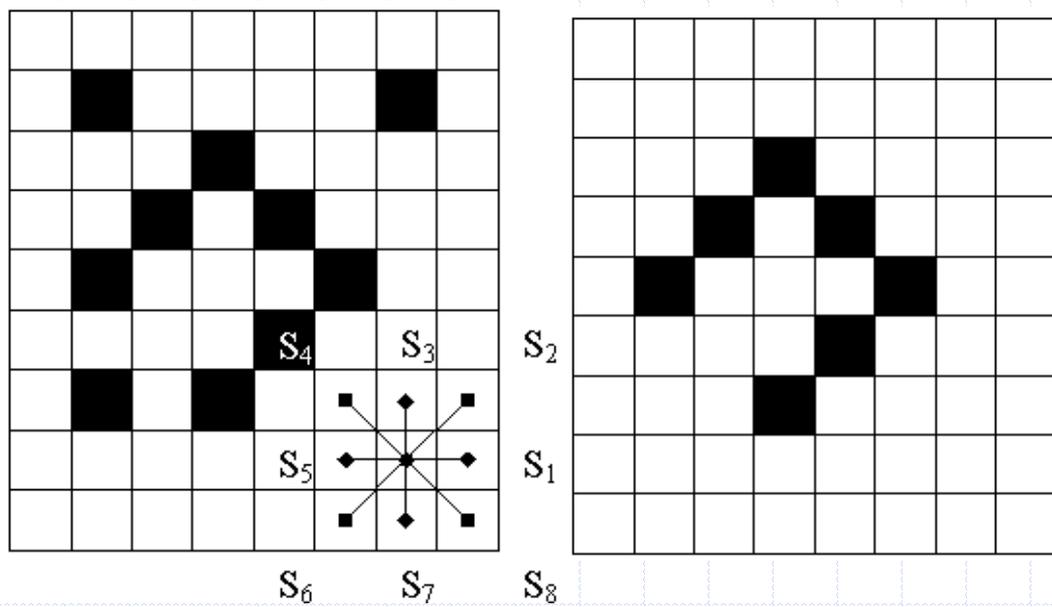
- ◆ et pour chaque pixel, on choisi le moins actif si tous les filtres agissent dans le même sens, sinon, on ne modifie pas le pixel.



$$C \{ \gamma \varphi, \varphi \gamma \}$$

# Contrôle de l'activité d'un filtre

- Opérateurs géodésiques
- Centres
- Extrema d'opérateurs
  - ◆ Abandonner l'invariance dans le décalage de l'élément structurant: Sup d'érodés ou Inf de dilatés.

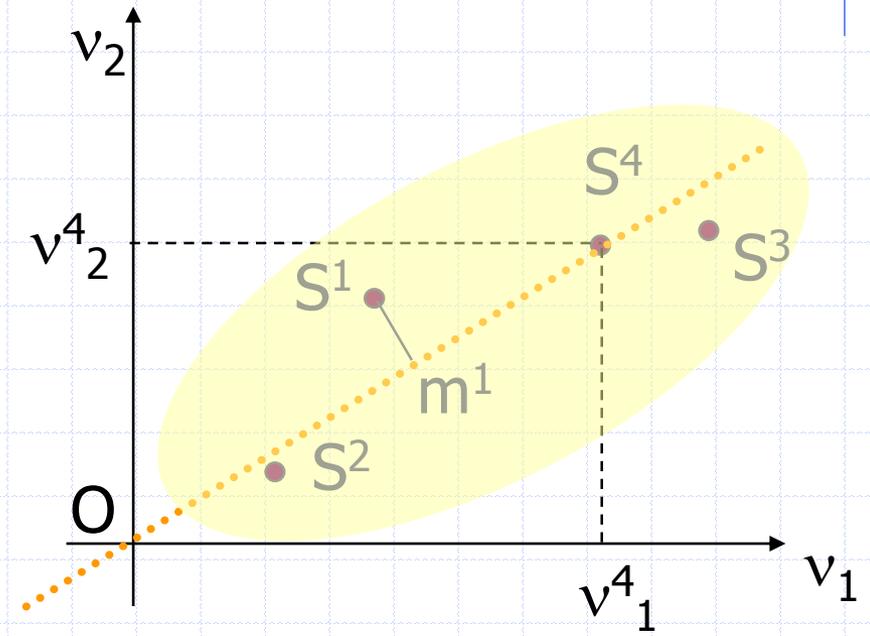
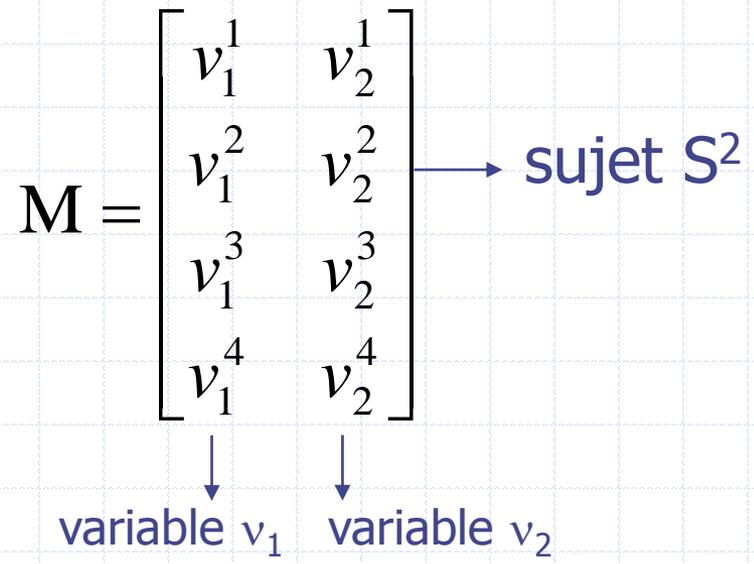


On érode (dilata) avec un segment de direction choisie pour fournir le résultat le plus (moins) élevé.

$$\varepsilon(s)(i,j) = \text{Sup}_k ( \varepsilon_{S_k} )(s)(i,j)$$

# Analyse Factorielle des Correspondances

Analyse de 2 variables  $v_n$  (ex: taille et poids) sur 4 sujets  $S^p$



**Idée :** isoler les caractéristiques principales de chaque sujet  $S^i$  en ne le décrivant que par le point  $m^i$  (« costaud » ou pas) :  $\downarrow$  le nombre de variables

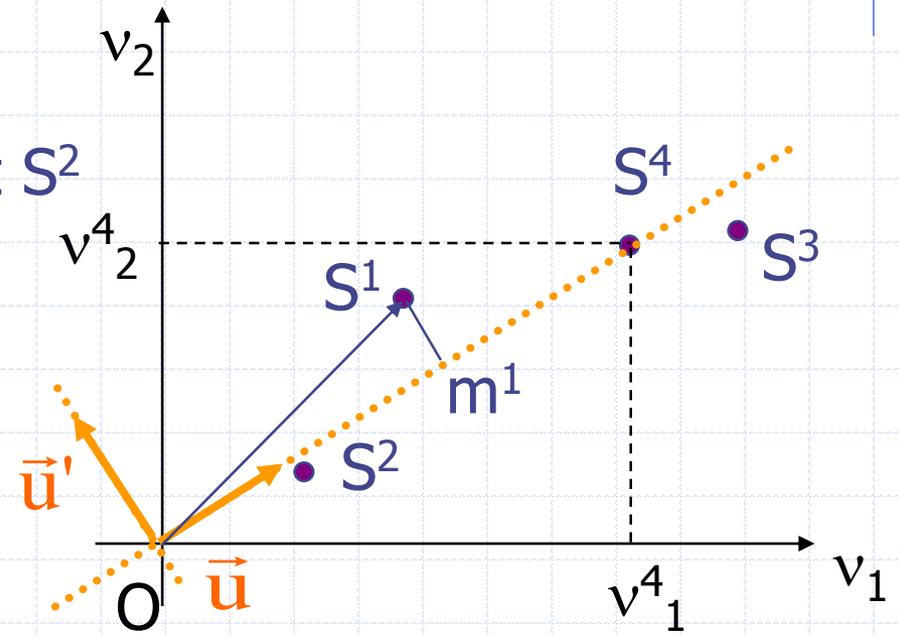
# Analyse Factorielle des Correspondances

Analyse de 2 variables  $v_n$  (ex: taille et poids) sur 4 sujets  $S^p$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \\ v_1^4 & v_2^4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \\ m^4 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$  variable  $v_1$        $\downarrow$  variable  $v_2$

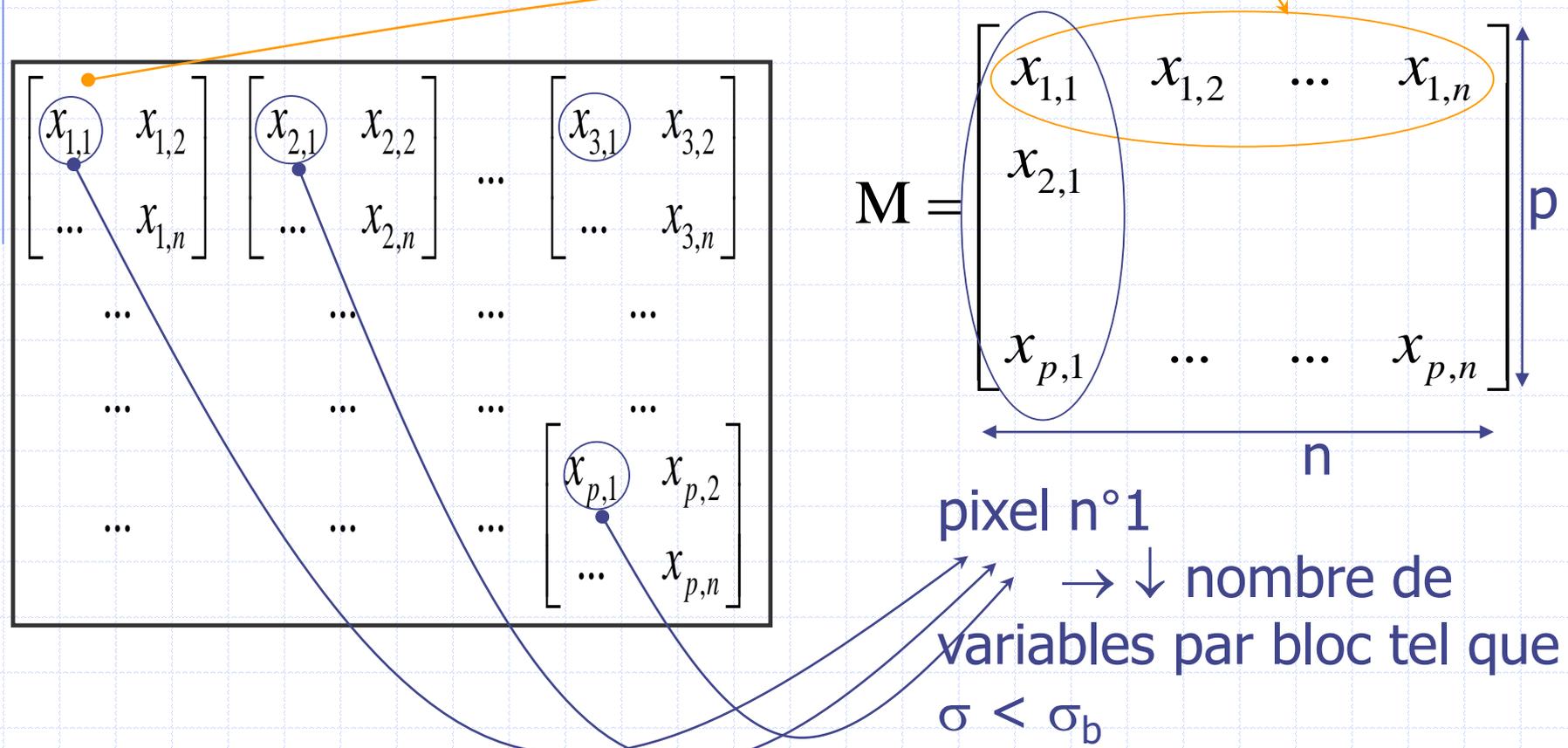
→ sujet  $S^2$



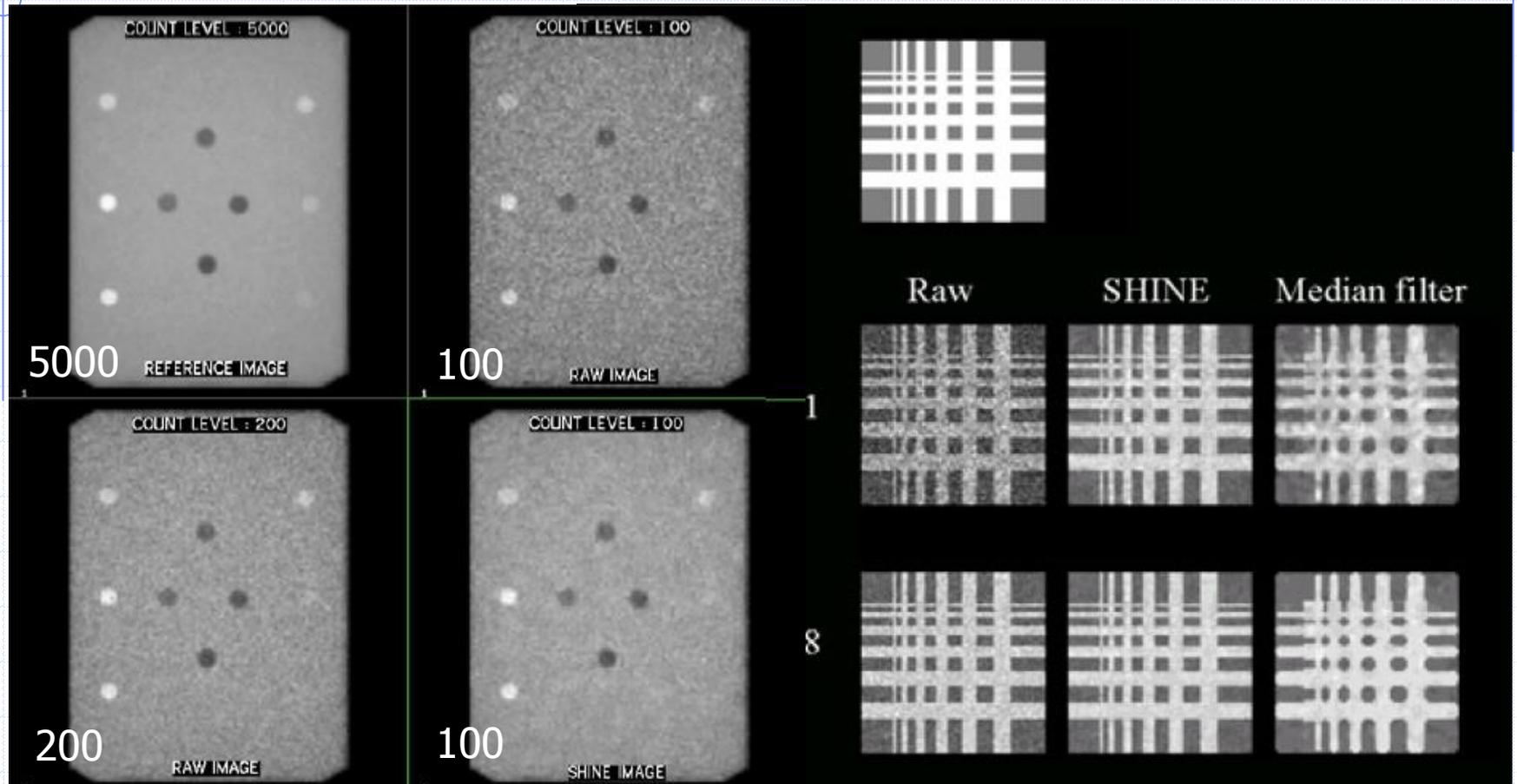
**Idée :** isoler les caractéristiques principales de chaque sujet  $S^i$  en ne le décrivant que par le point  $m^i$  (« costaud » ou pas) : ↓ le nombre de variables

# Construction de la matrice des données

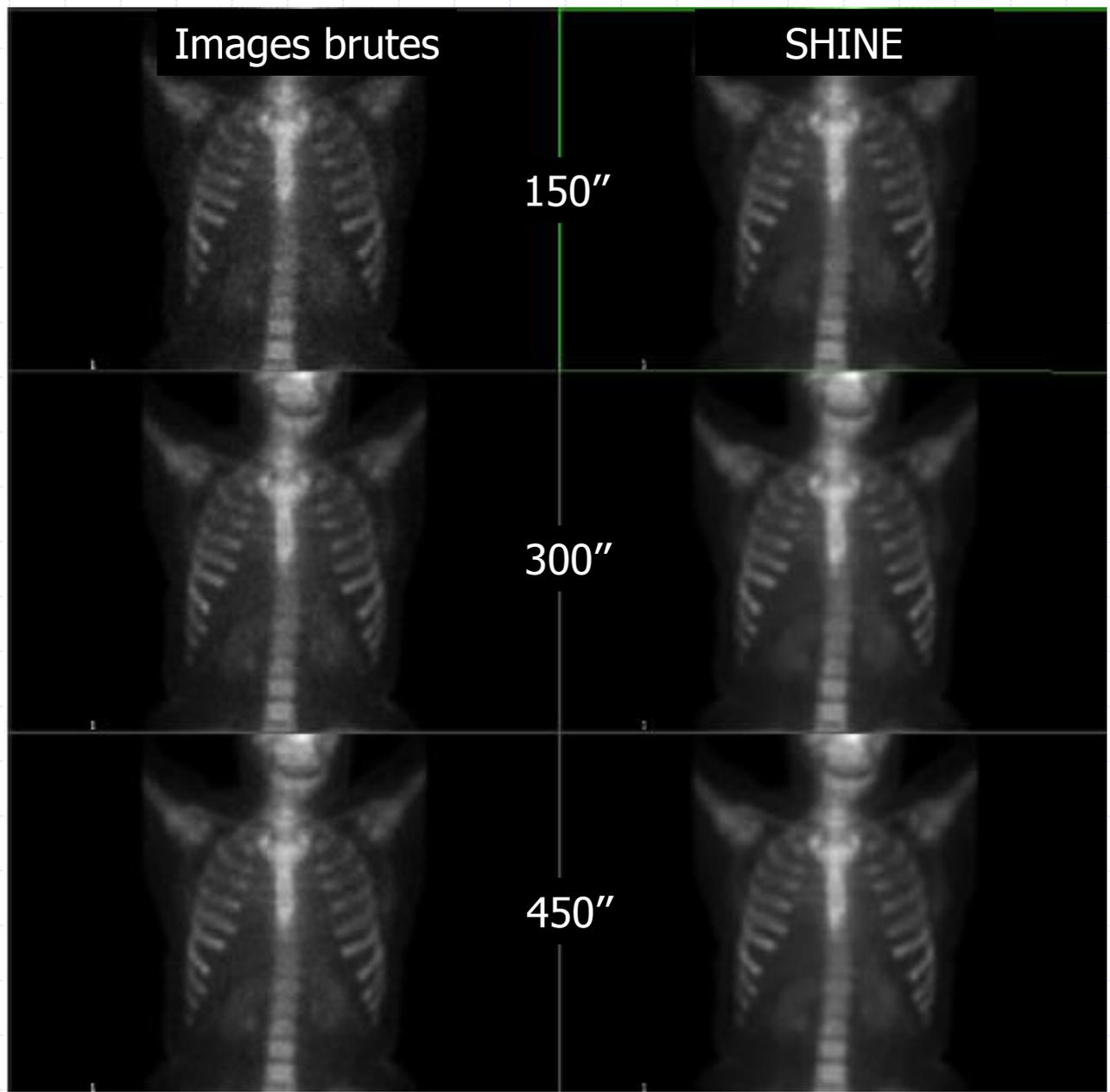
Découpage de l'image par blocs  
 (≡ sujets) de n pixels (≡ variables)



# Statistical Heuristic Image Noise Extraction



# SHINE



# FILTRES NON LINEAIRES

- Il s'agit toujours de comparer des a priori sur la nature du signal et du bruit à l'information de voisinage, mais de façon non linéaire.
- Ces filtres sont irréversibles.
- Non invariants dans le décalage
  - Mode opératoire différent suivant la région de l'image traitée
  - Ex : lissage sur masque adapté
- N'opérant pas par moyenne pondérée
  - Ex : filtres de nature statistique: filtre médian, SHINE
  - Ex : filtres morphologiques : ouvertures et fermetures.
- Difficultés
  - Pour paramétrer et pour contrôler l'activité de ces filtres.

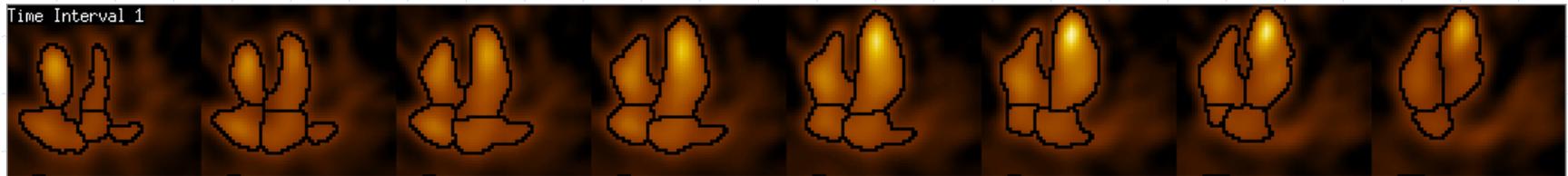
## ③ SEGMENTATION

**Définition et généralités**

**Application de seuils**

**Recherche de frontières**

# Notion de segmentation



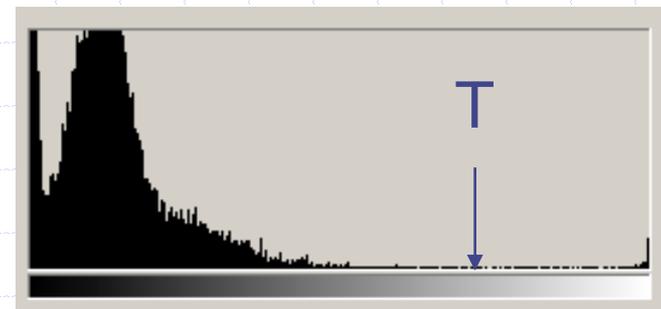
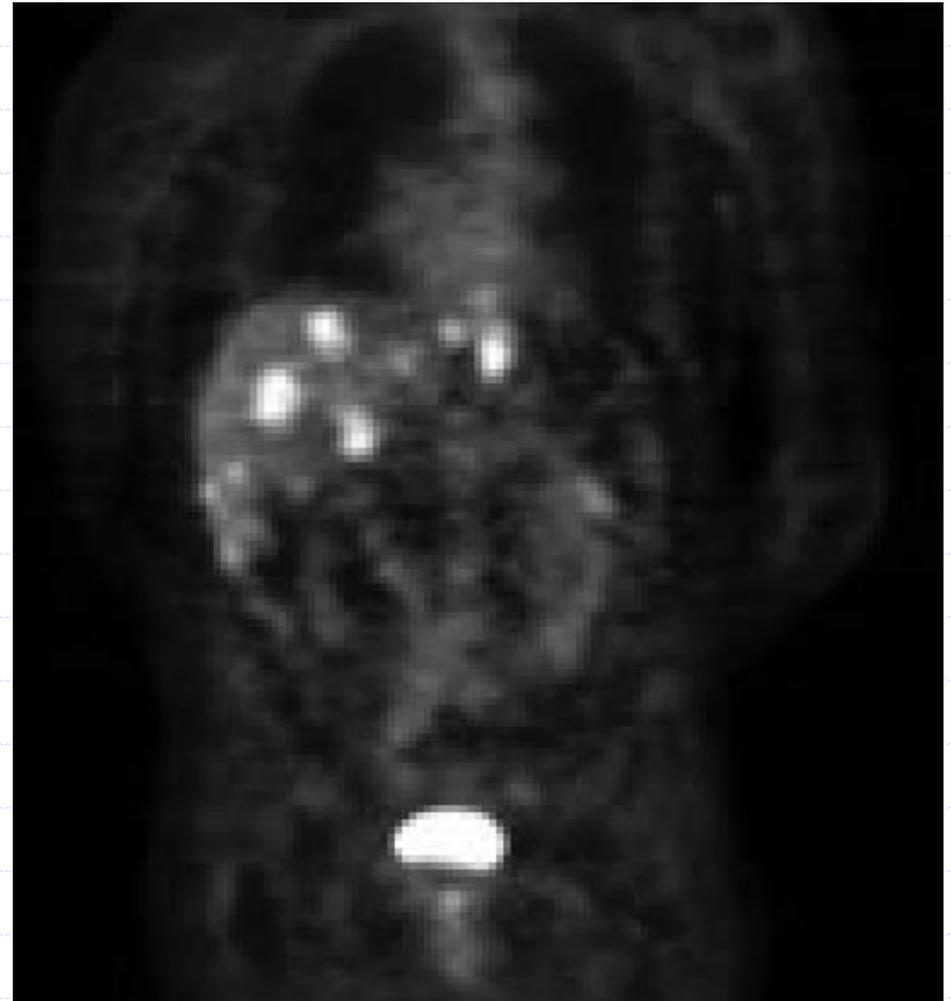
- Partition d'une image en régions d'intérêt (ROI)
- Première étape d'une analyse d'image
  - Extraction d'une mesure physique dans une ROI
- ◆ Quantification morphologique ou fonctionnelle

# Méthodes de segmentation

- Seuillages
- Croissance de régions
- Recherches de frontières entre objets
  - Méthodes dérivatives
  - Méthodes morphologiques (gradients, LPE)
- Autres
  - Champs de Markov, réseaux de neurones, regroupement de pixels, étiquetage par analogie à des modèles, modèles déformables, atlas, analyse d'une évolution temporelle (ventriculographie, scintigraphie rénale...)

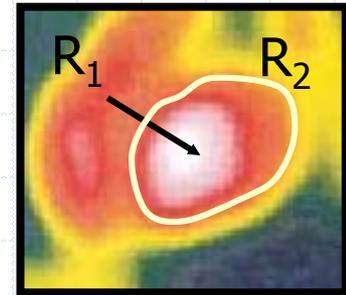
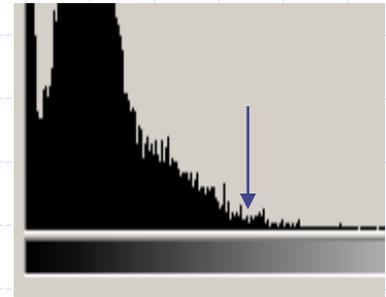
# Seuillage simple

- Définition d'un seuil  $T$  sur l'image ou l'histogramme
- Sélection des pixels de niveau supérieurs ou inférieurs à  $T$

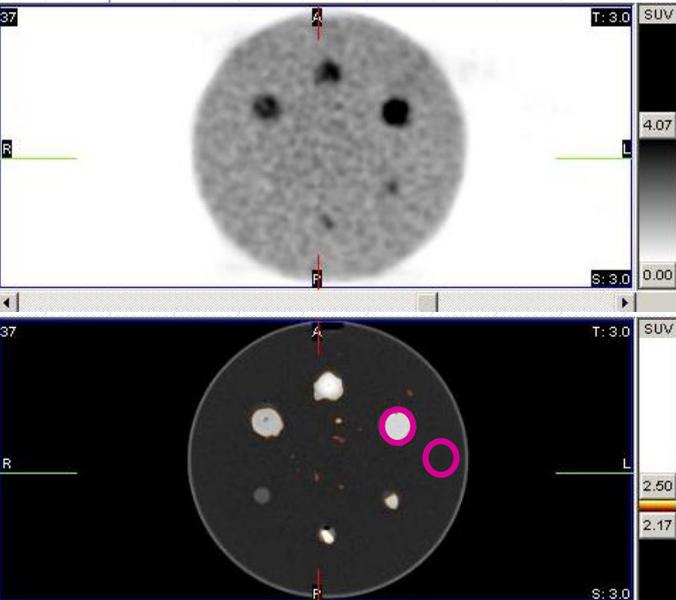
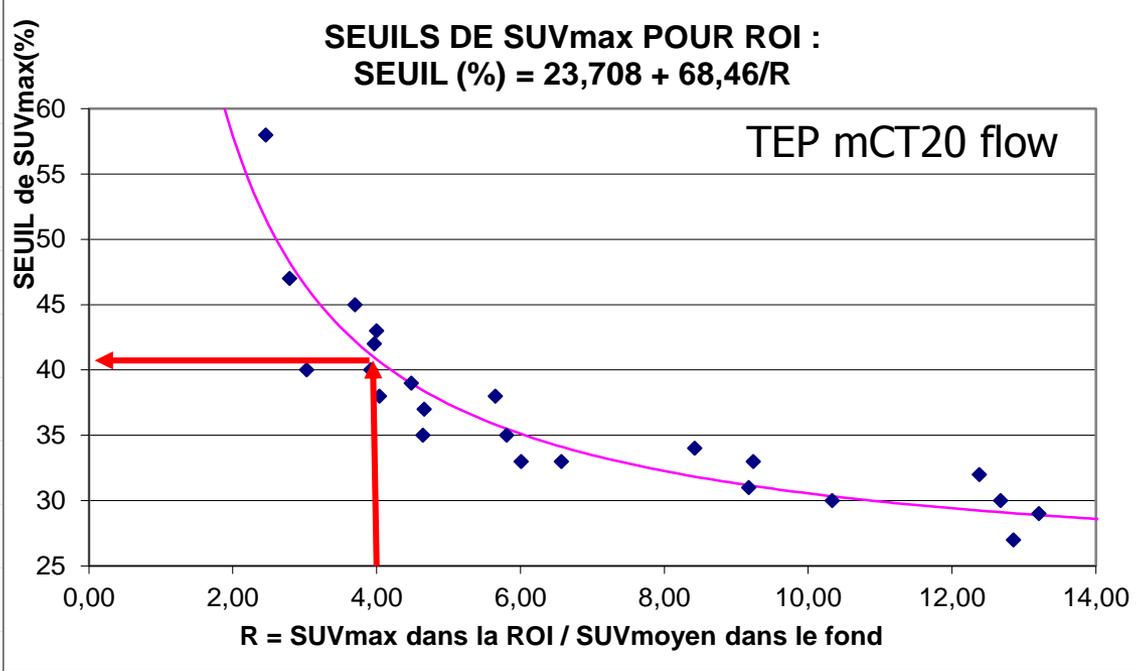
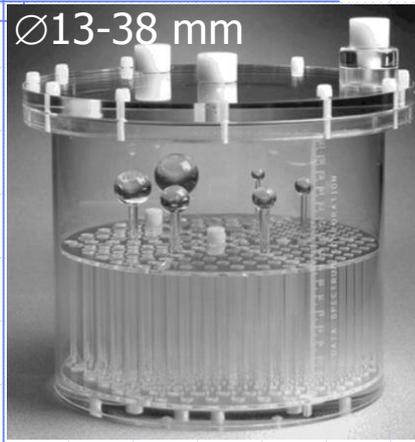


# Choix du seuil

- Minimum de l'histogramme
- % d'un maximum de l'image
- Automatique:
  - Initialisation de  $T$
  - $R_1 = \{(i,j) / S(i,j) > T\}$  et  $R_2 = \{(i,j) / S(i,j) \leq T\}$
  - $M_1 = \text{Moyenne}_{R_1} S(i,j)$  et  $M_2 = \text{Moyenne}_{R_2} S(i,j)$
  - $T = (M_1 + M_2) / 2$  tant que  $M_1$  ou  $M_2$  change
- Optimisation d'une fonctionnelle
- **Seuillage adaptatif en % d'un maximum**



# SEUILLAGE ADAPTATIF (Daisne)



→ % SUV max qui conduit à une ROI sphérique de rayon exact  
 % SUV moyen dans le fond  
 → On trace l'hyperbole  $\%SUV_{max} = f(SUV_{max}/SUV_{fond})$

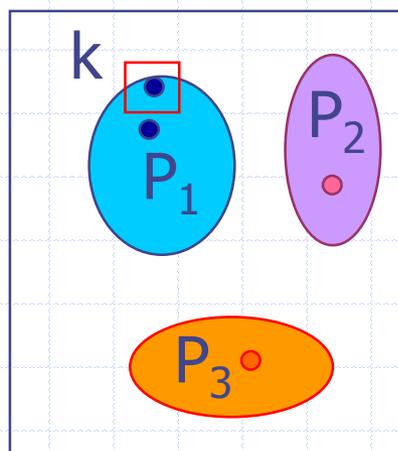
S Vauclin, Eur J Nucl Med 2006

# Seuillage par hystérésis



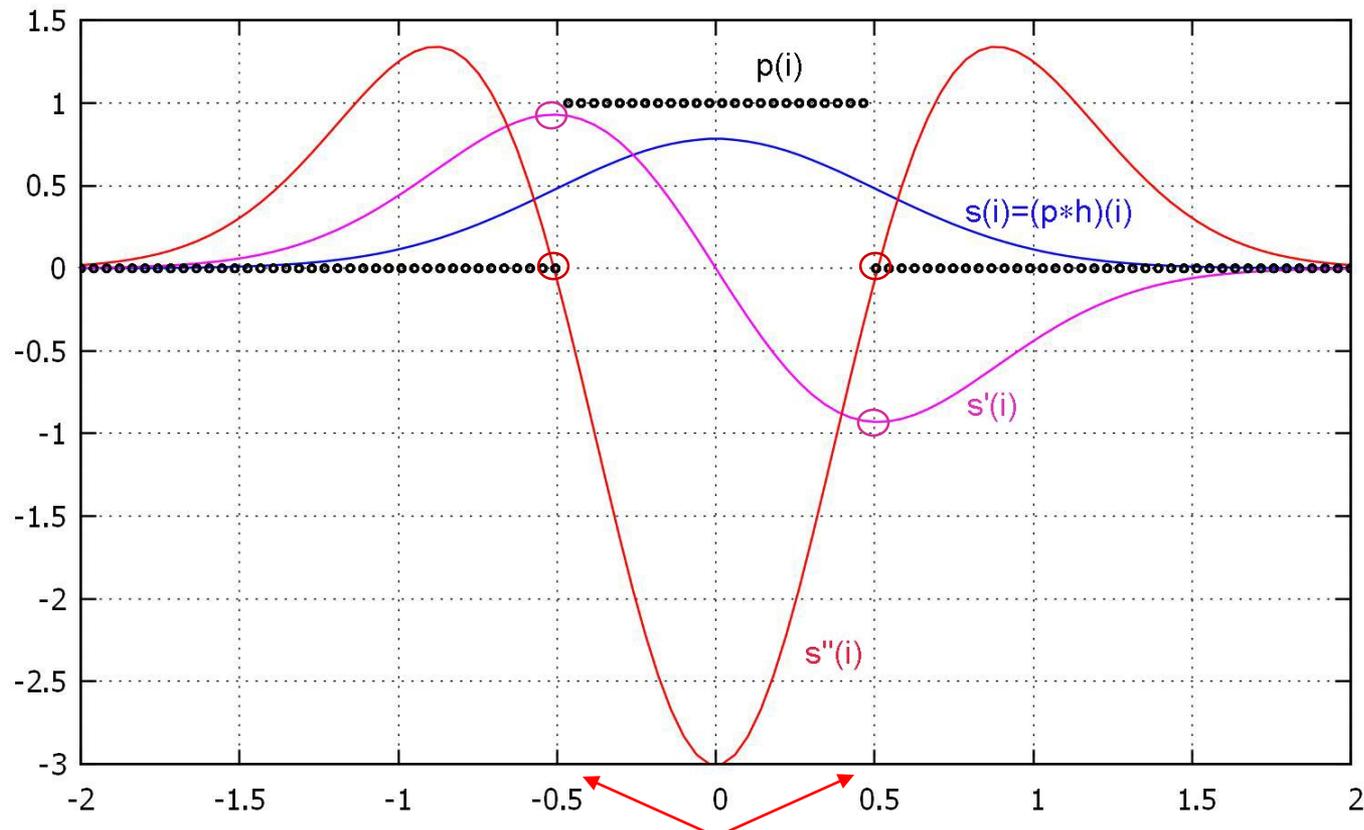
- Définition d'un seuil haut  $S_h$  et d'un seuil bas  $S_b$
- Seuillage haut:  $R' = \{ (i,j) / S(i,j) > S_h \}$
- $R'' = \{ (i,j) / S(i,j) > S_b$   
et  $(i,j)$  connexe à  $(i',j') \in R' \}$
- $R = R' \cup R''$

# Croissance de régions



- Initialisation:  $R_i = \{P_i\}, i=1-3$
- Pour chaque région  $i$ 
  - $M_i =$  Moyenne des pixels dans  $R_i$
  - Pour chaque pixel  $k$  au bord de  $R_i$ 
    - Pour chaque pixel  $(x,y)$  voisin de  $k$ 
      - Si  $(x,y)$  non affecté et  $|S(x,y) - M_i| < \varepsilon$
      - alors  $R_i = R_i \cup \{(x,y)\}$
      - $M_i =$  moyenne des pixels dans  $R_i$
- Si au moins un pixel affecté

# Méthodes dérivatives



Frontières :

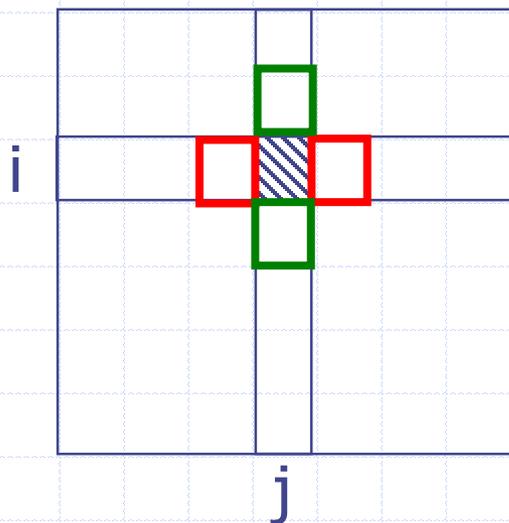
- Extrema du gradient ( $s'$ ) ○
- Passages par zéro du Laplacien ( $s''$ ) ○

# Filtres passe-haut: Gradients



$$g_h(i, j) = f(i+1, j) - f(i-1, j) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g_v(i, j) = f(i, j+1) - f(i, j-1) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

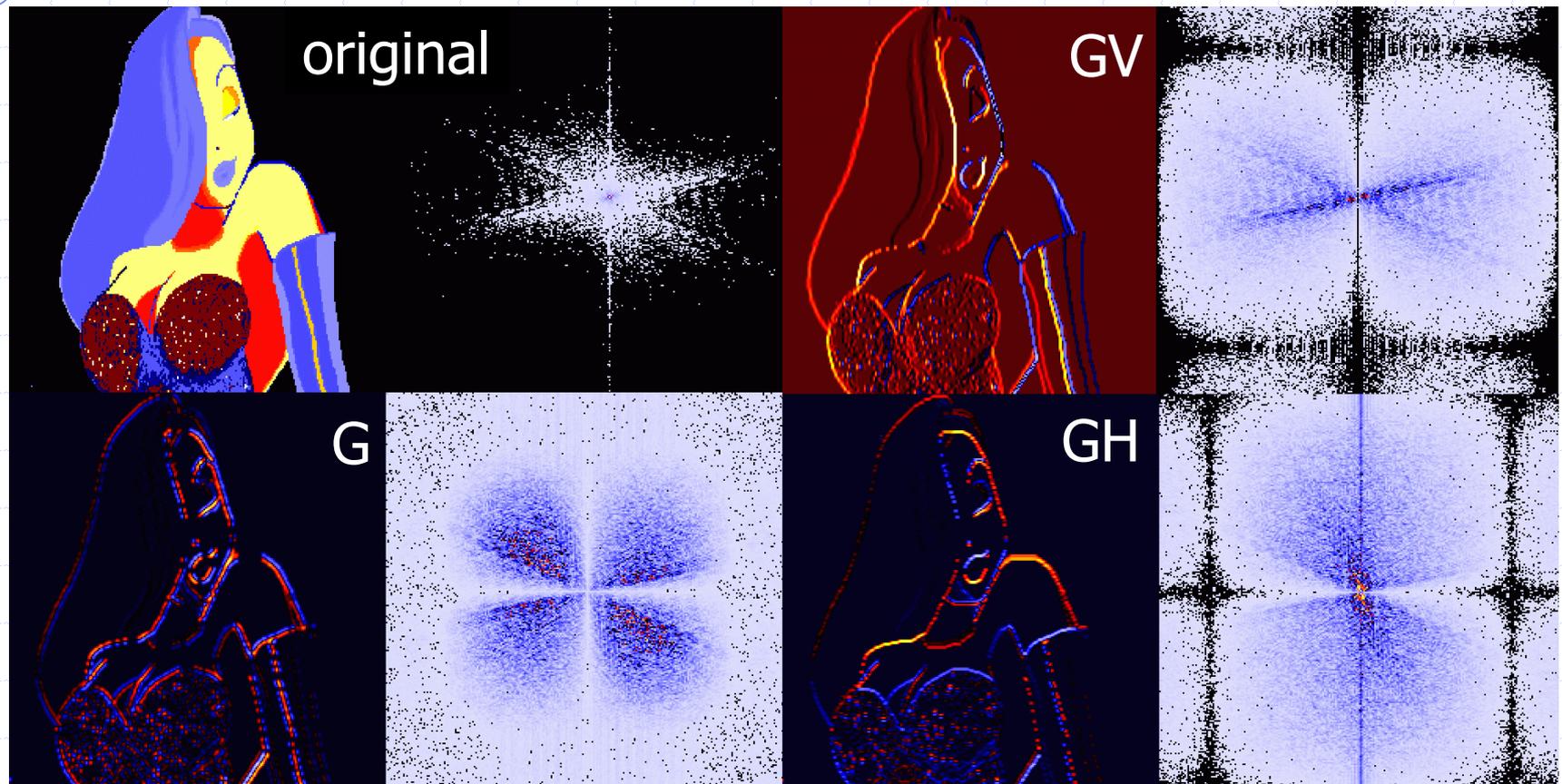


Exemple de généralisation 2d:

$$G_h = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Filtres passe-haut: Gradients



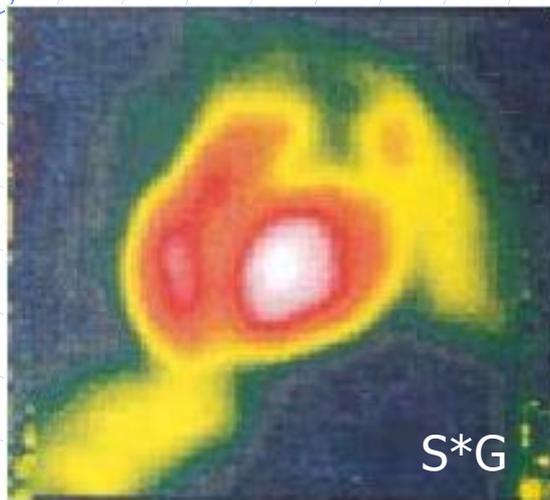
GV (GH) isole les frontières verticales (horizontales)

# Segmentation par gradient (Canny)

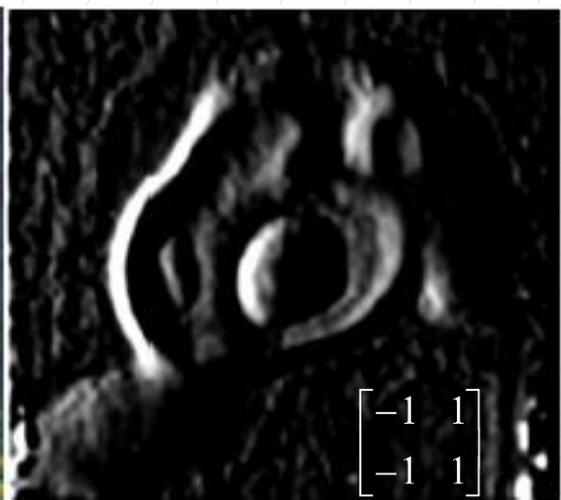
Pour optimiser la sensibilité et la localisation des frontières :

- Lissage par filtre Gaussien
- Calcul du gradient et de sa norme
- Extraction des maxima locaux dans la direction du gradient
- Seuillage par hystérésis de l'image des maxima locaux

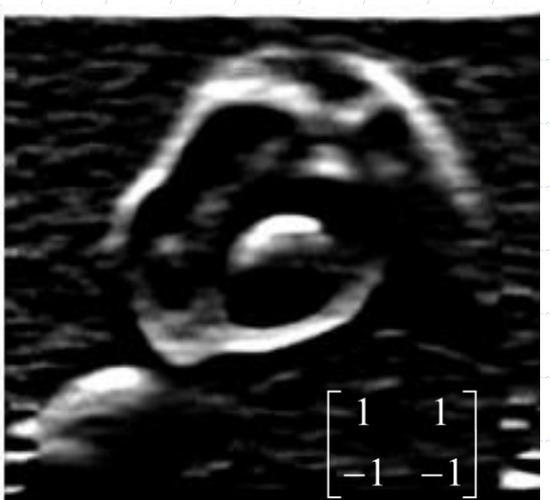
# Segmentation par gradient (Canny)



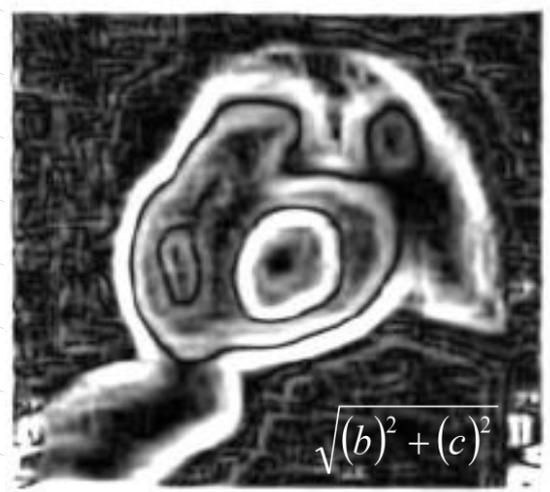
(a)



(b)



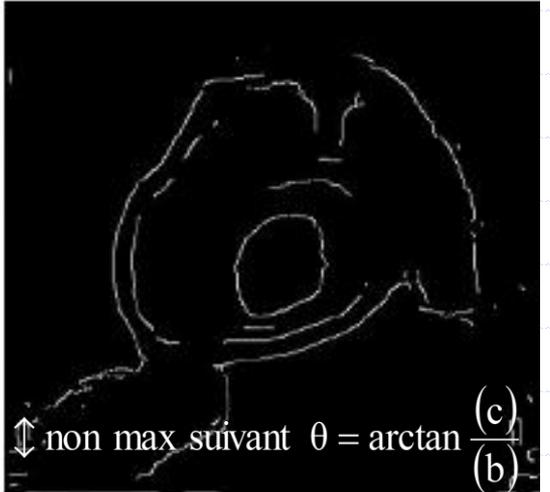
(c)



(d)

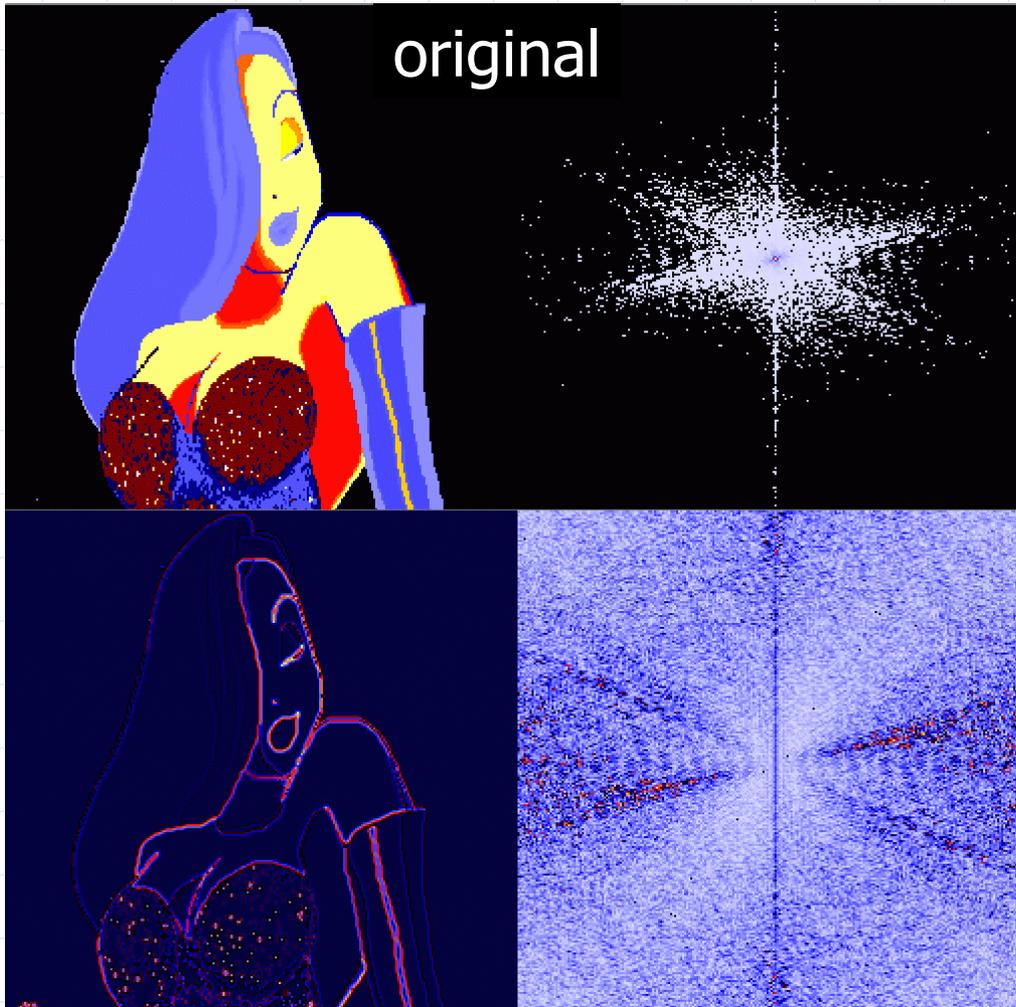


(e)



(f)

# Filtres passe-haut: Laplacien

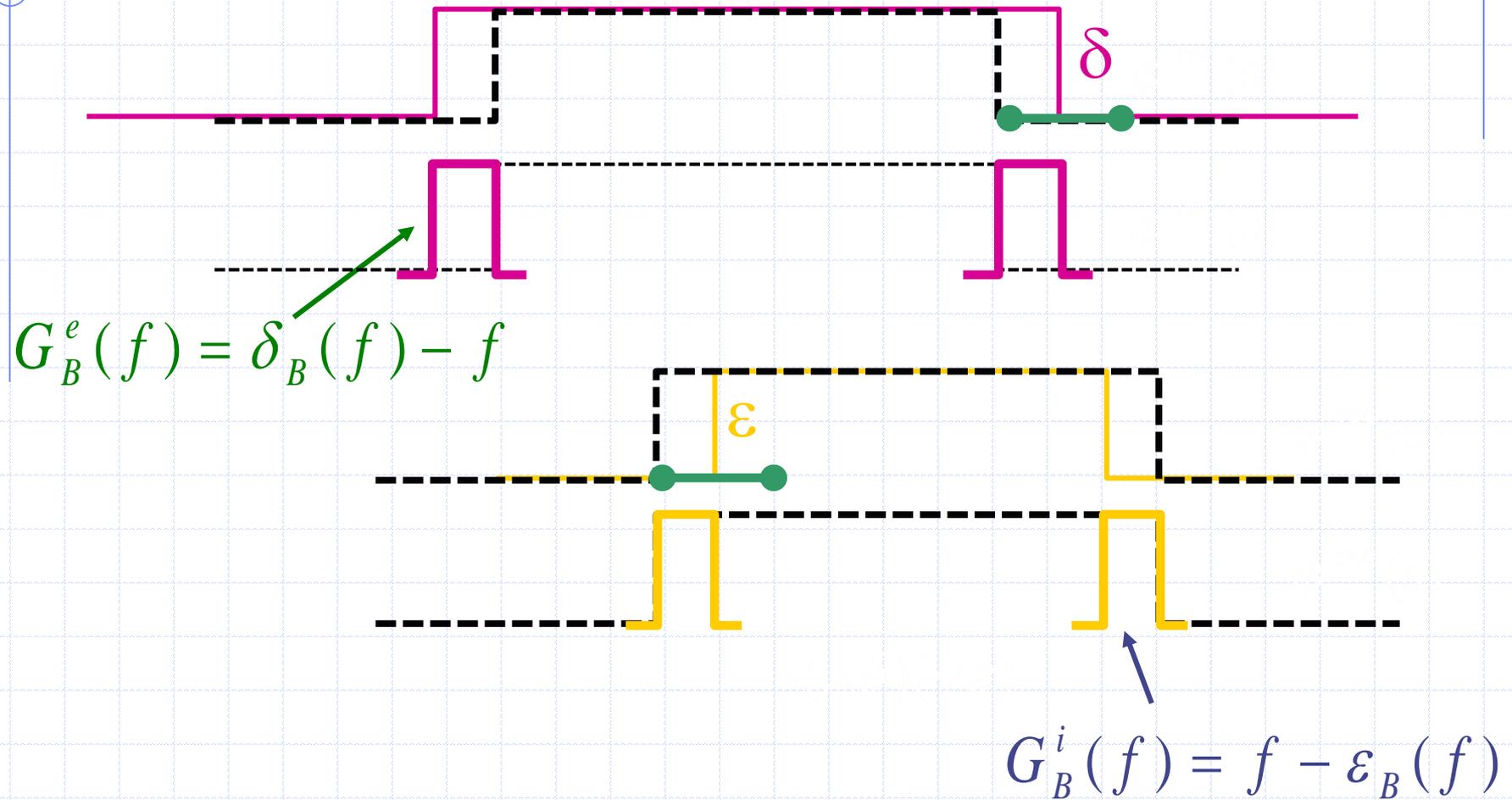


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Segmentation par Laplacien

- Calcul du Laplacien
- Création de l'image des passages par zéro affectés par la norme du gradient
- Seuillage par hystérésis de cette image

# Gradients morphologiques



# Gradients morphologiques



$$G_B^e(f) = \delta_B(f) - f$$

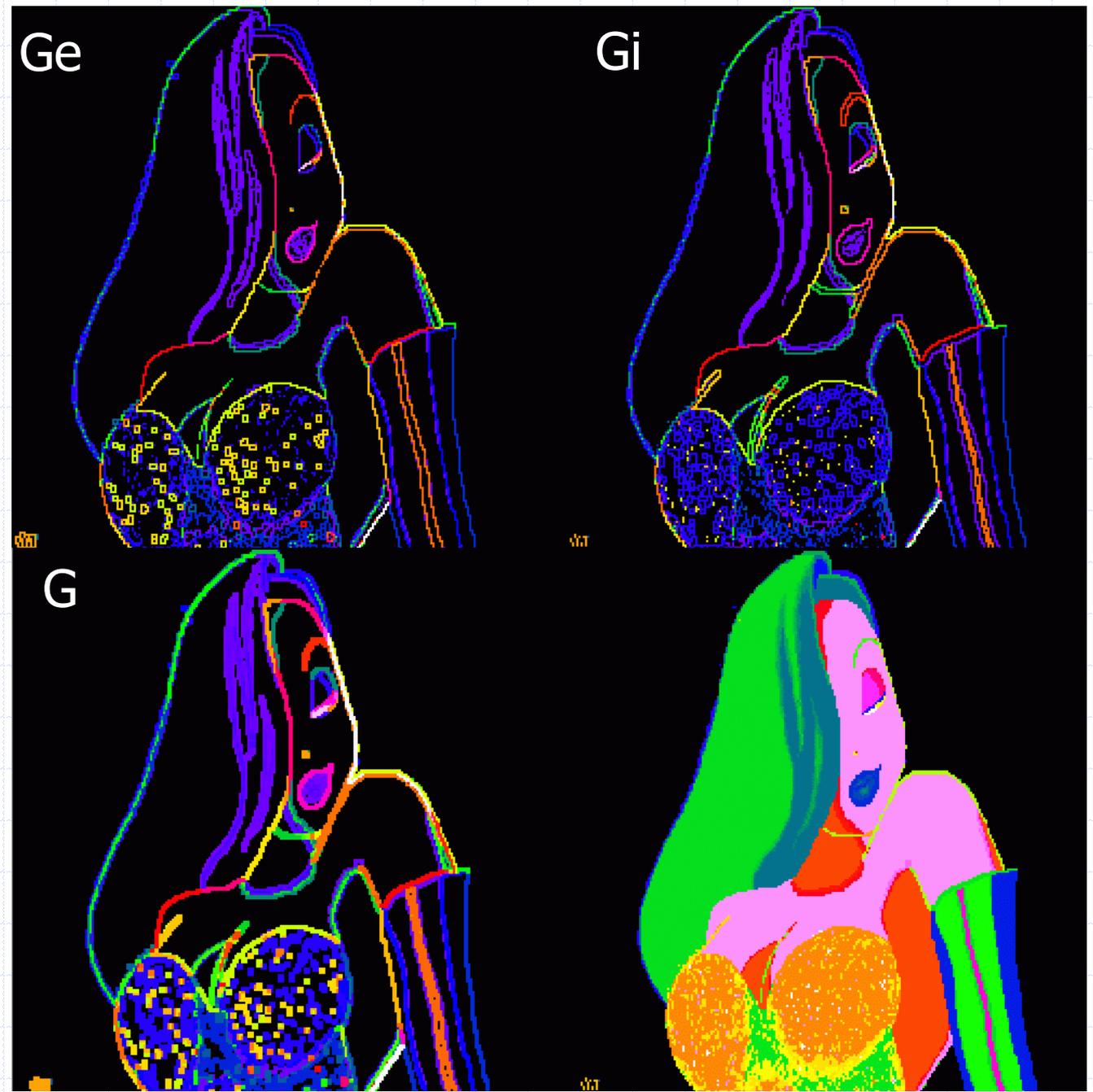


$$G_B^i(f) = f - \epsilon_B(f)$$

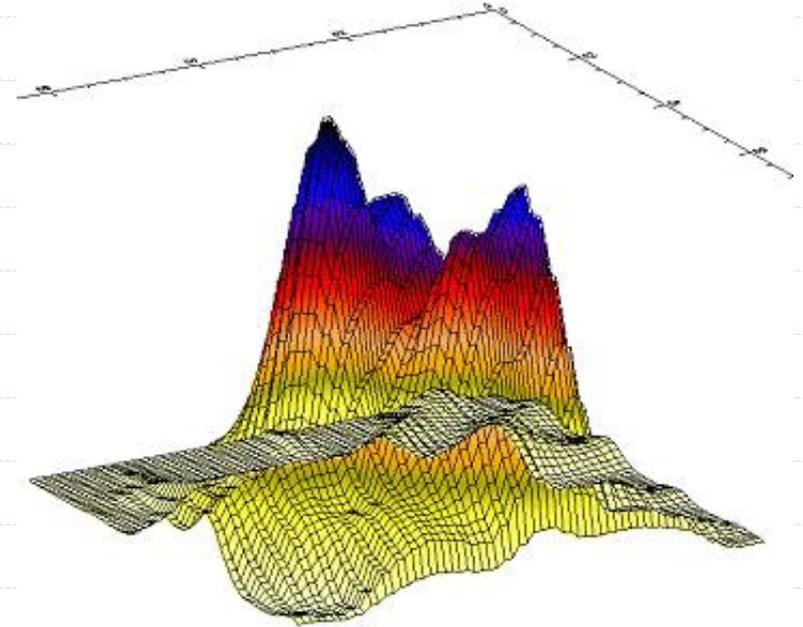
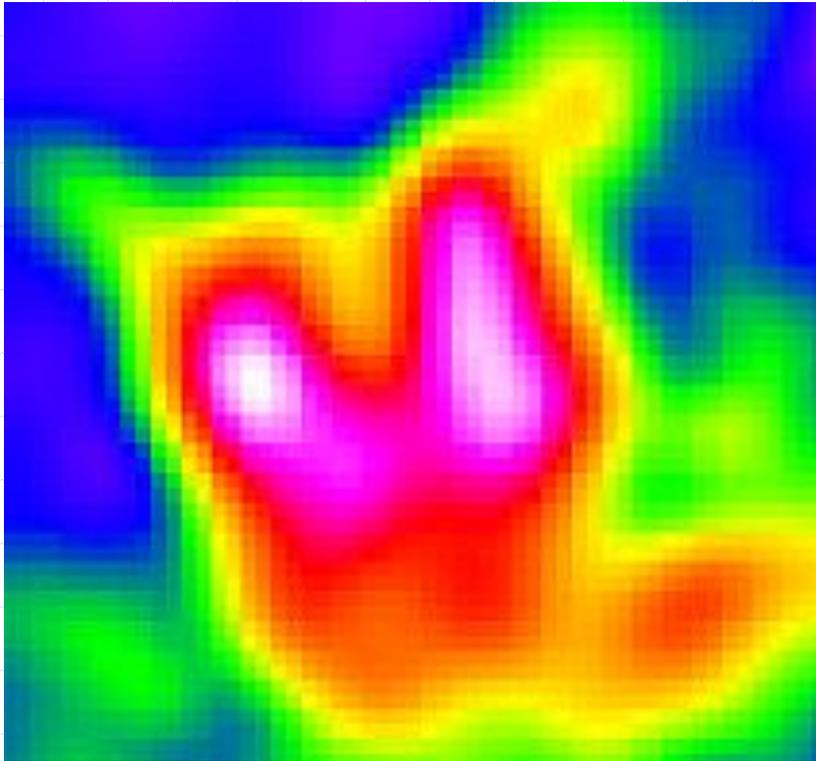


$$G_B(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f)$$

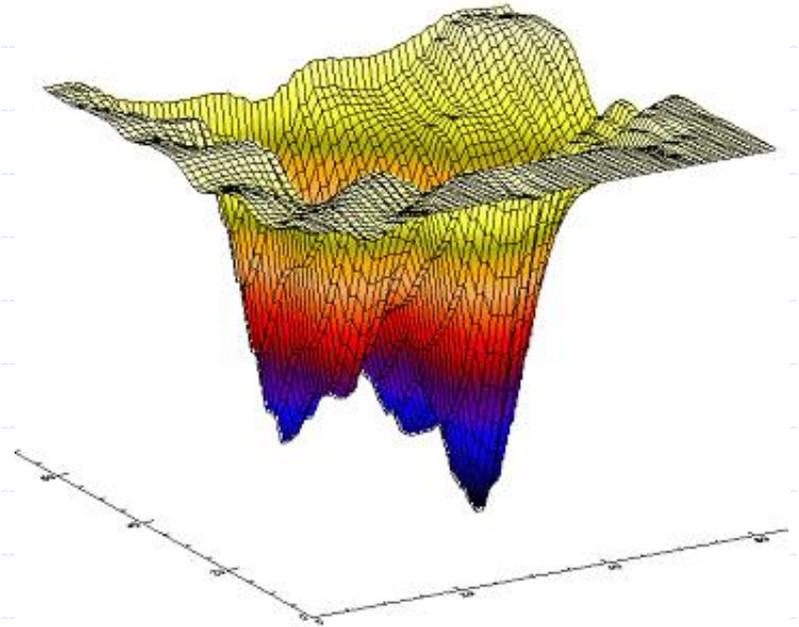
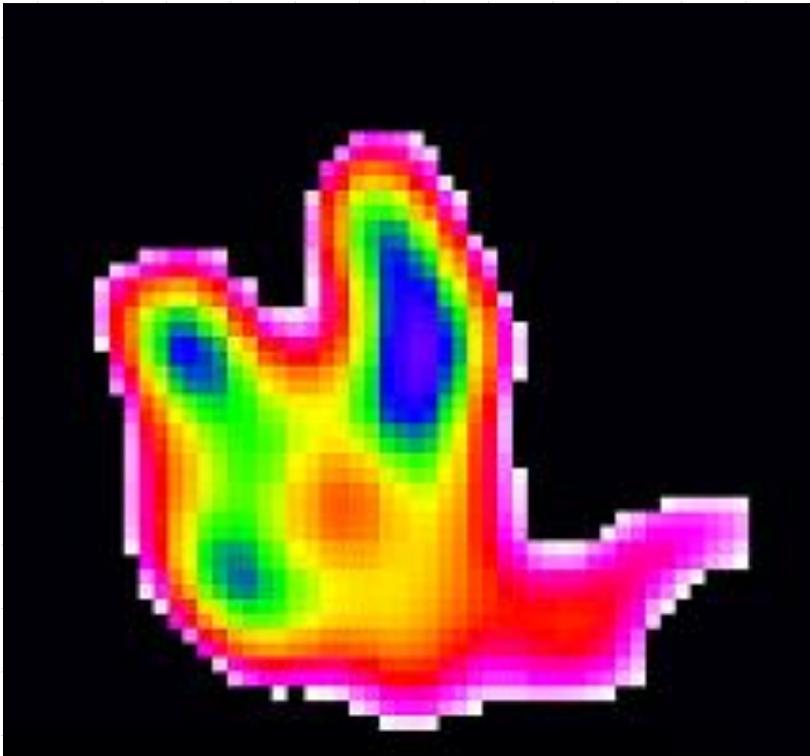
Gradients morphologiques



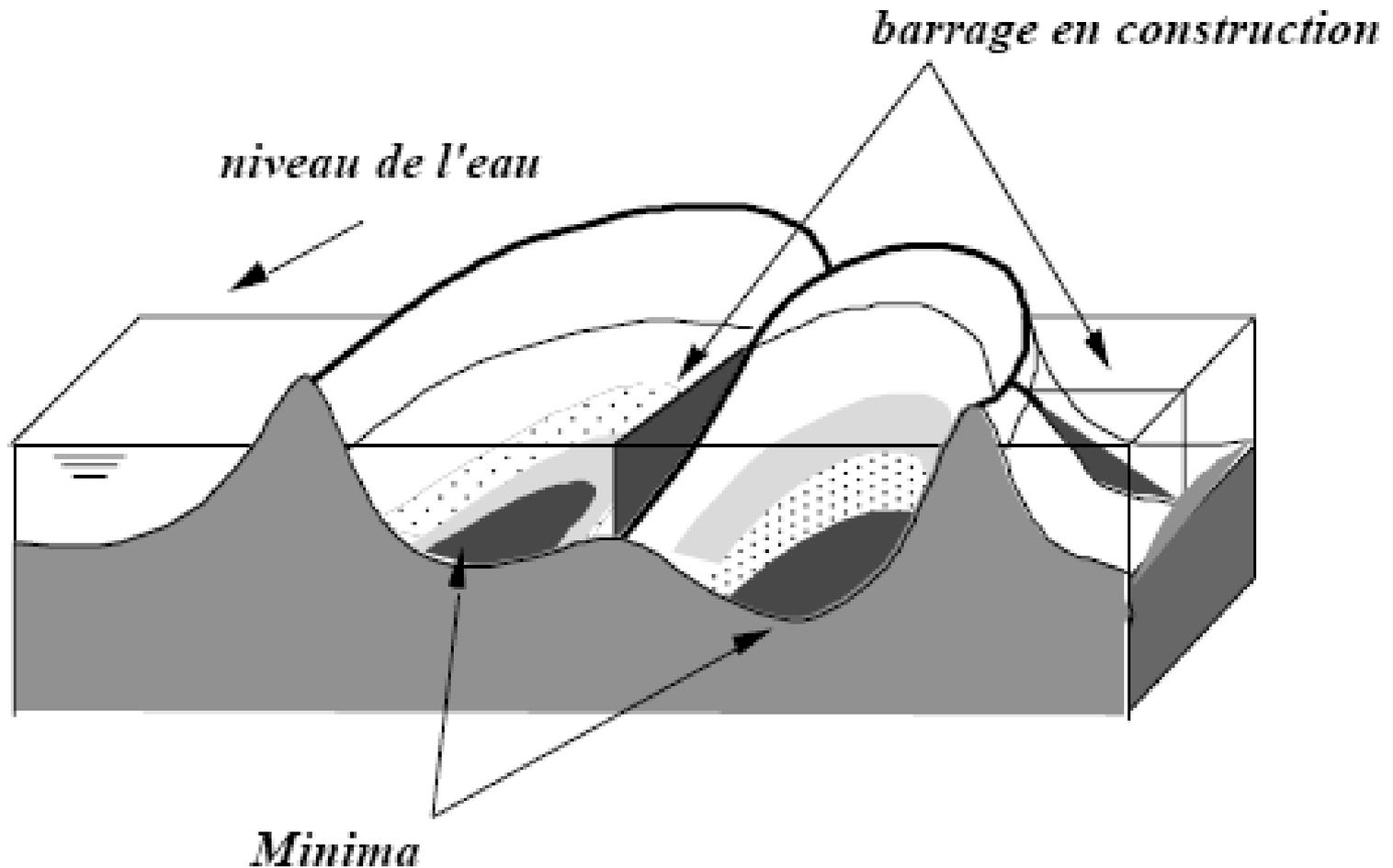
# Ligne de partage des eaux



# Ligne de partage des eaux



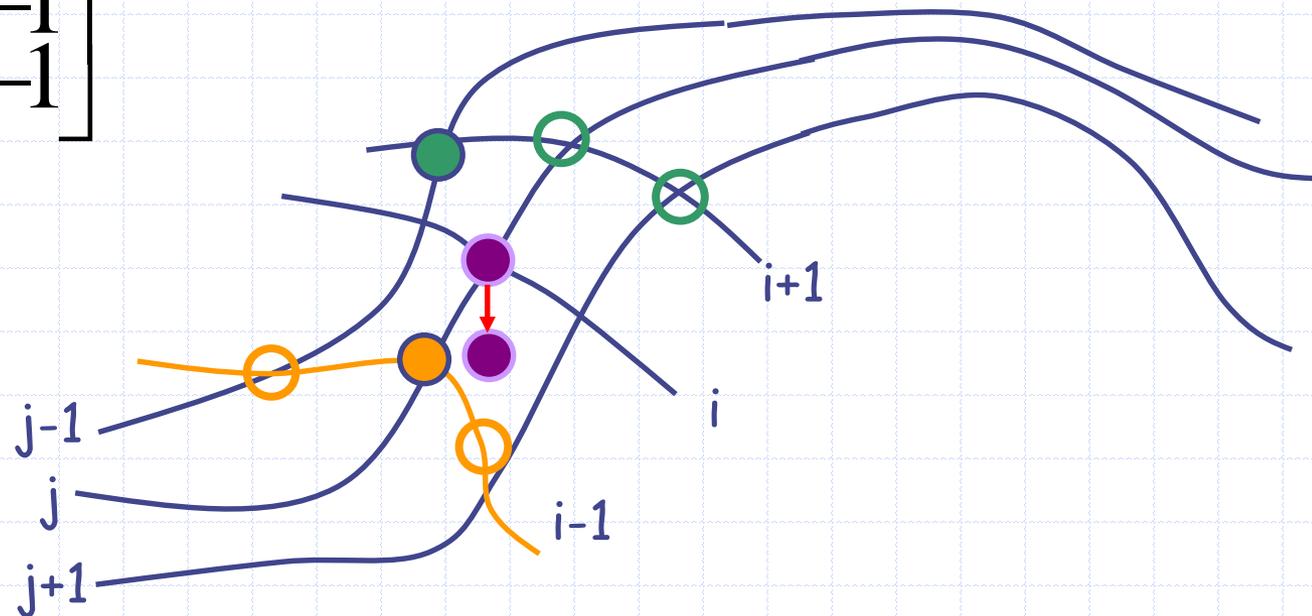
# LPE par immersion



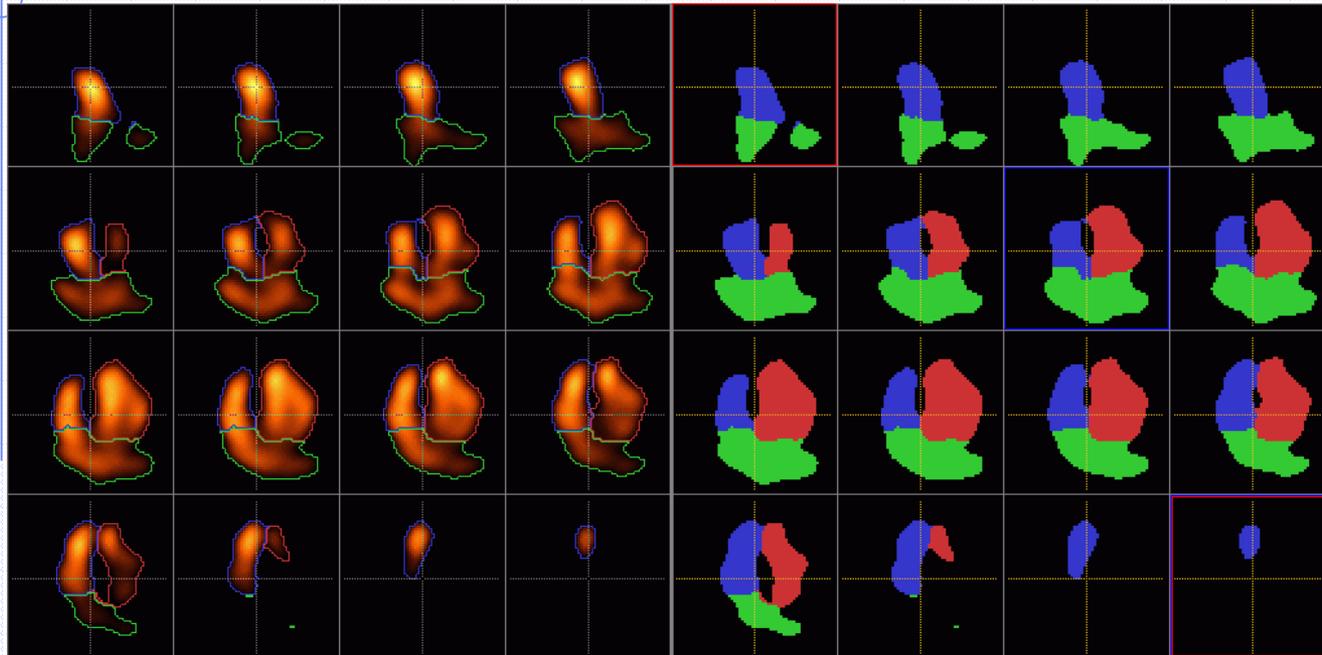
# LPE par amincissement homotopique

si  $f_{\max} < f(i, j) \leq f_{\min}$  alors  $f(i, j) = f_{\max}$

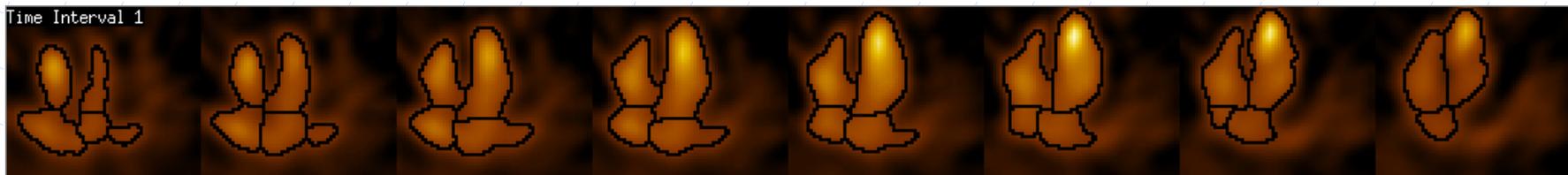
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



# Résultats



Amincissement homotopique 2D



Immersion 4D

# SEGMENTATION

- par seuillages :
  - Choix du seuil, Seuillage par hystérésis
- par croissance de régions
- à partir des dérivées du signal
  - par extrema de gradient
  - par passage par zéro du laplacien
- par gradient morphologique :  $\delta-I$ ,  $I-\varepsilon$ ,  $\delta-\varepsilon$  ...
- Par ligne de partage des eaux
  - immersion
  - amincissements homotopiques

## ④ RECALAGE D'IMAGES

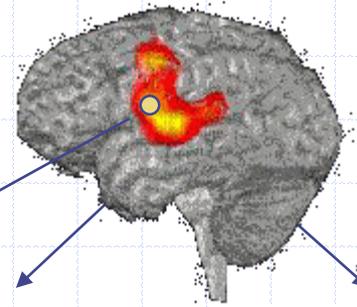
Problématique générale

Algorithmes

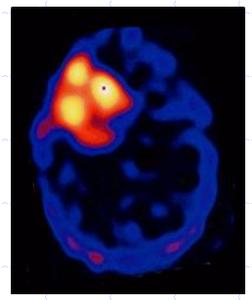
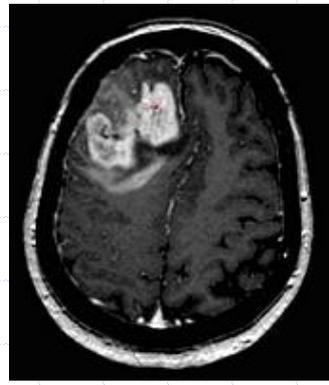
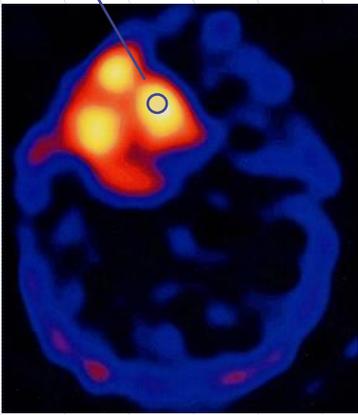
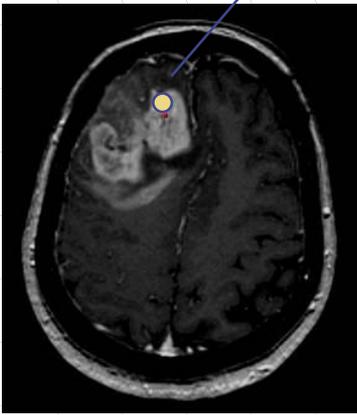
Applications

# Problème

modèle

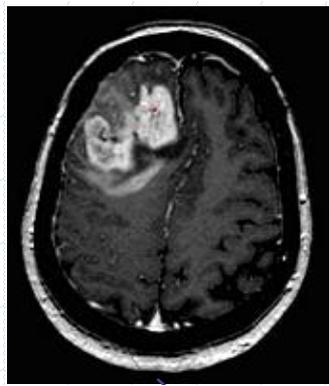


$P(x,y,z)$



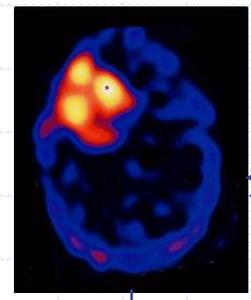
Distorsions  $\neq$   
Nature du contraste  $\neq$   
Résolution  $\neq$ , SLID ?  
Bruit  $\neq$ ,  $\pm$  dép. signal

# Méthode



R : référence

I : image à recaler



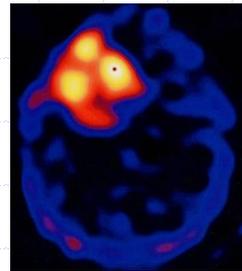
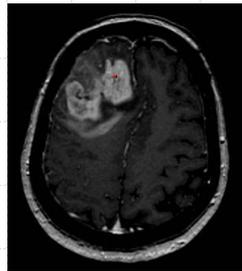
Paramètres de transformation initiaux

Transformation

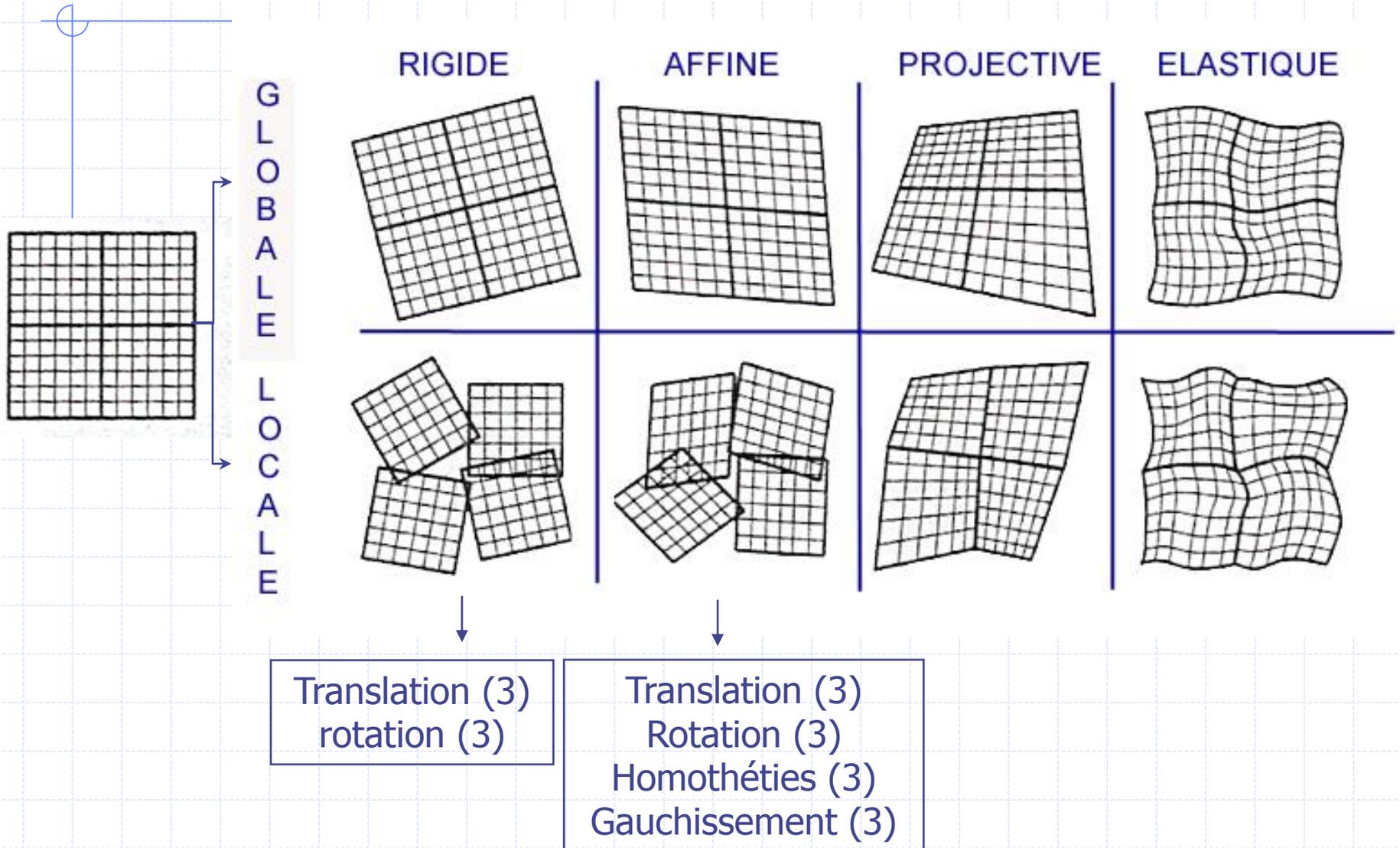
Mesure de similarité

Maximale ?  
oui non

Optimisation des paramètres de transformation



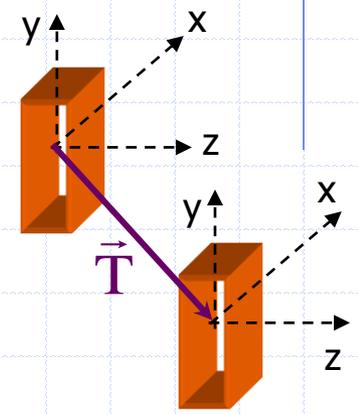
# Transformations T



# Transformations rigides

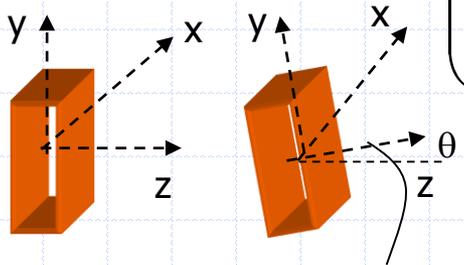
Translation

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + T_x \\ y_1 + T_y \\ z_1 + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Rotation

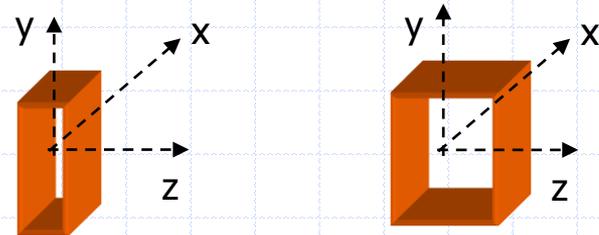
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos\theta_x \cdot y_1 + \sin\theta_x \cdot z_1 \\ -\sin\theta_x \cdot y_1 + \cos\theta_x \cdot z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



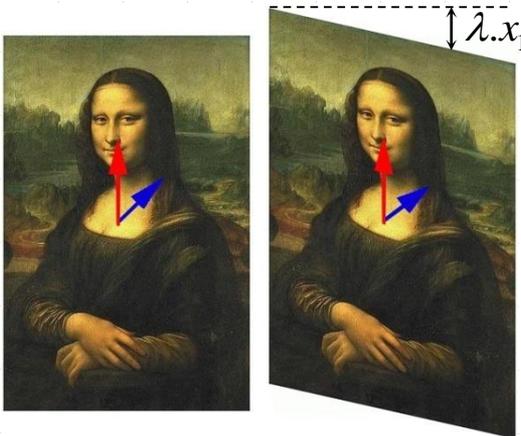
# Transformations affines

- Translation
- Rotation
- Homothétie

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x \cdot x_1 \\ H_y \cdot y_1 \\ H_z \cdot z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



## Gauchissement



$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + \lambda \cdot x_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Mesures de similarité $S$ , sur...

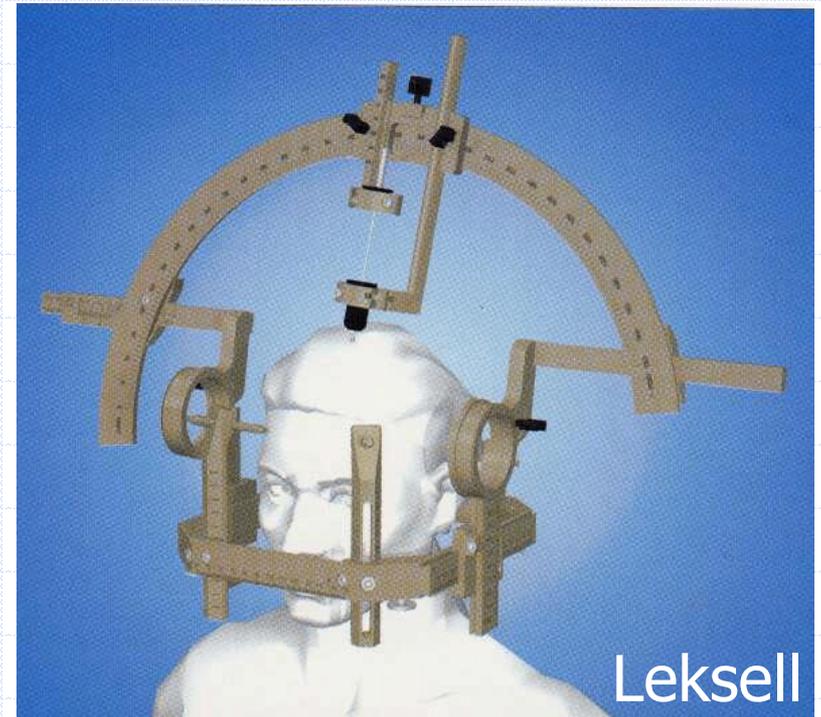
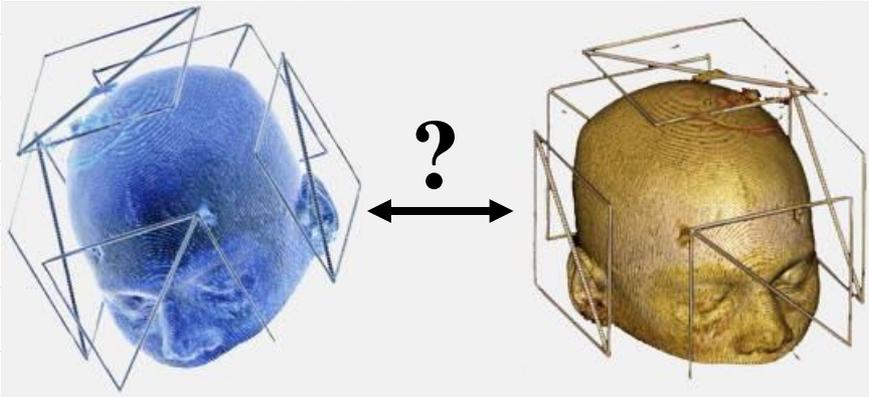
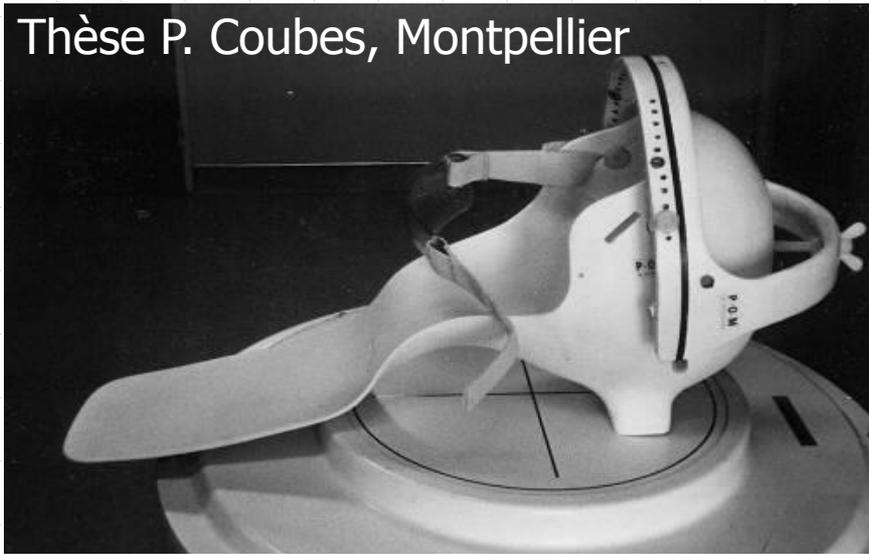
$$T = \arg \max_{T \in E} S[\{V^R\}; \{T(V^I)\}]$$

- des marqueurs :
  - artificiels externes ou frontières anatomiques
- les valeurs des voxels
  - différences, variances, corrélations,...
- Une information mutuelle...

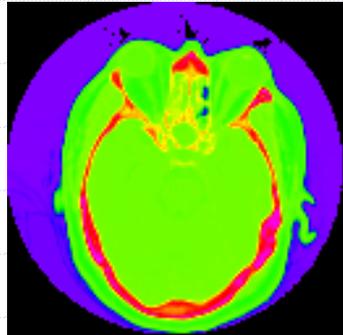
# Marqueurs

$$S[\{\mathbf{V}^R\}; \{\mathbf{T}(\mathbf{V}^I)\}] = -\sum_m \|\mathbf{V}_m^R - \mathbf{T}(\mathbf{V}_m^I)\|$$

Thèse P. Coubes, Montpellier



# Extraction des frontières



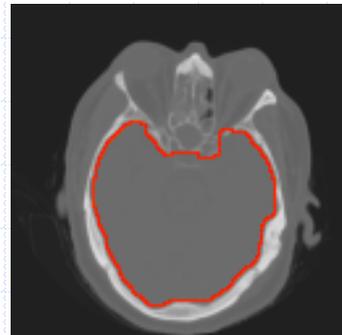
Seuillage



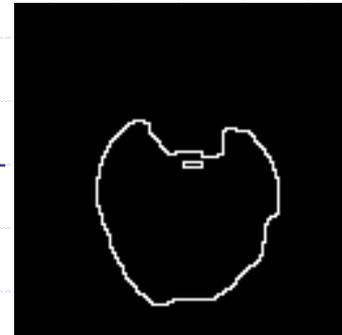
Érosion



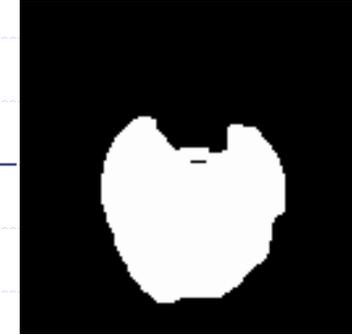
Isolement  
Du cerveau



Résultat

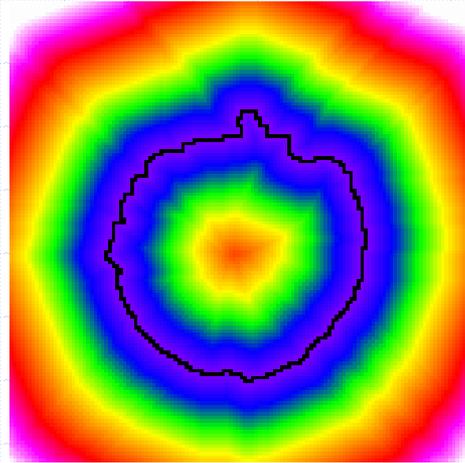
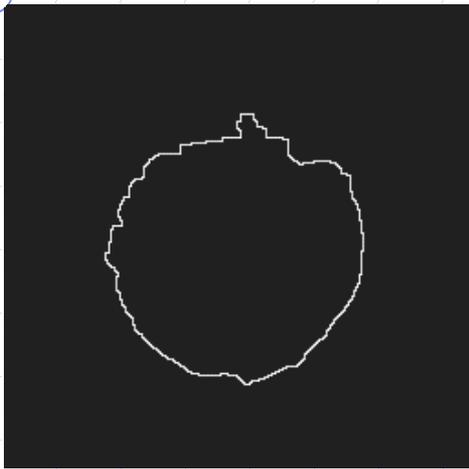


Gradient morpho

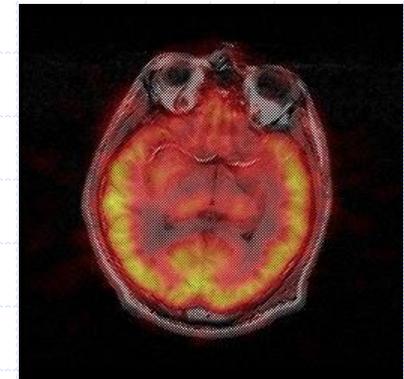
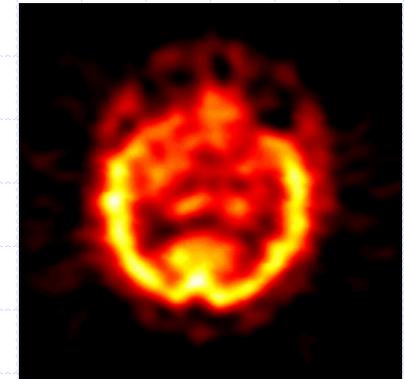
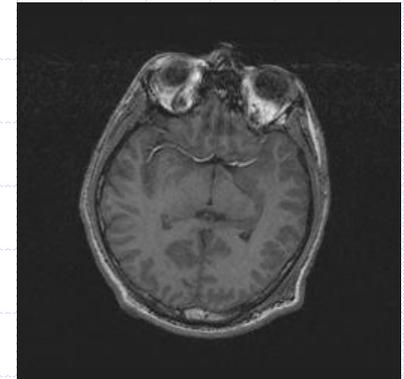
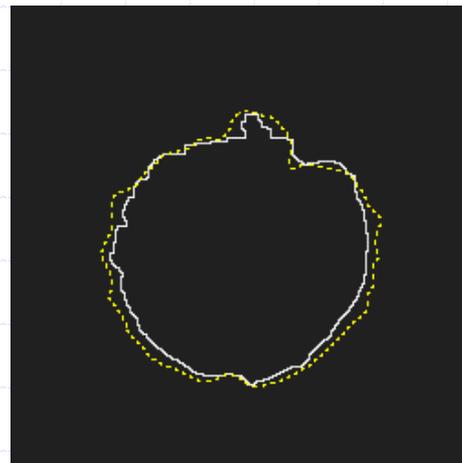
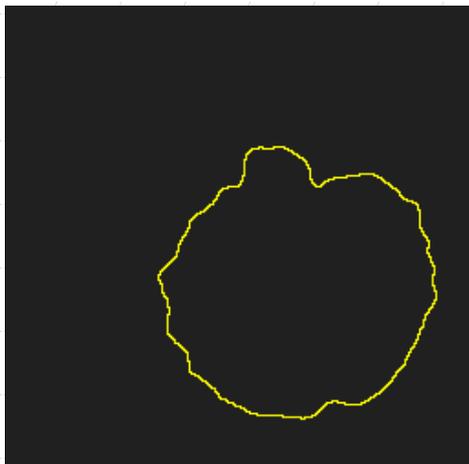


Dilatation

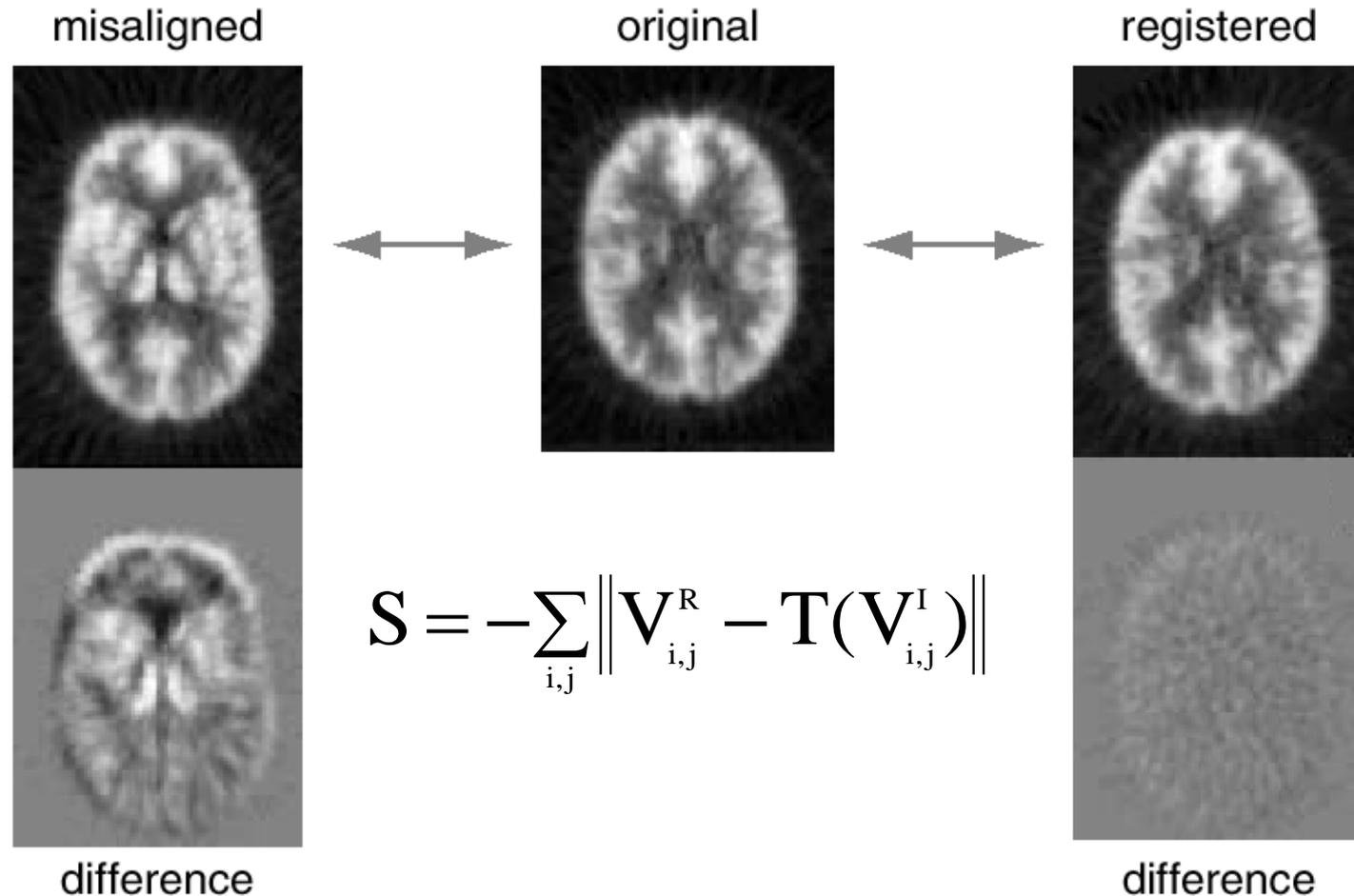
# Recalage des frontières



Chanfrein ↓



# Différence d'intensité



Alternative : différences de variances

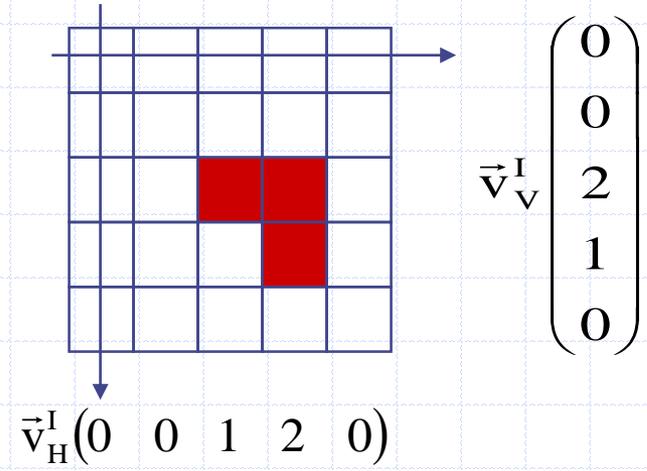
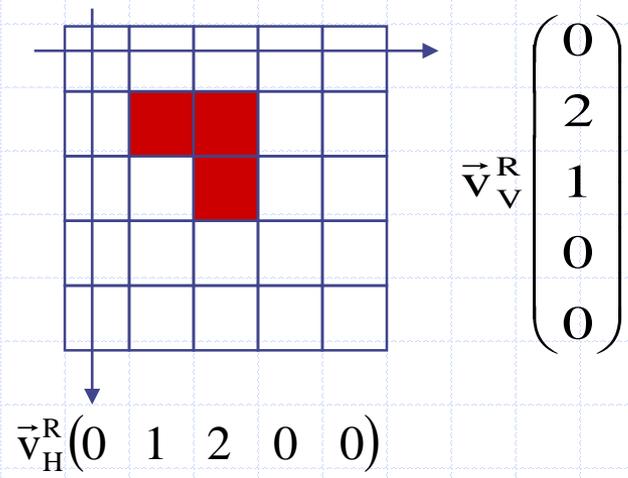
# Inter-corrélation maximale

$$r = \frac{\sum_j (V_j^R - \overline{V^R}) (T(V_j^I) - \overline{T(V^I)})}{\sqrt{\sum_j (V_j^R - \overline{V^R})^2 \cdot \sum_j (T(V_j^I) - \overline{T(V^I)})^2}}$$

$$r = \frac{\sum_j V_j^R \cdot T(V_j^I) - N \cdot \overline{V^R} \cdot \overline{T(V^I)}}{\sigma_{V^R} \cdot \sigma_{T(V^I)}}$$

$$S = \sum_j V_j^R \cdot T(V_j^I)$$

# Exemple : translation d'images



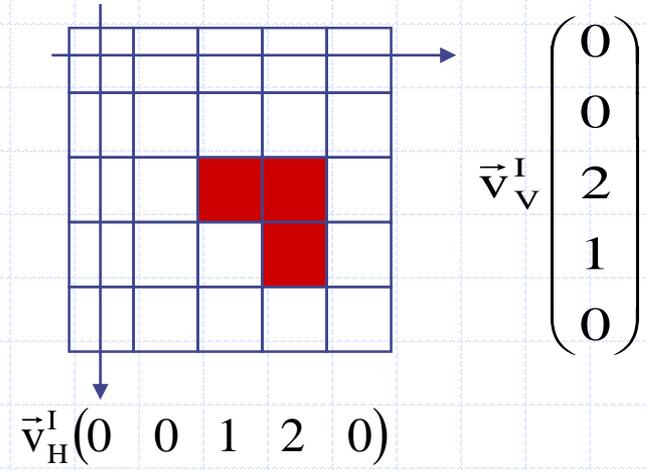
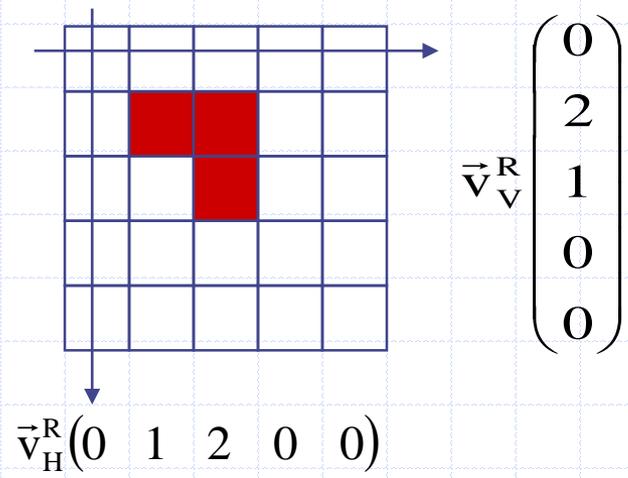
$$IC_H(k) = \sum_j v_H^R(j) \cdot v_H^I(j-k)$$

Décalage à droite de k

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

↘ 2

# Exemple : translation d'images



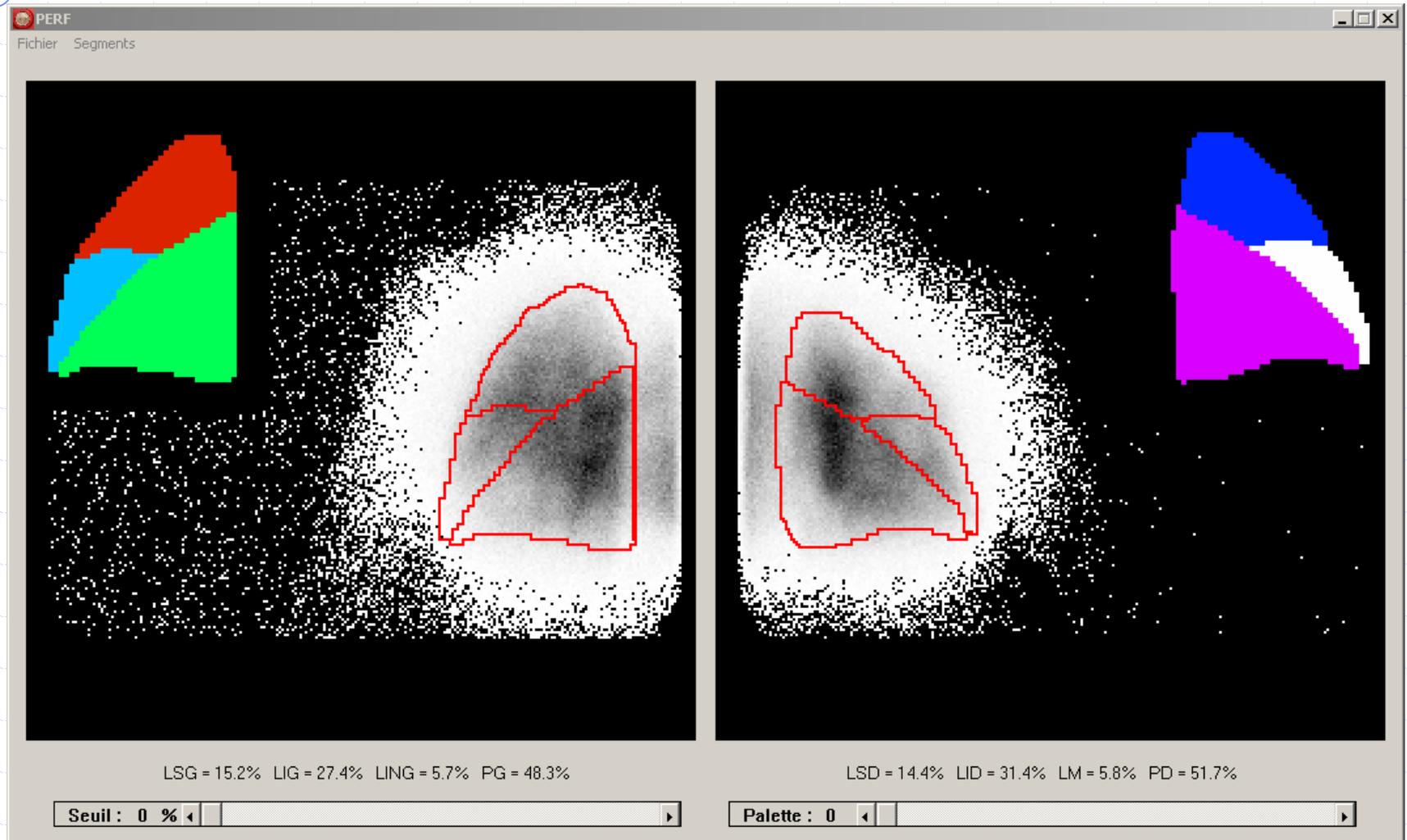
$$IC_H(k) = \sum_j v_H^R(j) \cdot v_H^I(j-k)$$

Décalage à droite de k

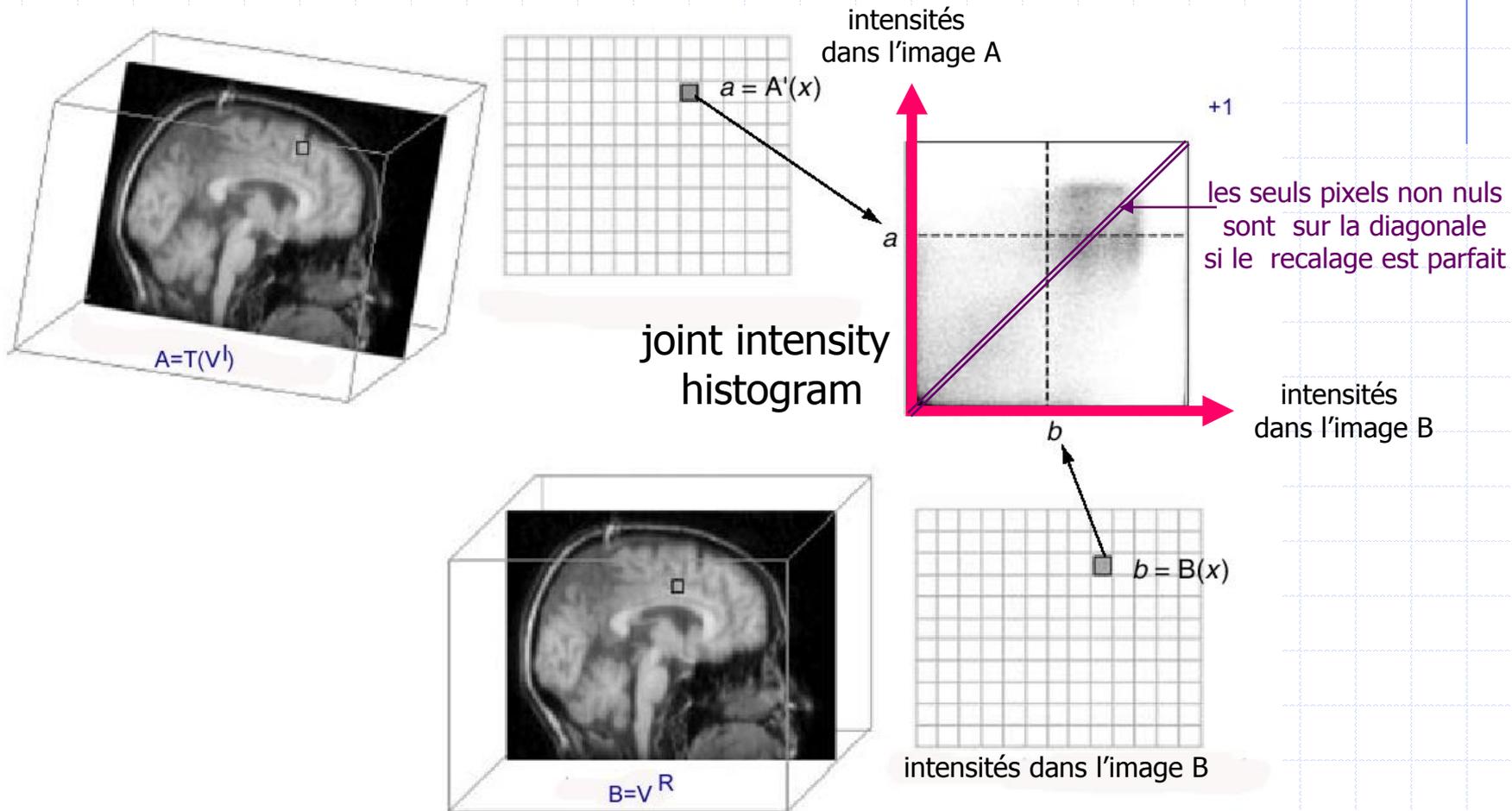
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow k = -1$$

↘ 5

# Intercorrélation maximale



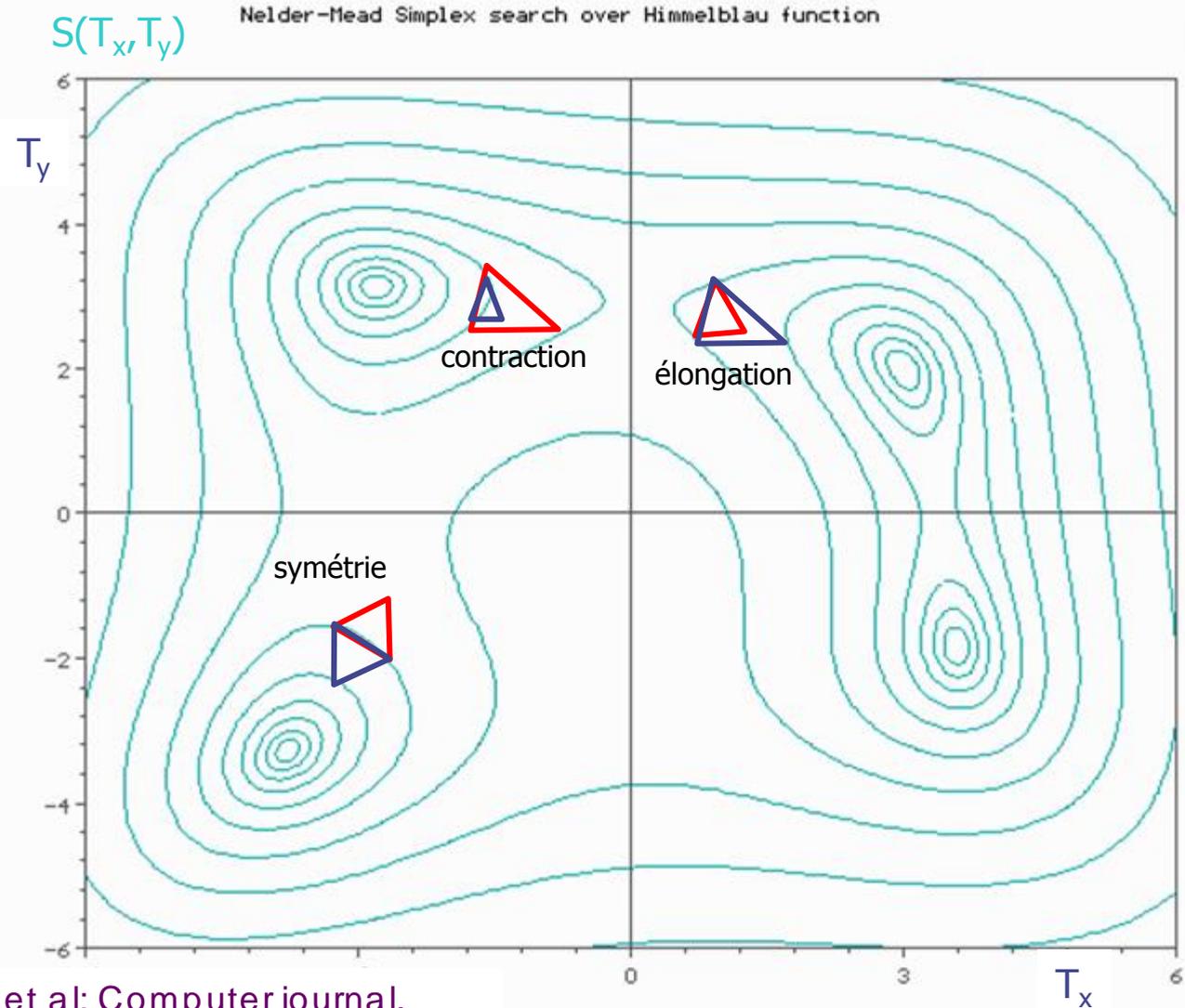
# Information mutuelle



# Optimisation

- Au moyen d'un programme capable d'optimiser la mesure de similarité en ajustant itérativement les paramètres géométriques du recalage
- Méthodes avec gradient
  - Gradient conjugué, Levenberg-Marquardt...
  - BFGS, KNITRO...
- Méthodes sans gradient
  - Powell: succession d'optimisations 1D
  - Simplex

# Optimisation: simplex

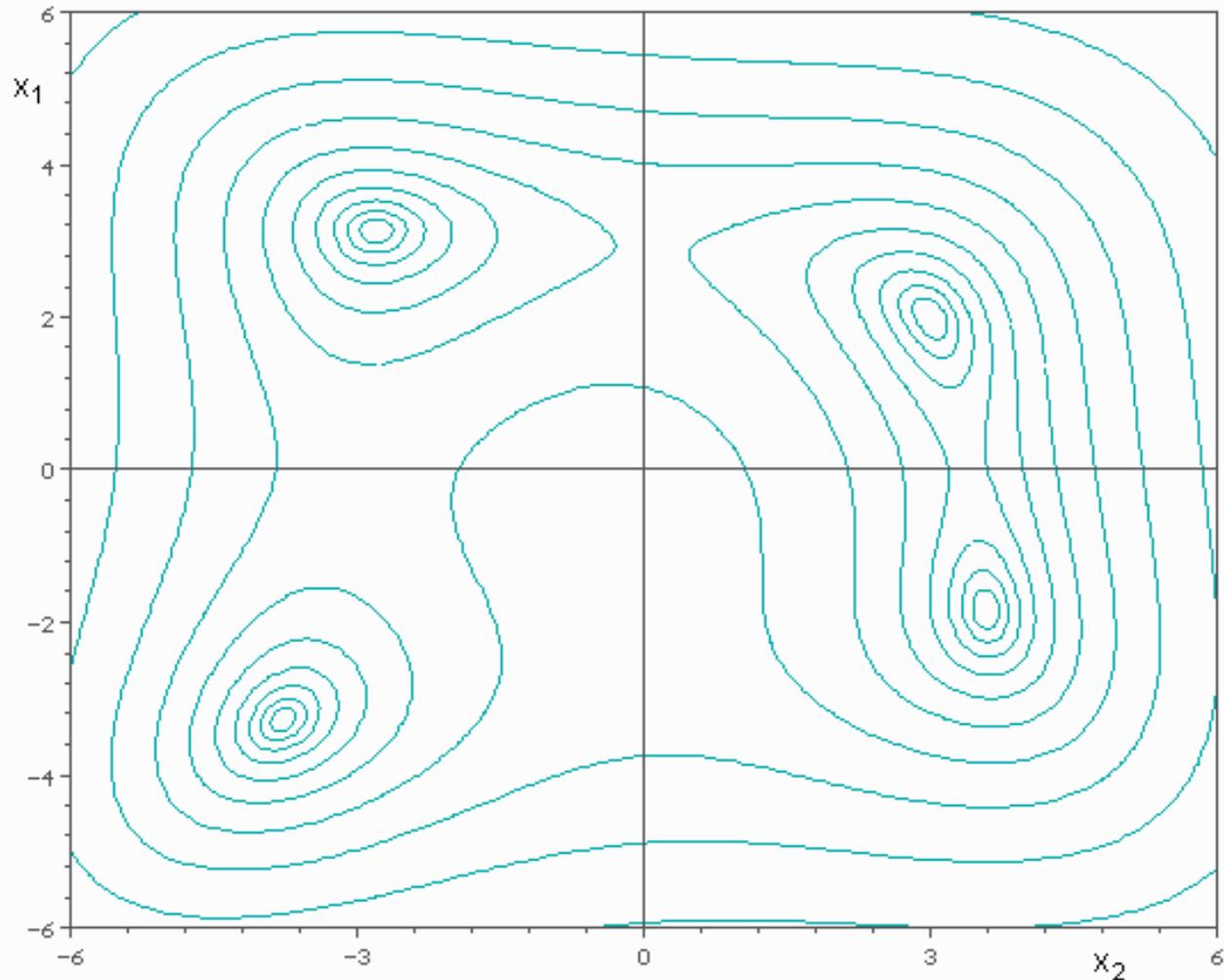


N paramètres à ajuster

Simplex = polygone à  $N+1$  côtés dont on déplace le sommet de valeur maximale pour aller stabiliser le simplex sur un minimum de la fonction à optimiser.

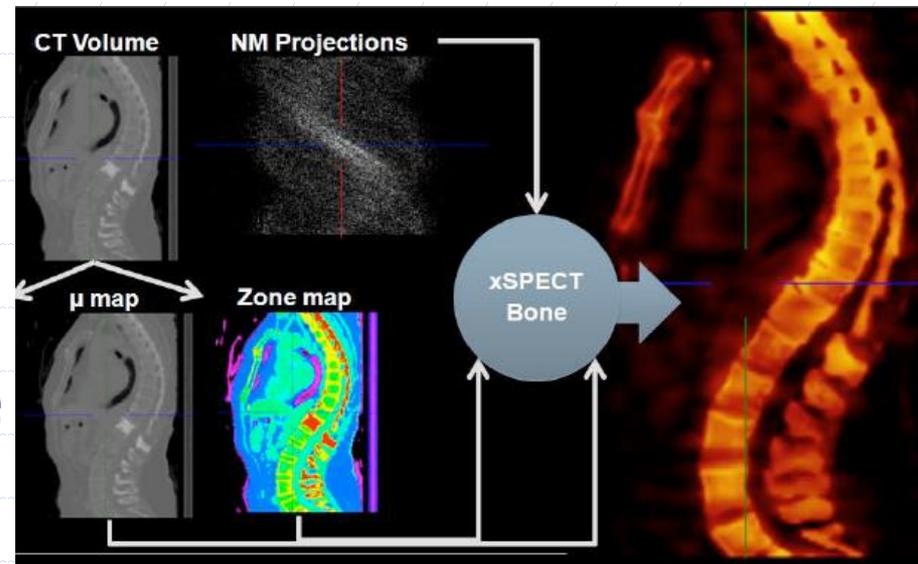
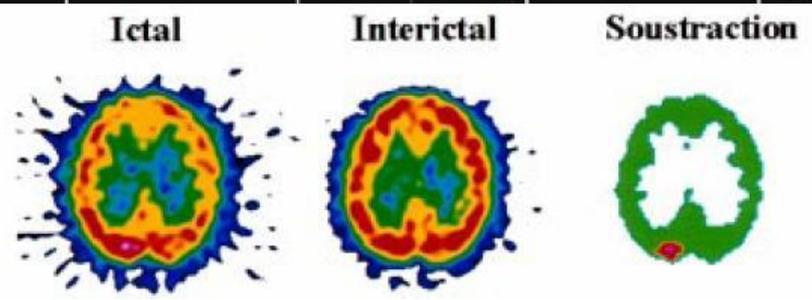
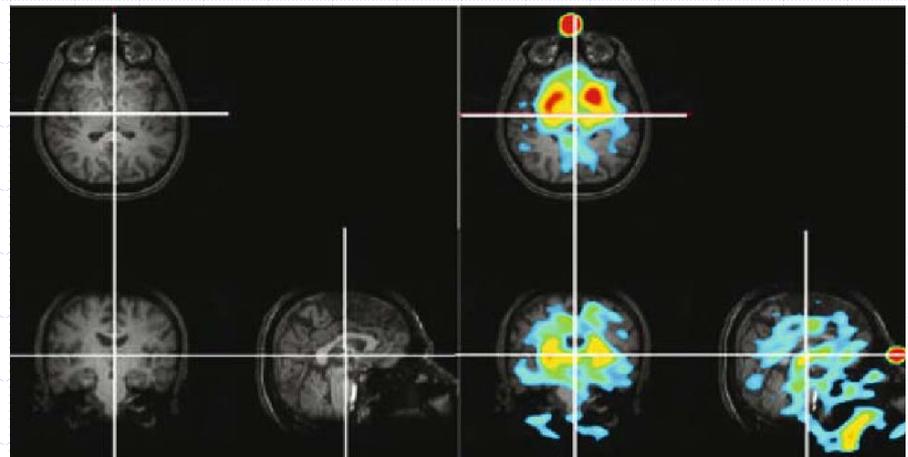
# Optimisation: simplex

Nelder-Mead Simplex search over Himmelblau function

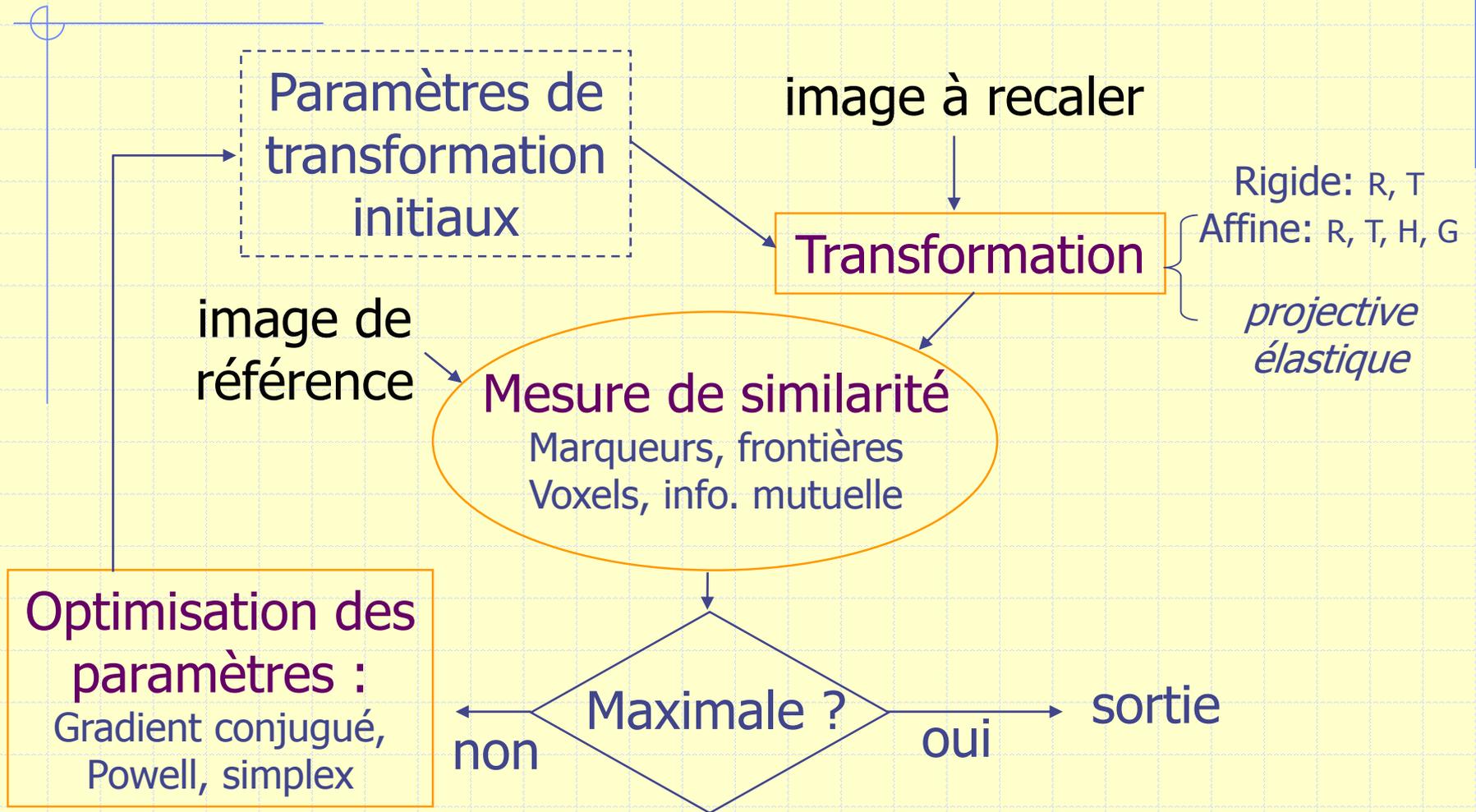


# Applications

- Morpho-fonctionnel
  - diagnostic (traceurs spé)
  - thérapeutique
- Atlas anatomique
- Comparaison de traceurs
  - neuro, cardio, pneumologie
  - parathyroïdes
- Suivi d'un patient
- SPM
- Correction d'artefacts
  - vol. partiel, atténuation
  - mouvement...
- Reconstruction multimodale
  - xSPECT-Bone®



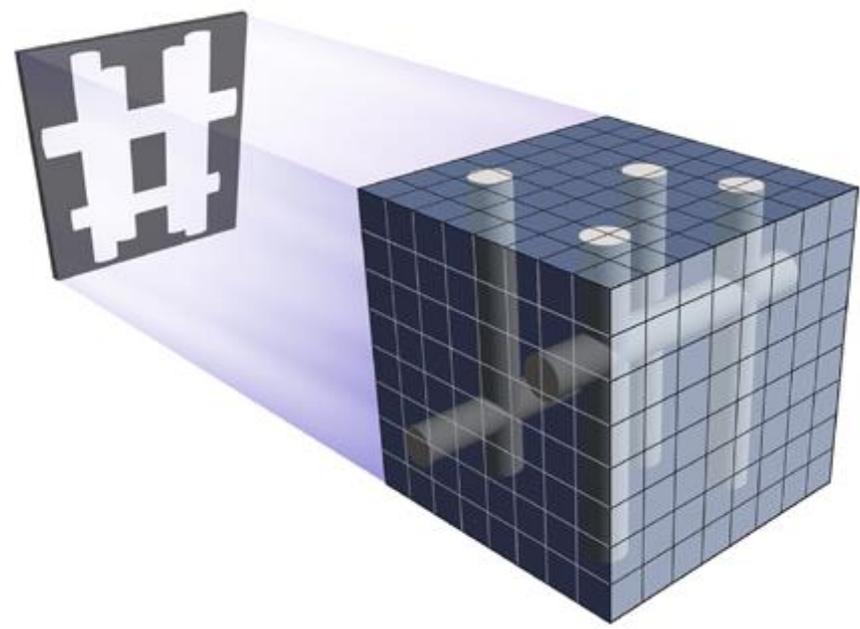
# RECALAGE



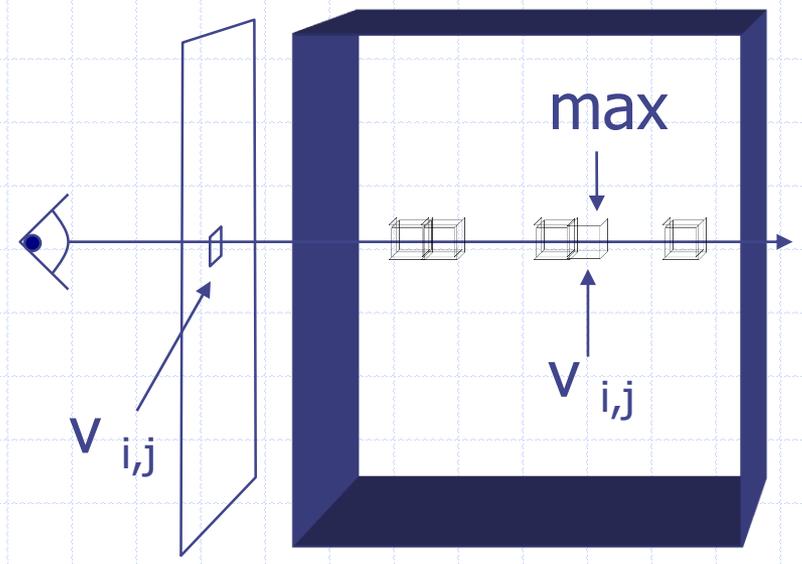
## ⑤ RENDU DE VOLUME & DE SURFACE 3D

**MIP et rendu de volume**  
**Rendu de surface**

# MIP : Maximum Intensity Projection

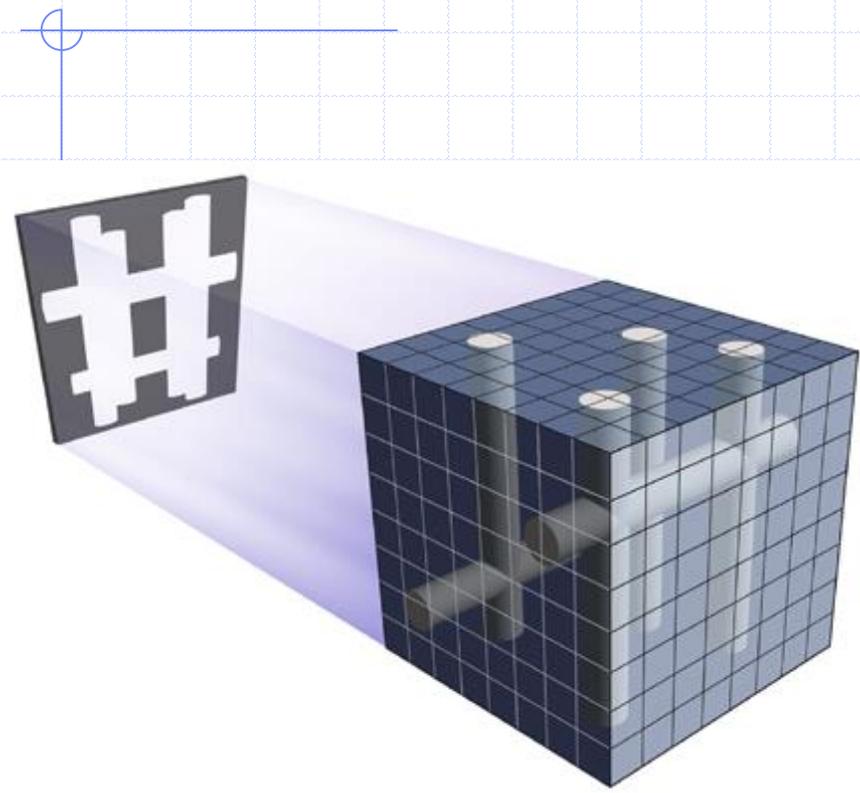


MIP



Perte de l'information non maximale suivant une direction de projection

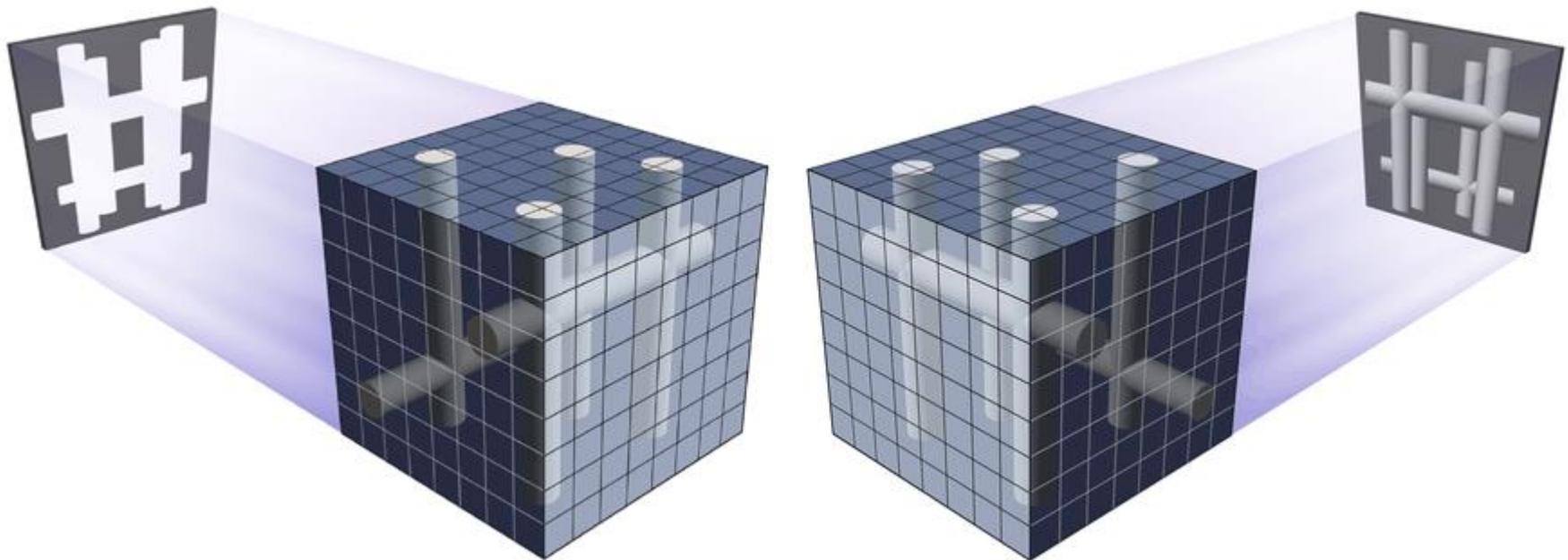
# MIP



MIP



# MIP et rendu de volume

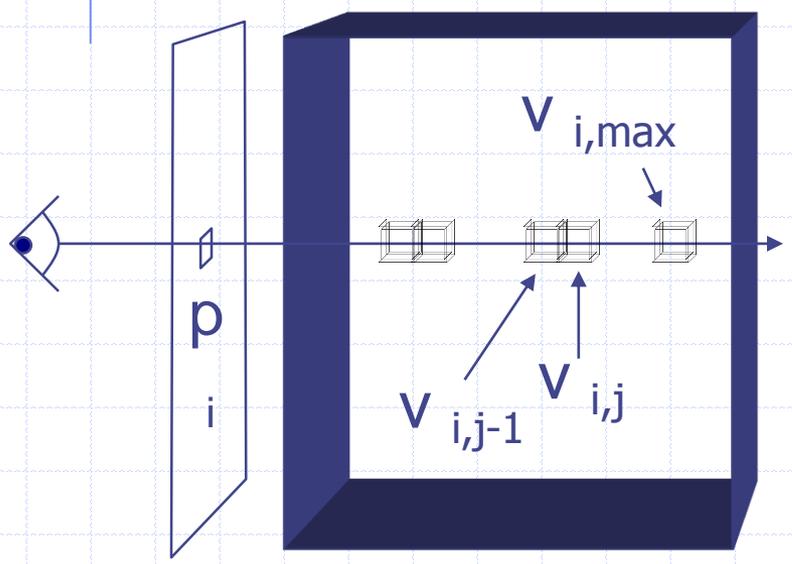


MIP

RENDU DE VOLUME :  
Transparence, brillance...

# Rendu volumique: généralisation

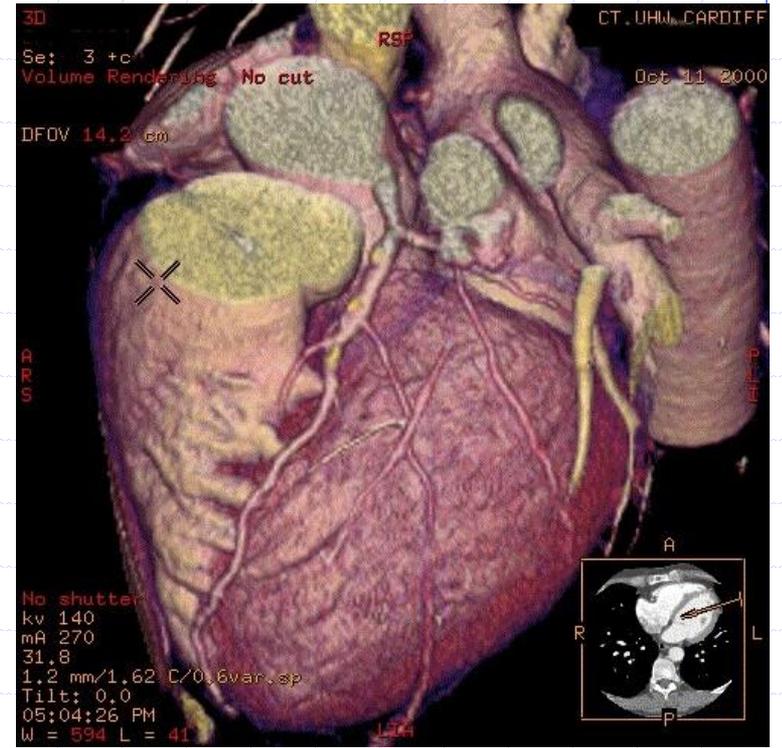
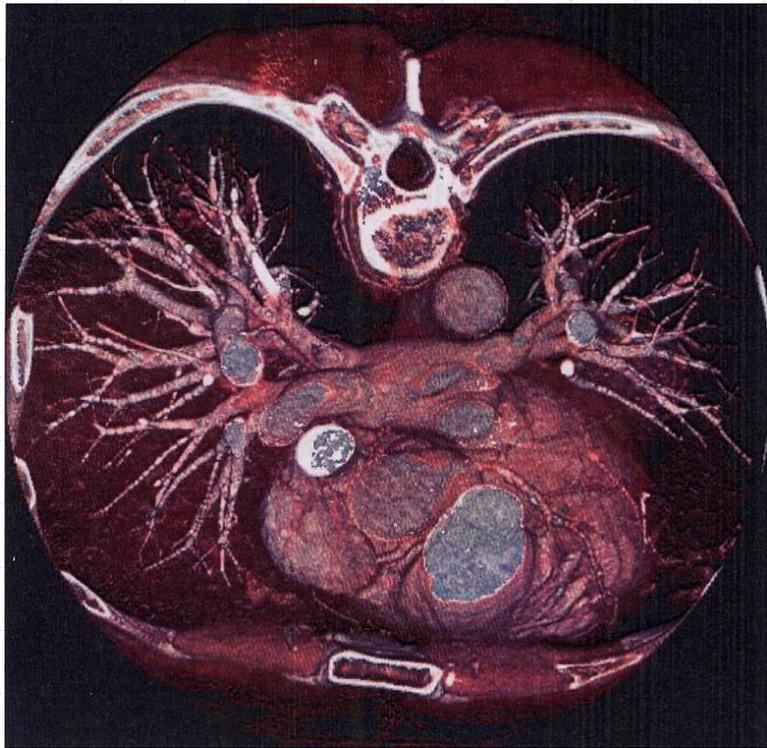
$$C(p_i) = \max_{j=1} \sum c(v_{i,j}) \text{Contrib}(v_{i,j})$$



$$\text{Contrib}(v_{i,j}) = \alpha(v_{i,j}) P(L; v_{i,j}) \prod_{k=0}^{j-1} [1 - \alpha(v_{i,k})]$$

Transparence :  $\alpha(v_{i,j}) \in [0,1]$

Brillance :  $P(L; v_{i,j})$



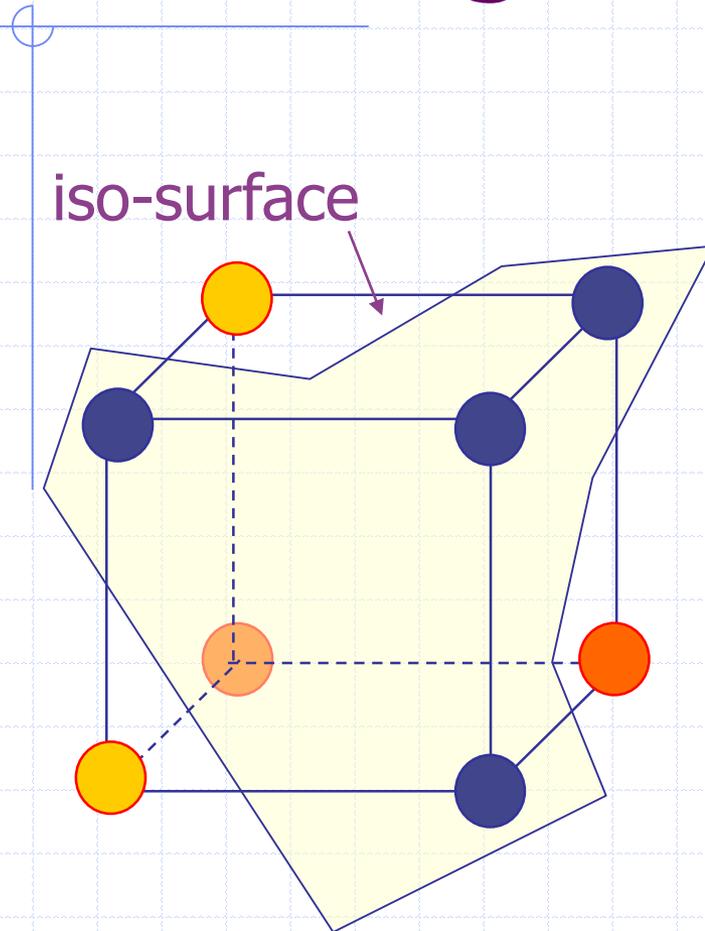
# Techniques de rendu de surface

Il s'agit de projeter sur un plan une surface opaque d'un espace 3D: cerveau, os, poumon, vasculaire...

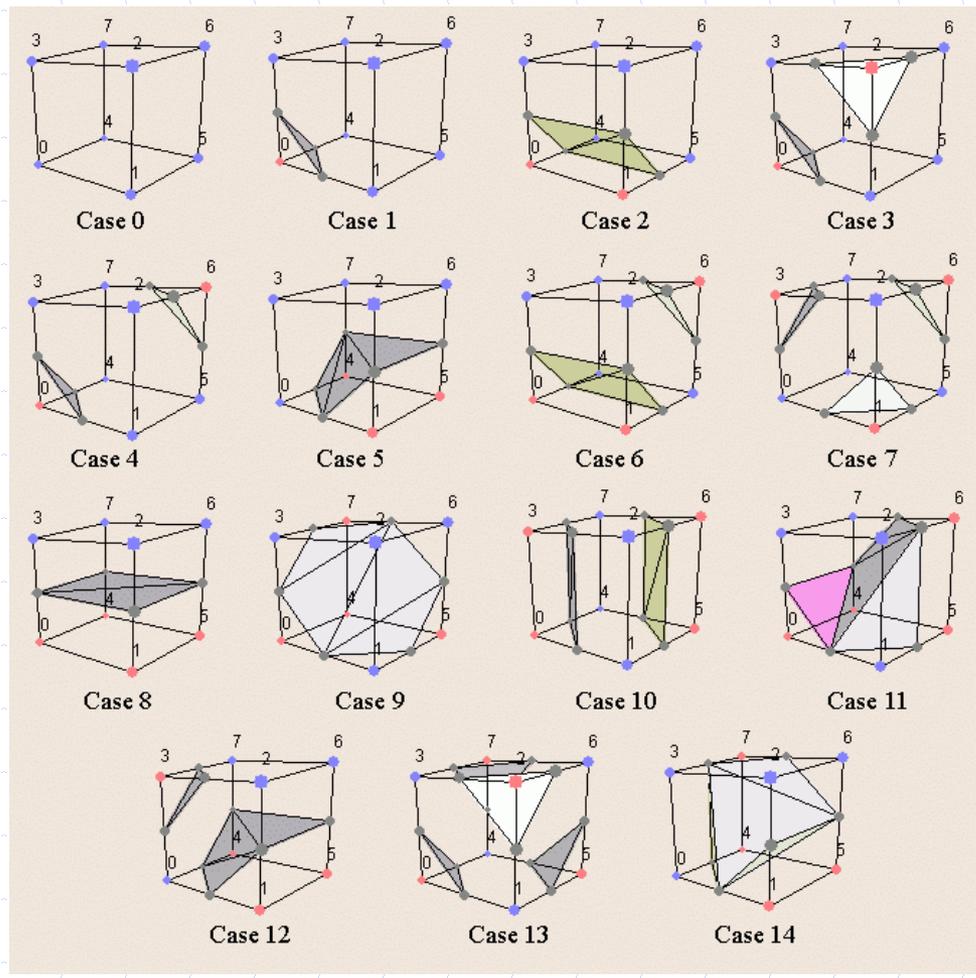
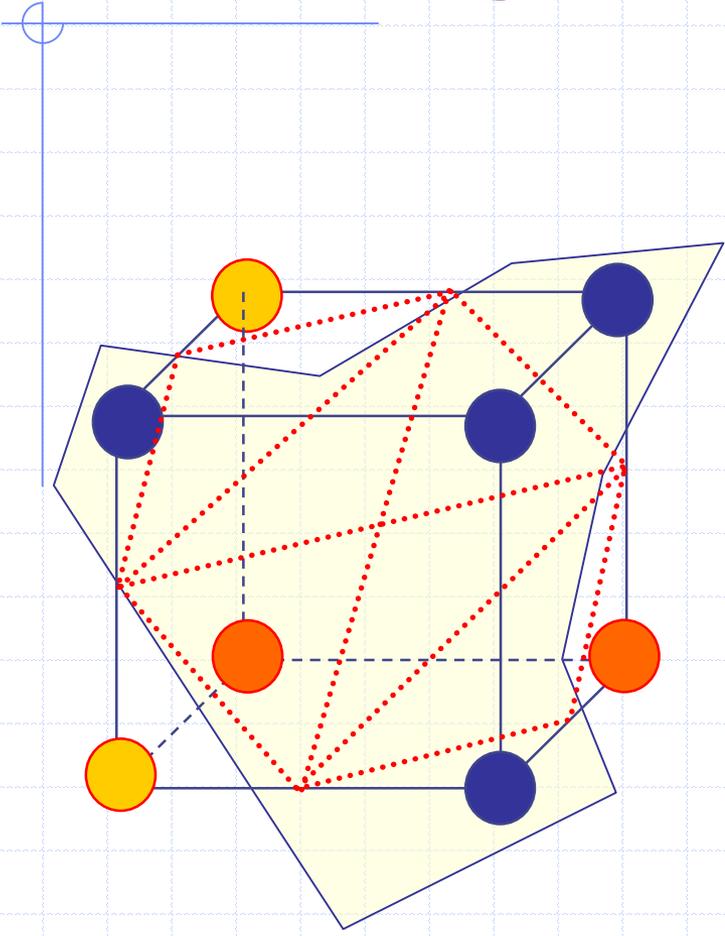


- extraction d'isosurfaces (marching cubes )
- lancé de rayons (ray casting)
- volume splatting
- shear wrap
- Texture mapping (GPU) ...

# Marching cubes

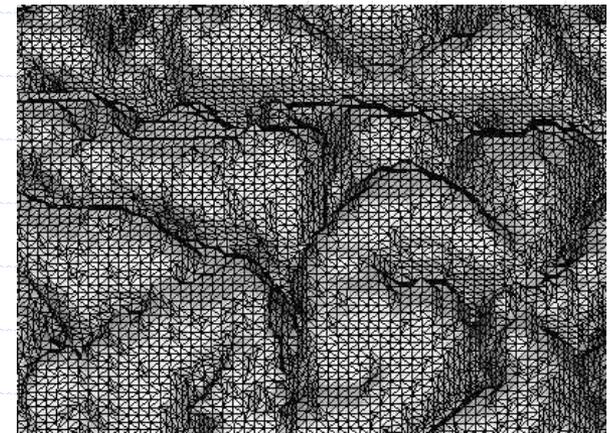
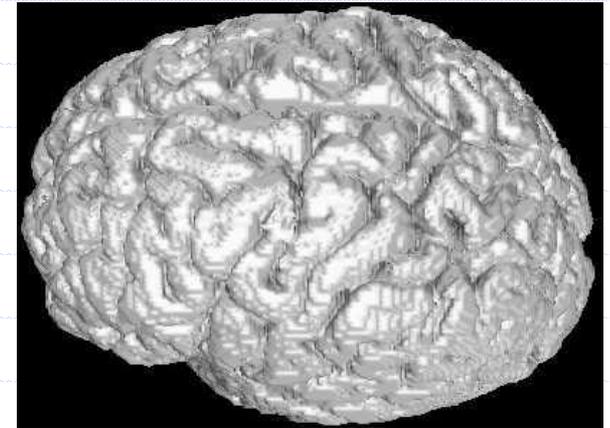
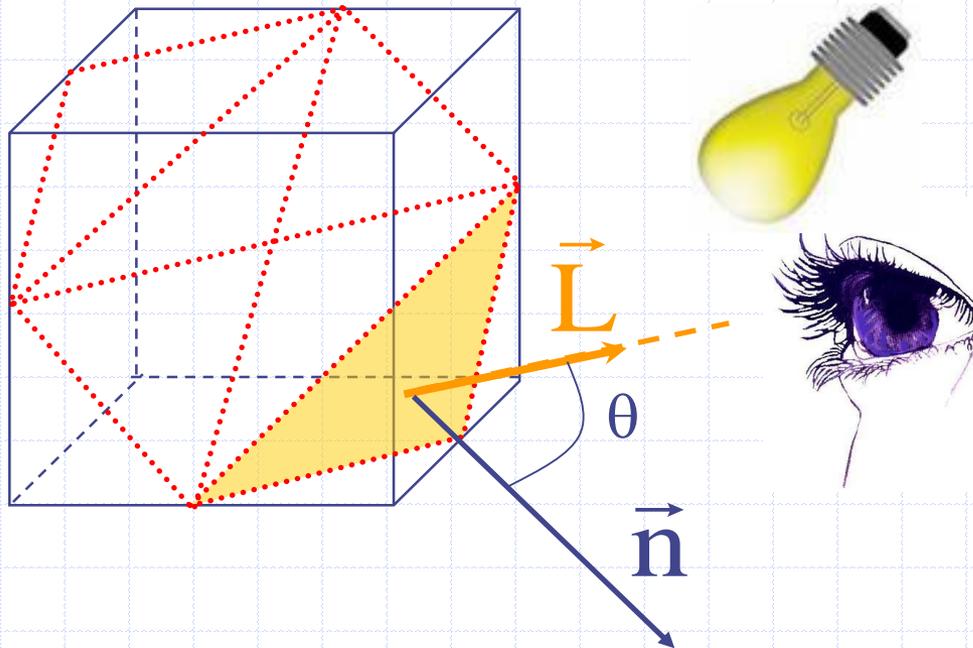


# Marching cubes



# Marching cubes

Intensité de coloration proportionnelle à  $\vec{n} \cdot \vec{L} \propto \cos \theta$



# VISUALISATION 3D

- Algorithme de construction d'une image MIP
  - Masque d'éventuelles hyperfixations
  - Utile pour une vue d'ensemble à condition de générer des projections sur 360°.
- Notions de MIP, rendu de volume et rendu de surface
- MIP utile surtout dans l'analyse de la surface de certains organes :
  - cerveau, poumon, reins, squelette

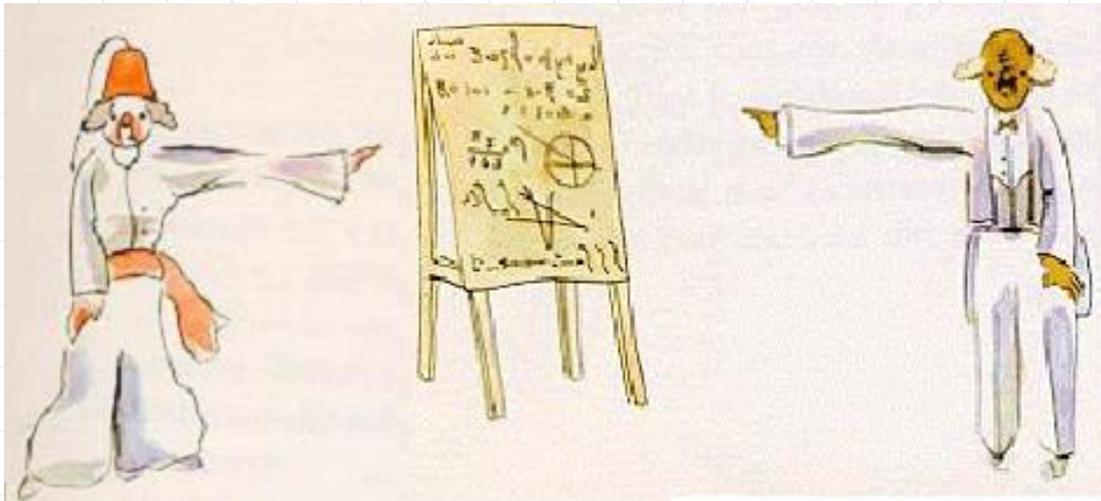
# 10 NOTIONS A MAITRISER :



1. **LMH** =  $D_{\min} = 1/f_{\max} = \text{Pouvoir Séparateur} \propto \text{distance}$
2. **Shannon** : Dimension du pixel =  $LMH/2$
3. **EVP**:  $CR < 100\%$  si dimension de l'objet  $< 2.LMH$
4. **Convolution**  $\equiv$  Passe-bas :
  - Moyenne pondérée dans un voisinage
  - x des fréquences par les valeurs d'une Gaussienne
5. **Déconvolution** de Metz ou dans l'opérateur de Radon
6. Radioactivité  $\equiv$  **Poisson**  $\Rightarrow S/B = \sqrt{C}$
7. **Filtres** linéaires et non linéaires
8. **Recalage** affine :  $T, R, H, G \rightarrow \text{Similarité} \rightarrow \text{Optimisation}$
9. **Segmentation**: Seuils adaptatifs, Gradient, Laplacien, LPE
10. **Visualisation**: MIP, rendus de volume et de surface

# QUELQUES REFERENCES

- Bases physiques de l'imagerie médicale.  
A. Desgrez & I. Idy-Peretti. 1992, Masson
- Précis d'analyse d'images.  
M. Coster & JL. Chermant, 1989, Presses du CNRS.
- Morphologie mathématique  
M. Schmidt & J. Mattioli. 1994, Masson.  
I. Bloch lien <http://perso.telecom-paristech.fr/~bloch/ANIM/morpho.pdf>
- Introduction au traitement numérique des images. D. Mariano-Goulart.
- Reconstruction tomographique en imagerie médicale. D. Mariano-Goulart.  
2015, Encyclopédie médico-chirurgicale  
Radiologie et imagerie médicale - principes et technique - radioprotection



Merci pour votre attention...

<http://scinti.edu.umontpellier.fr>  
[d-mariano\\_goulart@chu-](mailto:d-mariano_goulart@chu-)