# TRAITEMENT DES IMAGES SCINTIGRAPHIQUES

Denis MARIANO-GOULART
Département de médecine nucléaire
CHRU de Montpellier
http:\\scinti.edu.umontpellier.fr

Le symbole ☝ marque des points particulièrement importants à comprendre et connaître
Le symbole ✋ concerne un exercice ou une réflexion à mener ensemble
Le symbole 🌶 marque des points délicats qui ne sont pas exigibles à l'examen
Le symbole Ⓜ désigne une diapositive masquée lors du cours, donnée en complément.

# PLAN DU COURS

## ① Réponse d'une $\gamma$-caméra (3h30)

- réponse impulsionnelle
- échantillonnage
- formation d'une image
- effet de volume partiel
- déconvolution

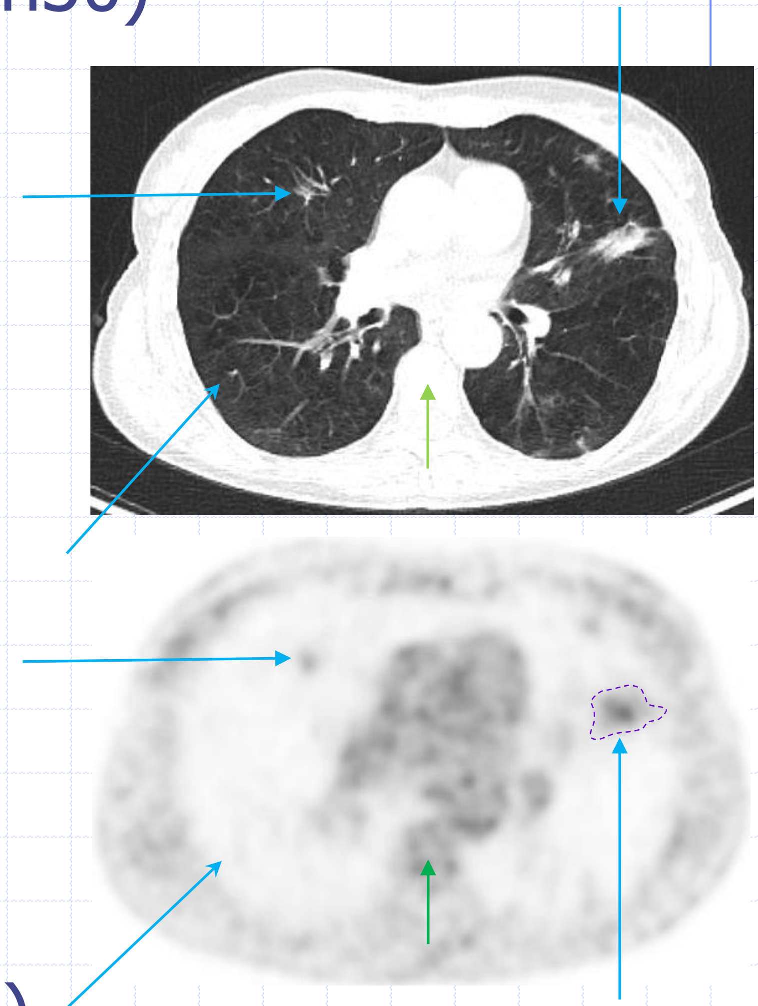
## ② Bruit et filtrages (2h30)

- bruit stochastique
- filtrages d'images

## ③ Segmentation (1h)

## ④ Recalage d'images (1h)

## ⑤ Visualisation volumique (1h)

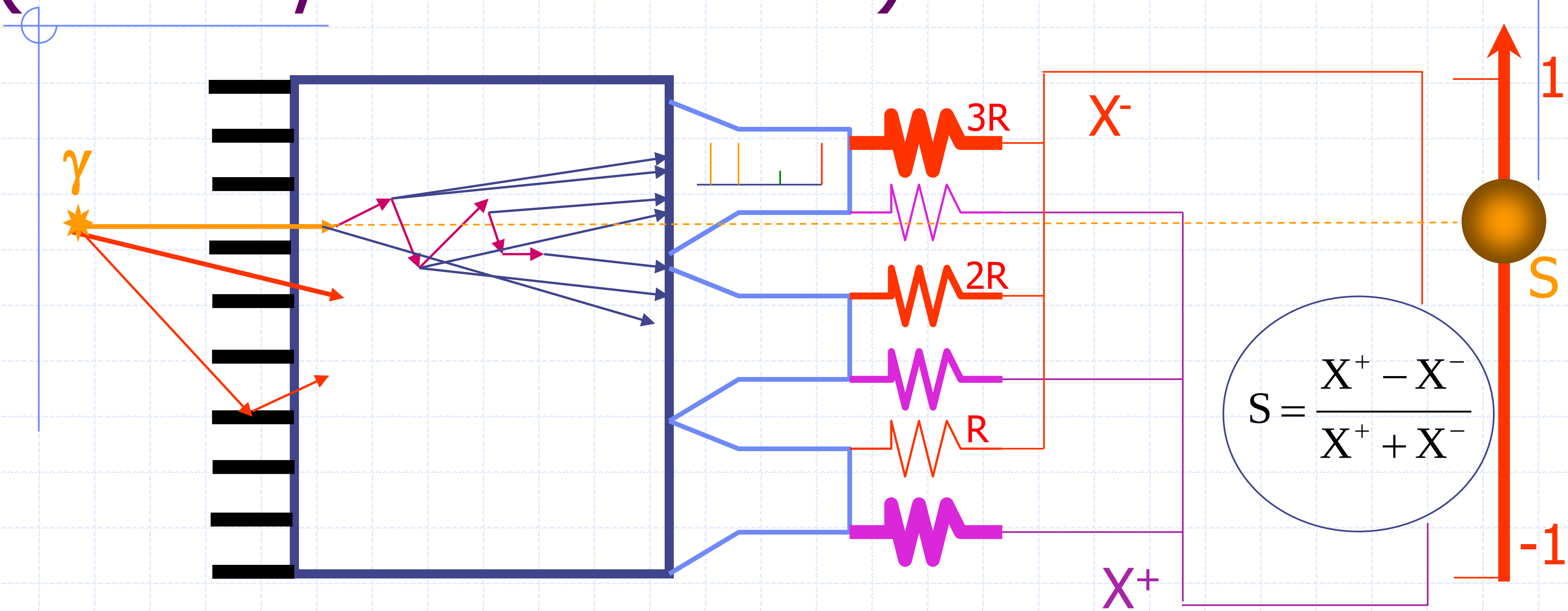


# ① REPONSE D'UNE GAMMA-CAMERA

Réponse impulsionnelle d'un appareil d'imagerie.
Echantillonnage d'une image scintigraphique.
Processus de formation d'une image
Effet de volume partiel
Déconvolution

Nb: les artefacts d'atténuation, traités dans un cours spécifique ne sont pas repris ici.

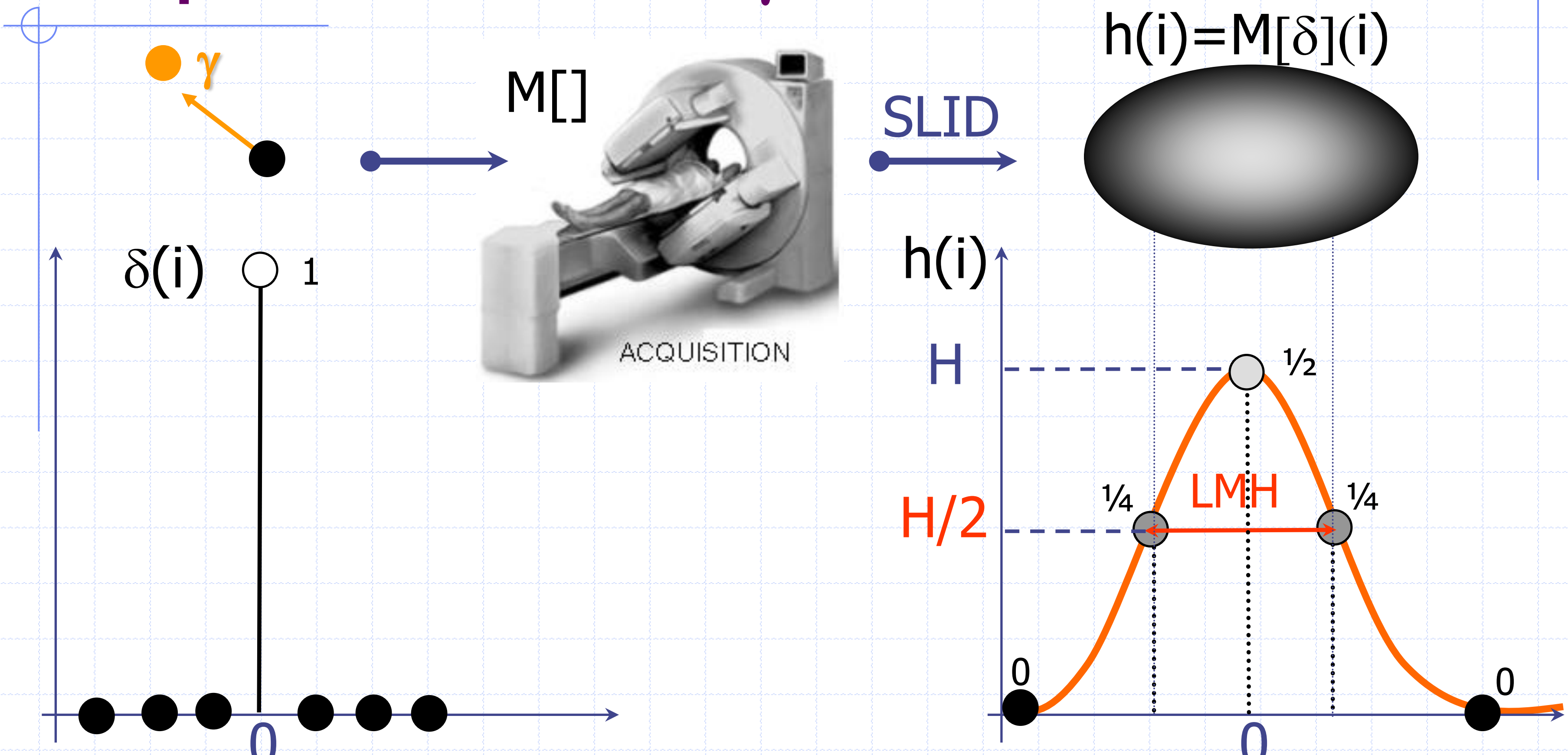
# Réponse impulsionnelle d’une γ-caméra (*Point Spread Function*)




| Collimateur | Scintillateur | PM | Localisation |
|---|---|---|---|
| Réponse géométrique, Pénétration et diffusion septales | Diffusion Compton dans le cristal | Incertitudes de localisation | |

réponse intrinsèque

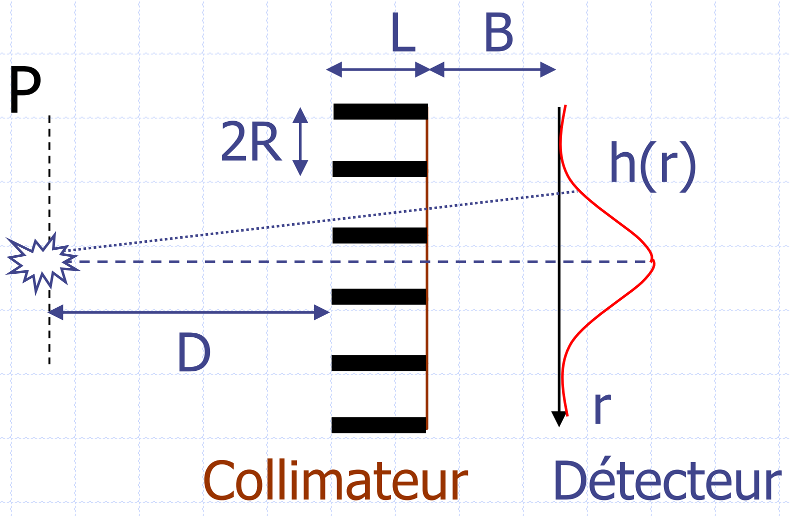
# Réponse d'une $\gamma$-caméra




goutte radioactive au centre du champ = impulsion de Dirac

- Réponse intrinsèque
  - LMH ≈ 4 mm, ± invariante
- Réponse du collimateur
  - variable

# Réponse d'un collimateur



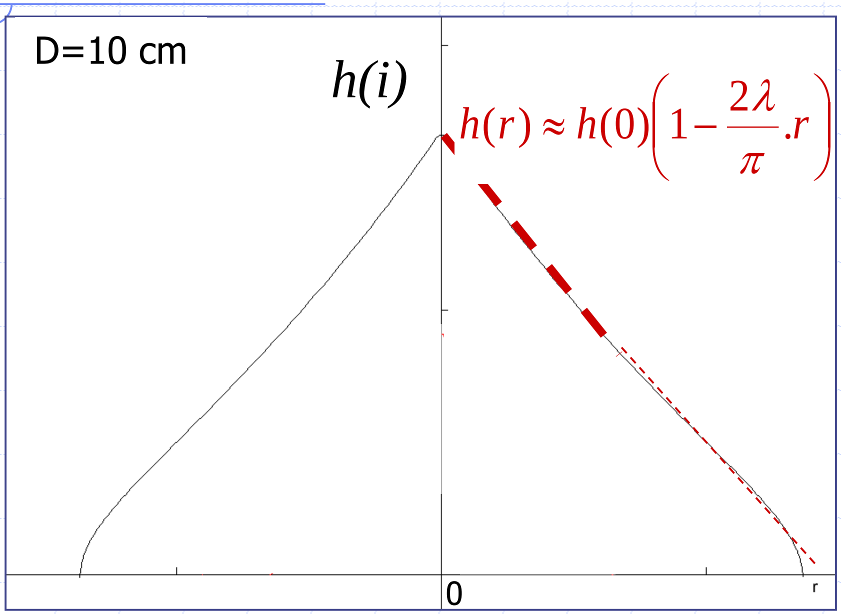

Réponse moyenne dans le plan P (septa cylindriques) :

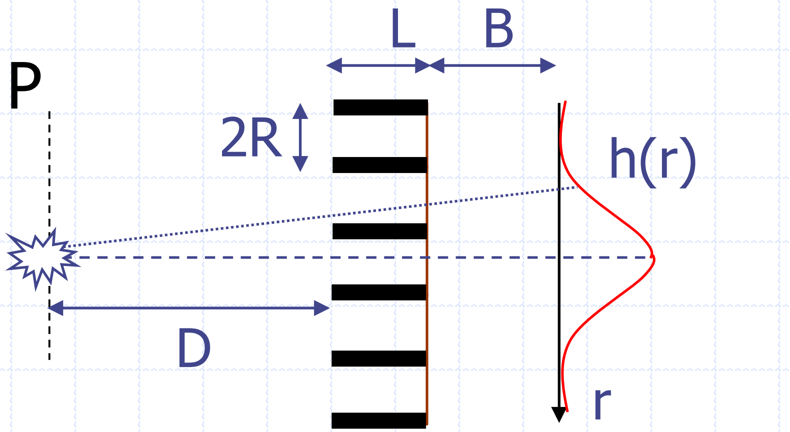
$$h(r) = \frac{h(0)}{\pi}\left[2.\arccos\left(\frac{\lambda.r}{2}\right) - \lambda.r.\sqrt{1-\left(\frac{\lambda.r}{2}\right)^2}\right] \qquad \lambda = \frac{L}{R.(L+D+B)}$$

$h(0)$ = efficacité du collimateur

CE Metz. Phys Med Biol 1990; 35:81-93 – Traité de Médecine nucléaire.1. G. Meyniel et al. Flammarion 1975.

# Réponse d'un collimateur



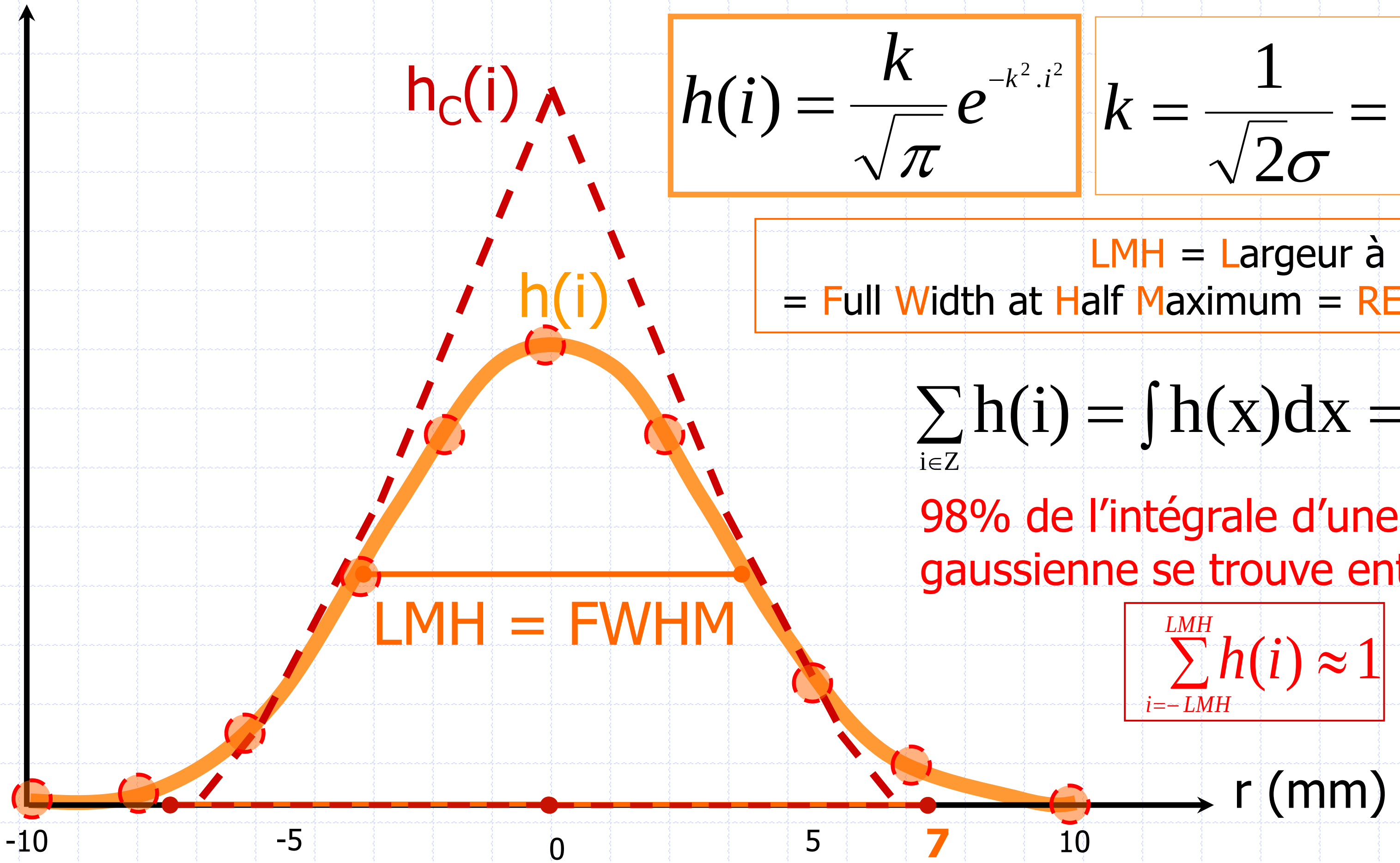




$$h(r) = \frac{h(0)}{\pi}\left[2.\arccos\left(\frac{\lambda.r}{2}\right) - \lambda.r.\sqrt{1-\left(\frac{\lambda.r}{2}\right)^2}\right] \qquad \lambda = \frac{L}{R.(L+D+B)}$$

LEHR : L = 4,1 cm ; B = 0,64 cm ; R = 0,19 cm ; $\varepsilon$ = 0,065

Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging, Springer US. 2006; CE Metz. Phys Med Biol 1990; 35.

# Réponse impulsionnelle d'une $\gamma$-caméra ≈ gaussienne (pour D fixée)




$$h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 . i^2}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

LMH = Largeur à Mi-Hauteur = Full Width at Half Maximum = RESOLUTION

$$\sum_{i \in Z} \mathrm{h(i)} = \int \mathrm{h(x)dx} = 1$$

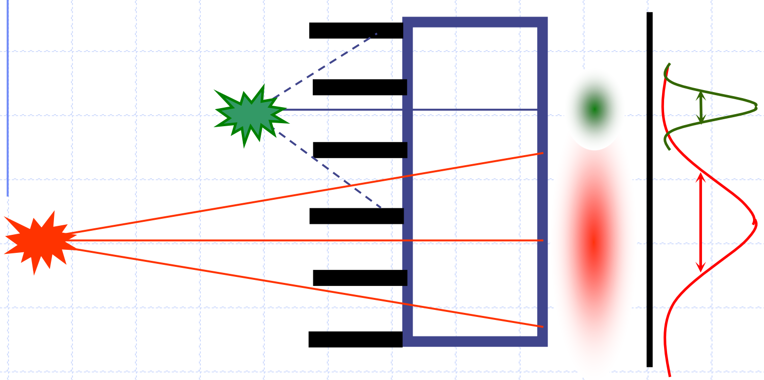
98% de l'intégrale d'une gaussienne se trouve entre ± LMH

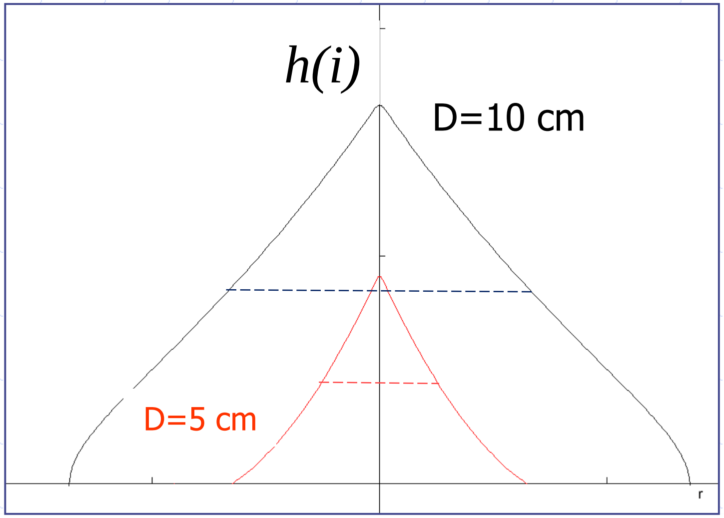
$$\boxed{\sum_{i=-LMH}^{LMH} h(i) \approx 1}$$

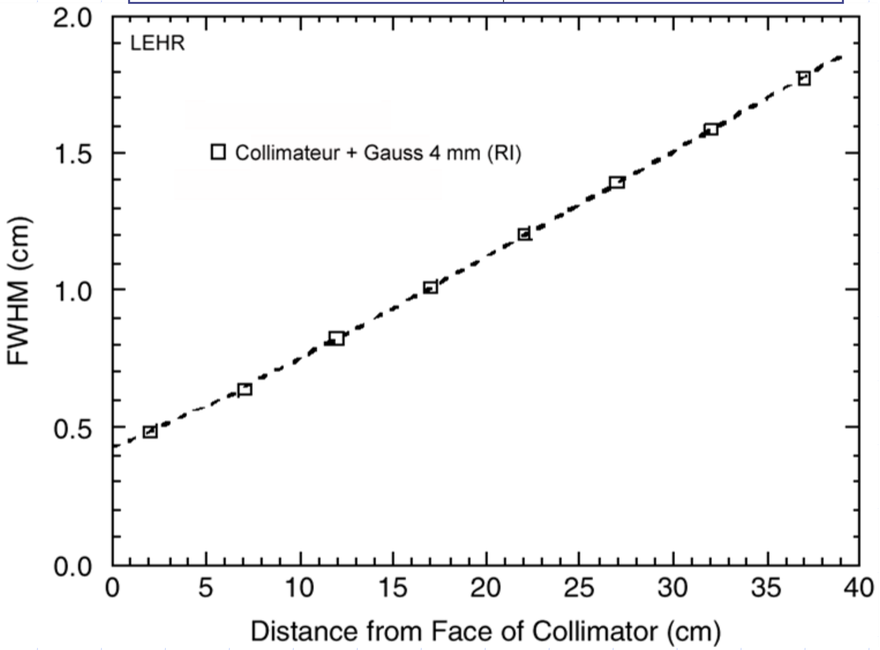
$$LMH = 2.\sigma\sqrt{2.\ln 2}$$

Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging, Springer US. 2006

# Lien entre LMH & D





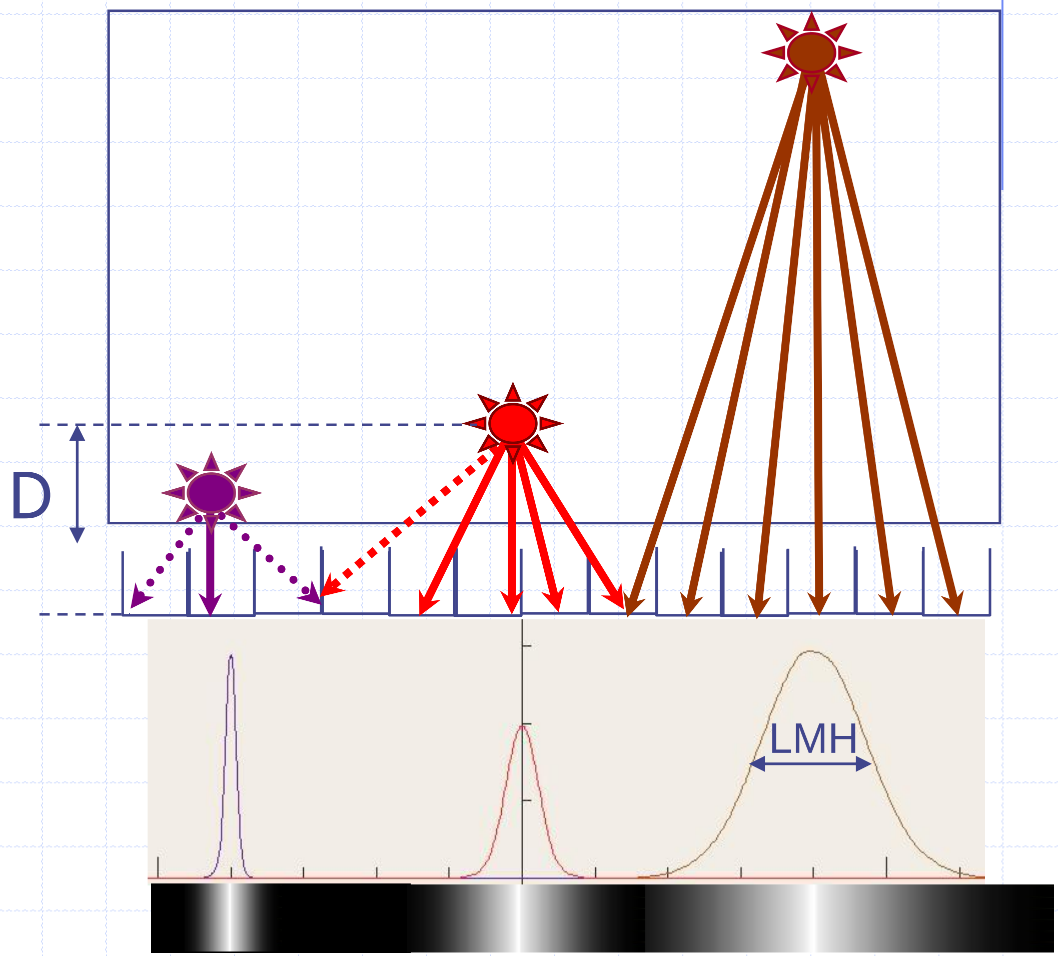



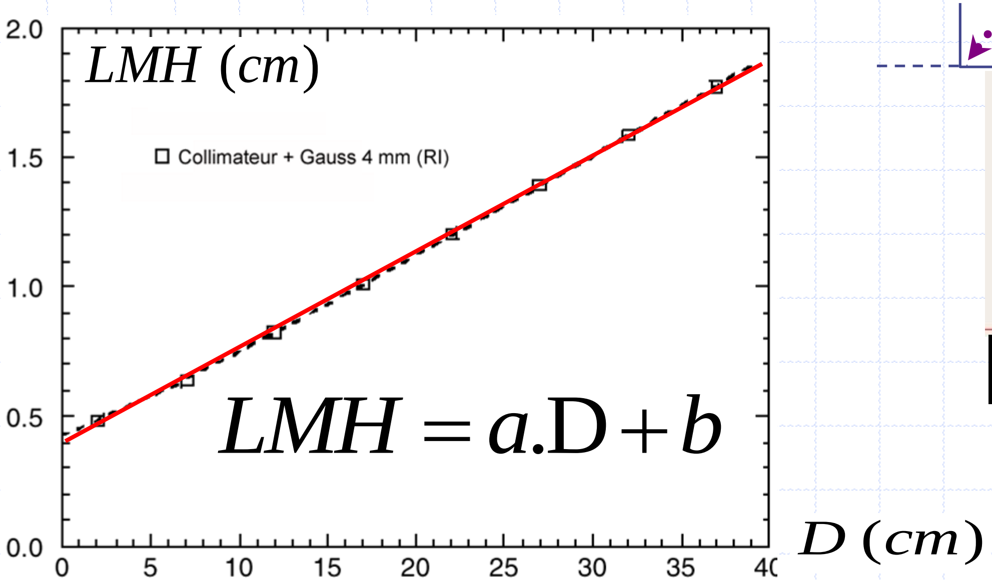

Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging, Springer US. 2006

# Réponse impulsionnelle d'une $\gamma$-caméra
## (*PSF = Point Spread Function*)

$$h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 . i^2}$$

$$h(i) = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4.\ln 2}{LMH^2}.i^2}$$



# LMH en imagerie médicale

≈ 0.1 mm — 1 mm — 5 mm — 10 mm — 15 mm

Mammo-graphie

Radiographie

IRM et TDM X

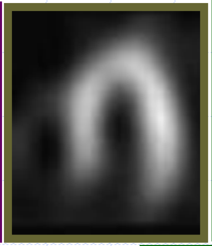
Echographie

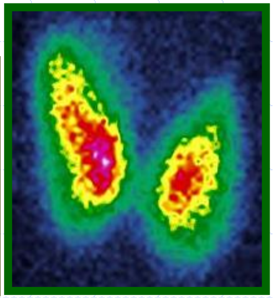
PET

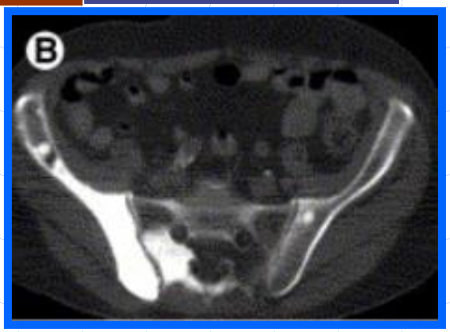
CZT

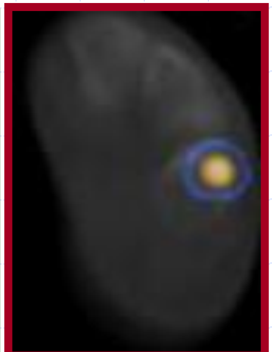
Scintigraphie γ

SPECT

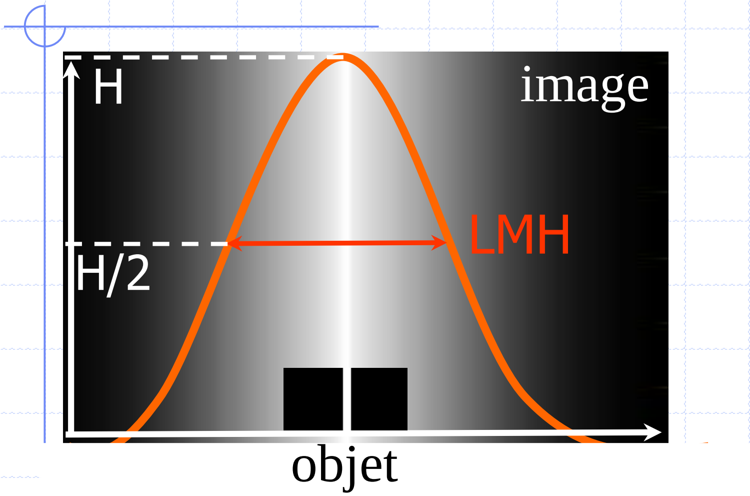


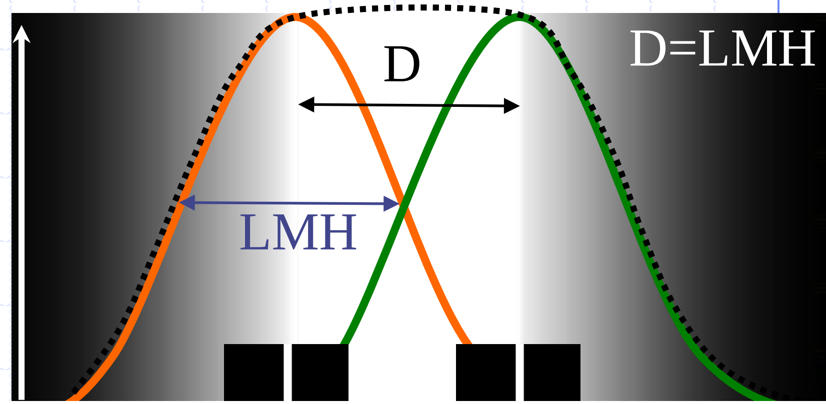




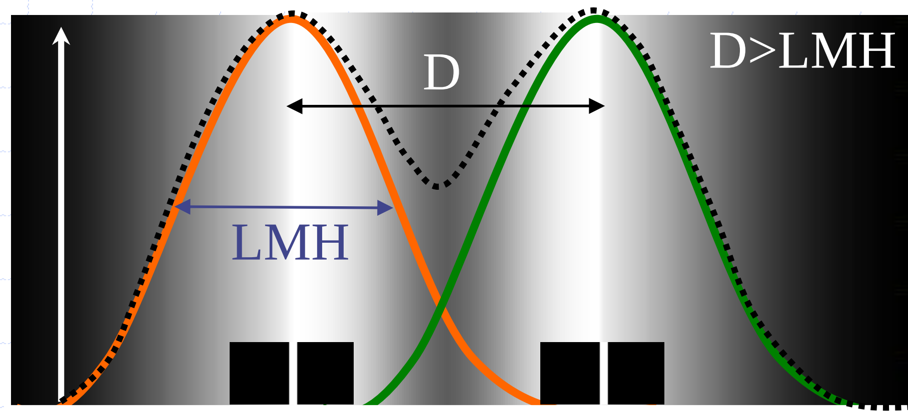



# LMH=Pouvoir séparateur



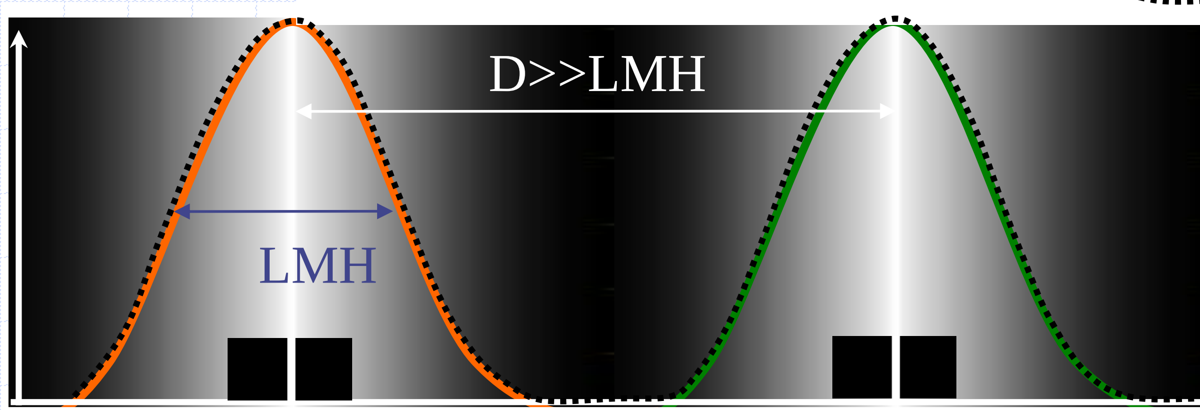




D ≤ LMH ⇒ images fusionnées

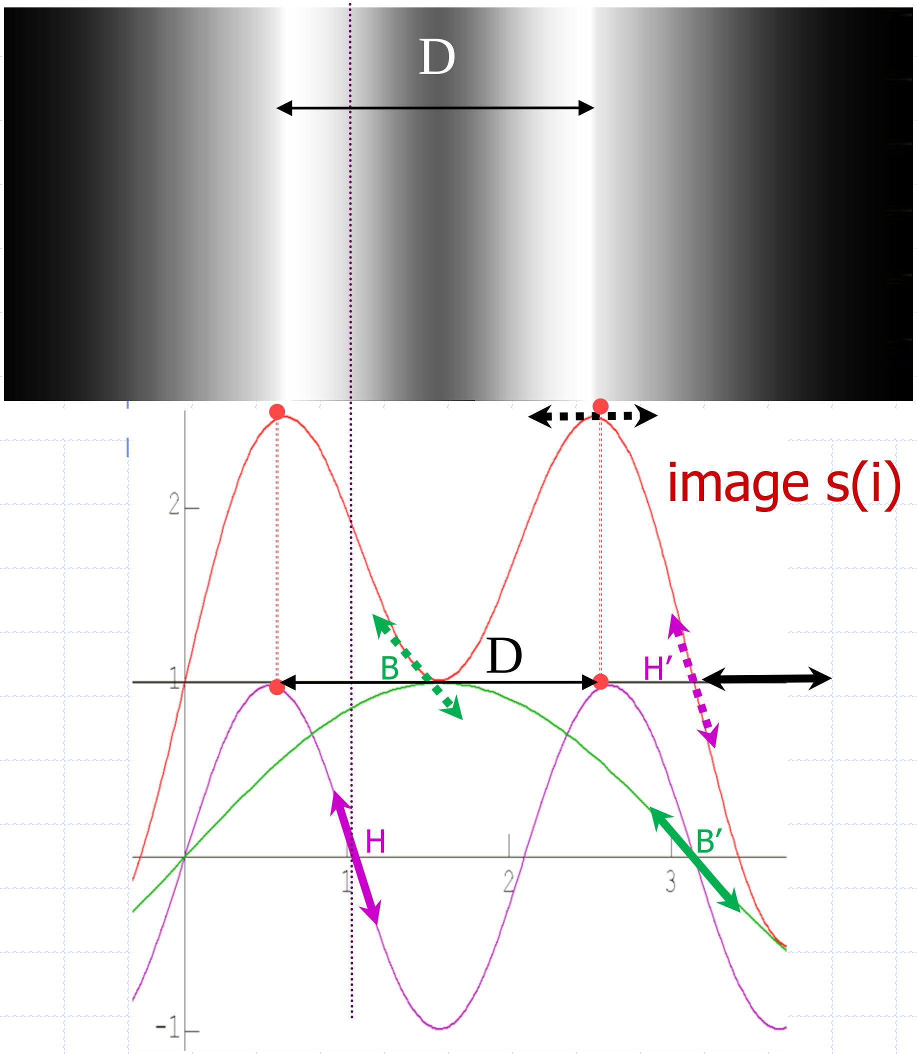



La LMH est la plus petite distance qui doit séparer 2 objets pour que la caméra en donne 2 images distinguables:

LMH = Pouvoir séparateur



# Décomposition harmonique d'un signal




Si D > LMH, l'image totale s(i) présente un minimum entre les maxima des images des 2 objets.
On peut écrire :

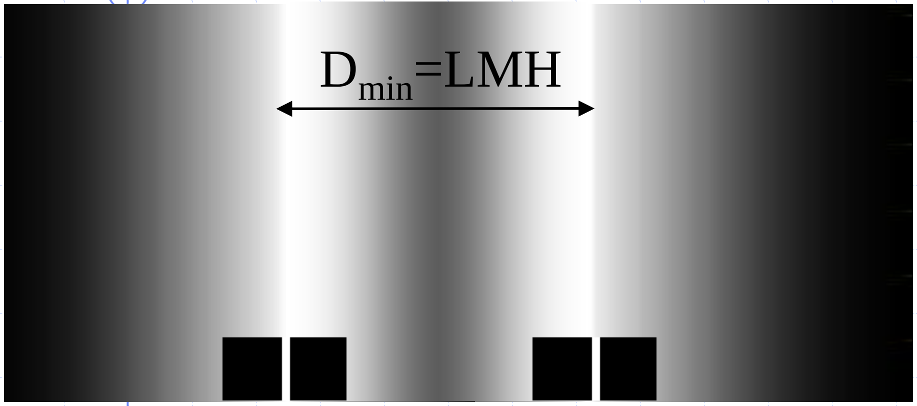
$s(i) = 1 + \sin(66\pi i) + \sin(200\pi i)$

$= 2\pi f_0 . i$

| | | |
|---|---|---|
| Fréquence nulle | $f_0$ fréquence fondamentale (la plus basse, ici 33 $m^{-1}$) | $f_{max}$ = fréquence maxi (ici $3.f_0 = 100\ m^{-1}$) |
| Code le signal de fond constant | code les variations lentes de niveaux de gris entre pixels (pente en B et B' au maxi) | Code les variations les plus brutales de niveaux de gris entre pixels (pente en H et H' au maxi) |

Dans cette image, deux raies blanches sont <u>au moins</u> séparées par une distance
$D_{min} = 1/f_{max} = 1/100$ m = 1 cm

# 1/LMH = fréquence maxi dans l’image



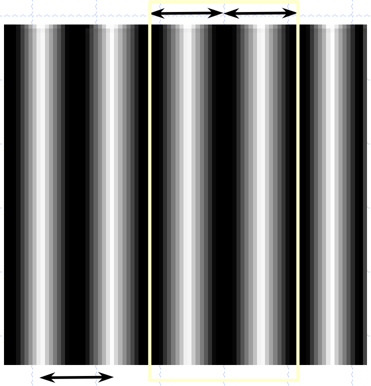

2 objets doivent être distants de LMH pour donner 2 images distinctes elles mêmes distantes de LMH.

LMH = $D_{min}$ = plus petite distance entre 2 raies blanches dans l’image = $1/f_{max}$

1/LMH est la plus haute fréquence objet dont la caméra puisse faire l’image
LMH $\downarrow \Rightarrow f_{max} \uparrow \Rightarrow$ variation de contraste maximale possible $\uparrow$

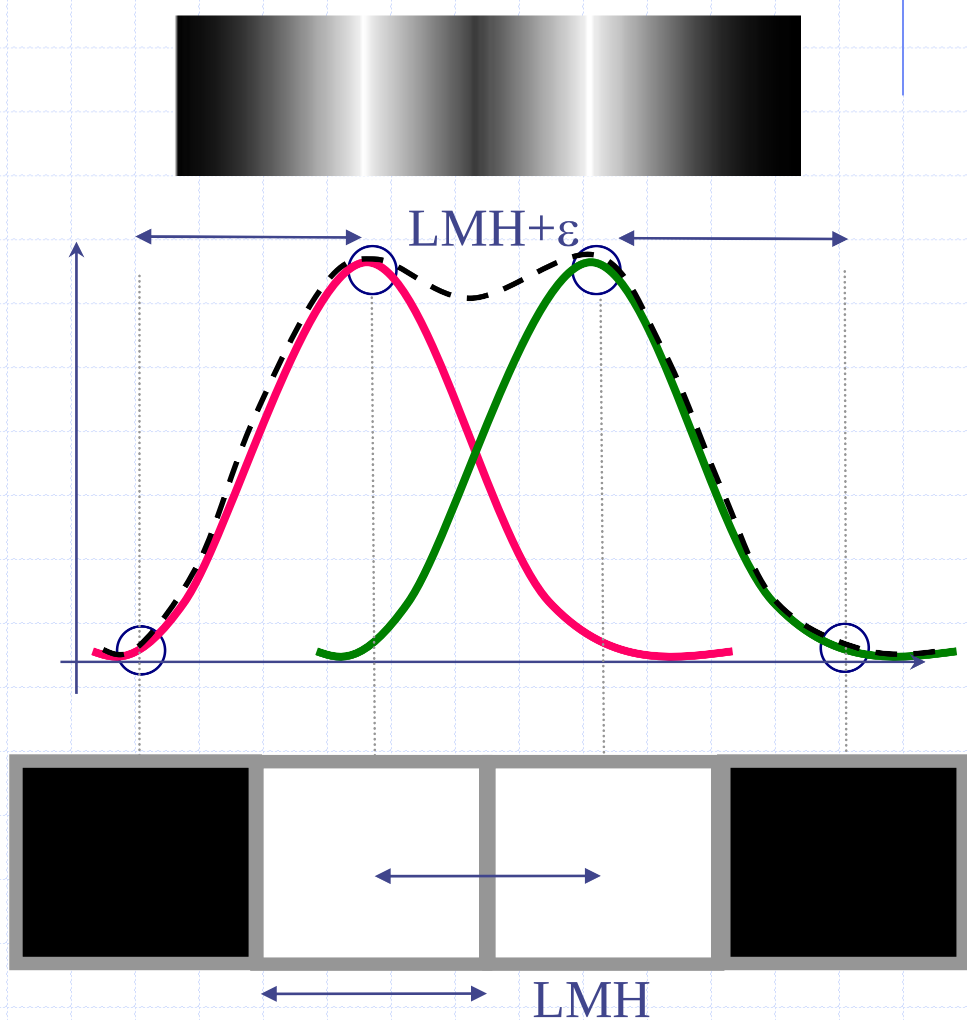
$$LMH = \frac{1}{f_{\max}^{transmise}} = D_{\min}^{transmise} = \text{résolution} = \text{pouvoir séparateur}$$

Exemple : LMH = 0,5 cm $\Rightarrow f_{max}$ = 1/0,5 $cm^{-1}$ = 2 signaux hyper par cm



# Théorème de Shannon

Si la taille du pixel est identique à la LMH, alors aucun contraste n’est numérisé pour des objets ponctuels distants d’un peu plus que la LMH:




**Perte de résolution**

# Théorème de Shannon

ECHANTILLONNAGE SANS PERTE DE RESOLUTION

⇕

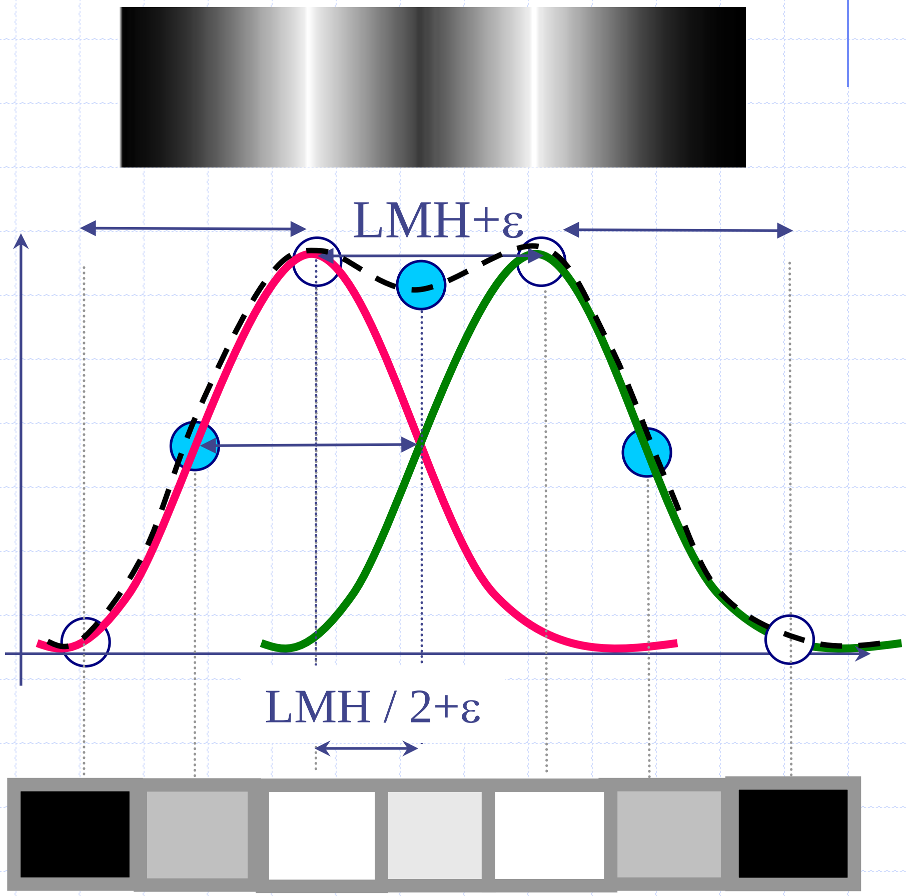
**taille du pixel d**

**$d \leq LMH/2$**

**En pratique :**

**$d = LMH/2$**

**$1/d = 2/LMH \Leftrightarrow f_e = 2.f_{max}$**



# Théorème de Shannon

**$d = LMH/2$**

**$1/d=2/LMH$**

**$f_e=2.f_{max}$**

$$f(x) = d.\sum_{n=0}^{n=32} f(n.d).\frac{\sin\left[2.\pi.f_{max}.(x-n.d)\right]}{\pi.(x-n.d)}$$

L = 160 mm

$f_{max}$ = 0,1 $mm^{-1}$

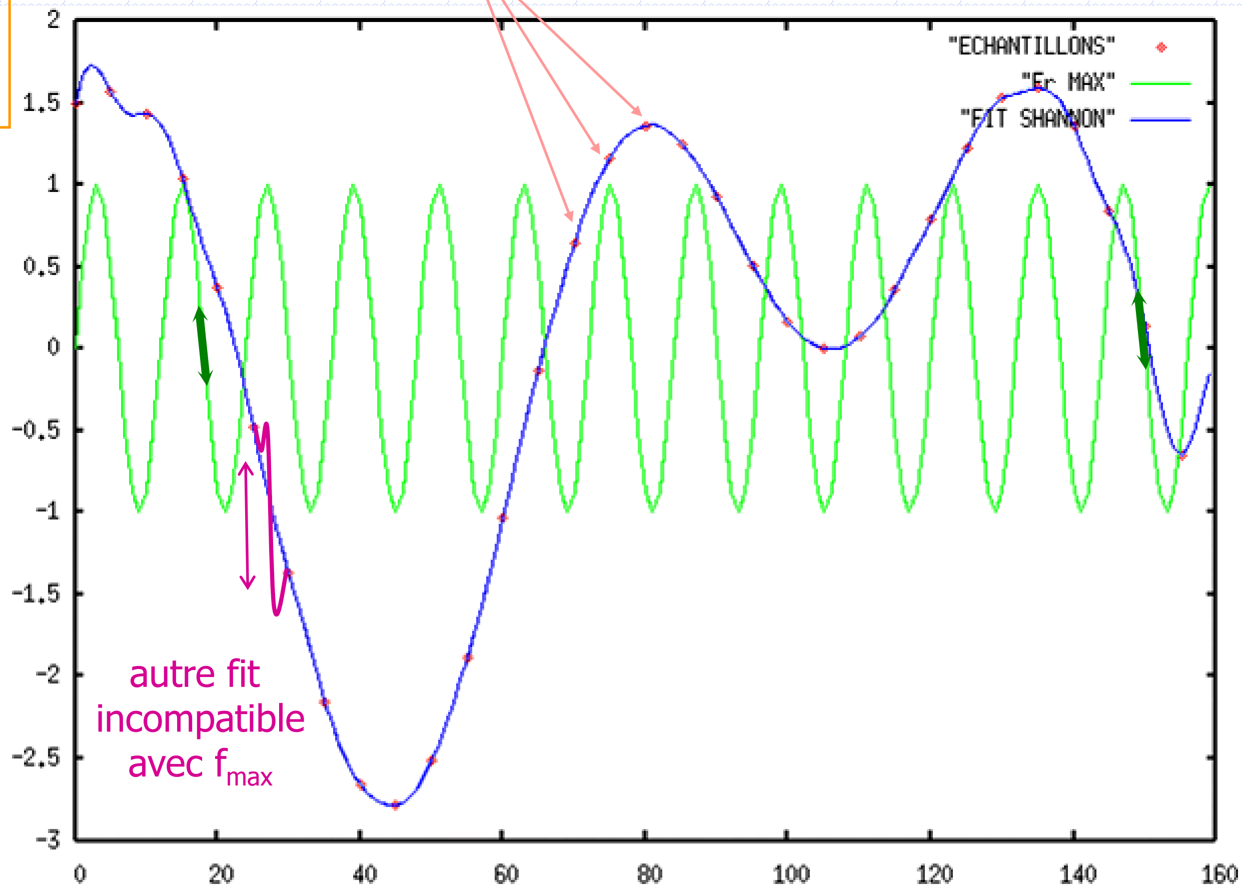
donc:

1/d = 2. $f_{max}$

1/d = 0,2 $mm^{-1}$

d = 5 mm

160/5 = 32 points



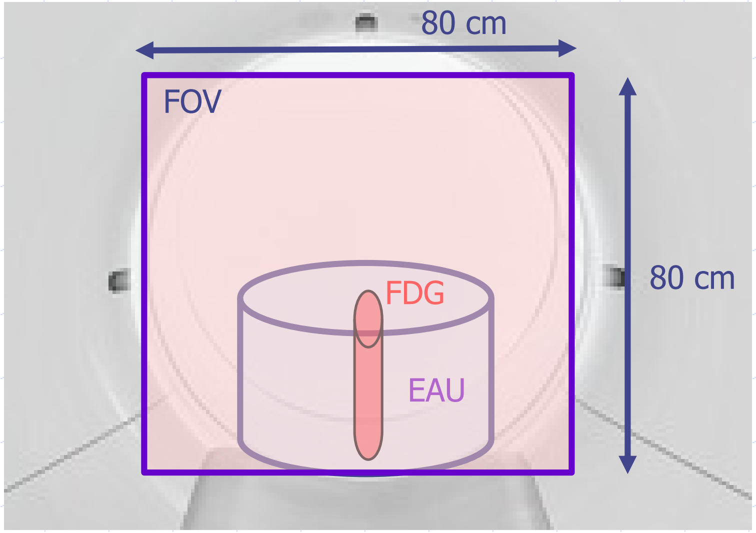
# Echantillonnage en pratique (1)

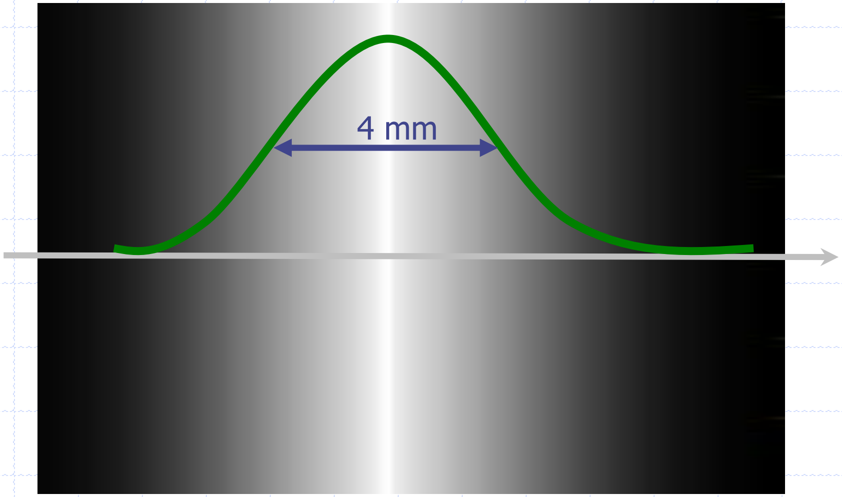
- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- Dimension retenue : 530 mm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - Taille du pixel = 3.5 mm
  - 530 / 3.5 = 151 pixels / côté
  - Puissance de 2 majorante = 256

# Echantillonnage en pratique (1)

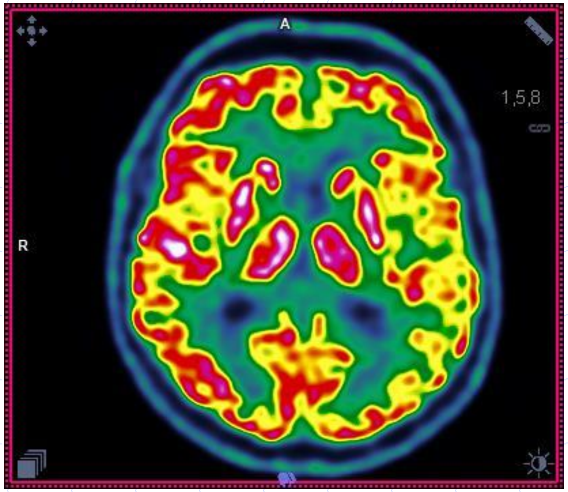
- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- Dimension retenue : 530 mm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - Taille du pixel = 3.5 mm
  - 530 / 3.5 = 151 pixels / côté
  - Puissance de 2 majorante = 256
- LMH en mode tomographique = 18 mm
  - Taille du pixel = 9 mm
  - 530 / 9 = 59 pixels
  - Puissance de 2 majorante = 64

# Echantillonnage en pratique (1)

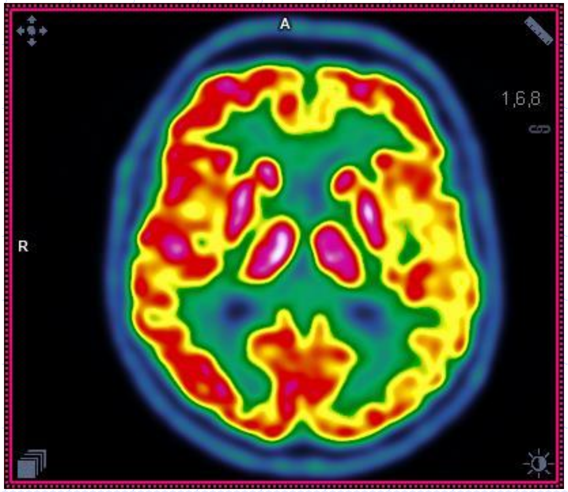



Le préréglage proposé par le constructeur est-il optimal ?




400 px/côté




Préréglage du constructeur : 200 px/côté

# REPONSE D'UNE $\gamma$-CAMERA

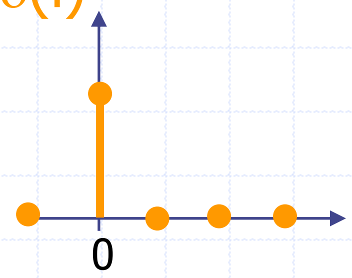
- Réponse d'une $\gamma$-caméra = Gaussienne
- LMH de la gaussienne =
  - Résolution
  - Pouvoir séparateur
  - La plus petite période de signal transmise
  - l'inverse de la fréquence spatiale maximale dans l'image

- LMH linéaire avec distance(source-collimateur)

- Shannon $\Rightarrow$ taille du pixel = LMH/2

# Formation de l'image

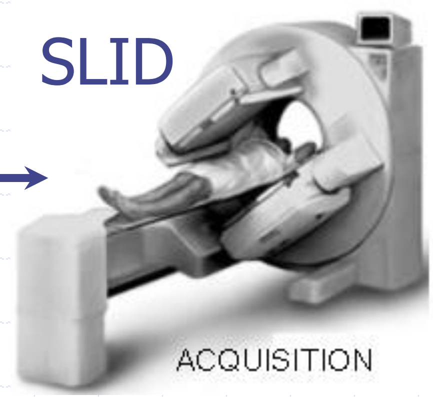
δ(i)



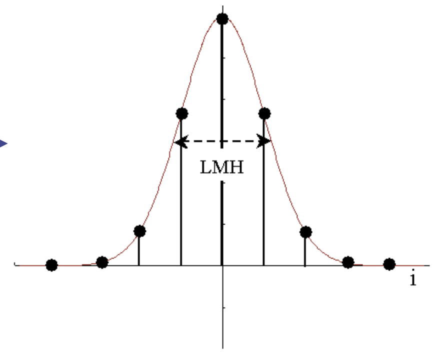

$\delta(0)=1$

$\delta(k)= 0$ si $k \neq 0$

SLID

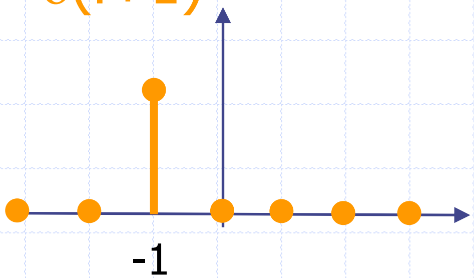



h(i)

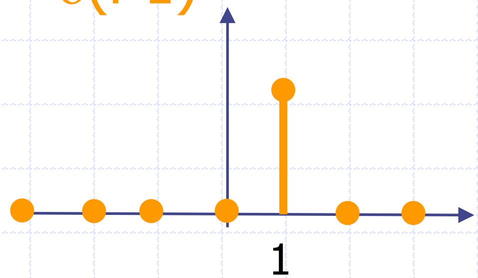



$h(i) = M[\delta](i)$

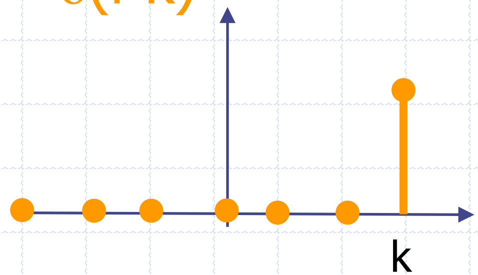
δ(i+1)




δ(i-1)



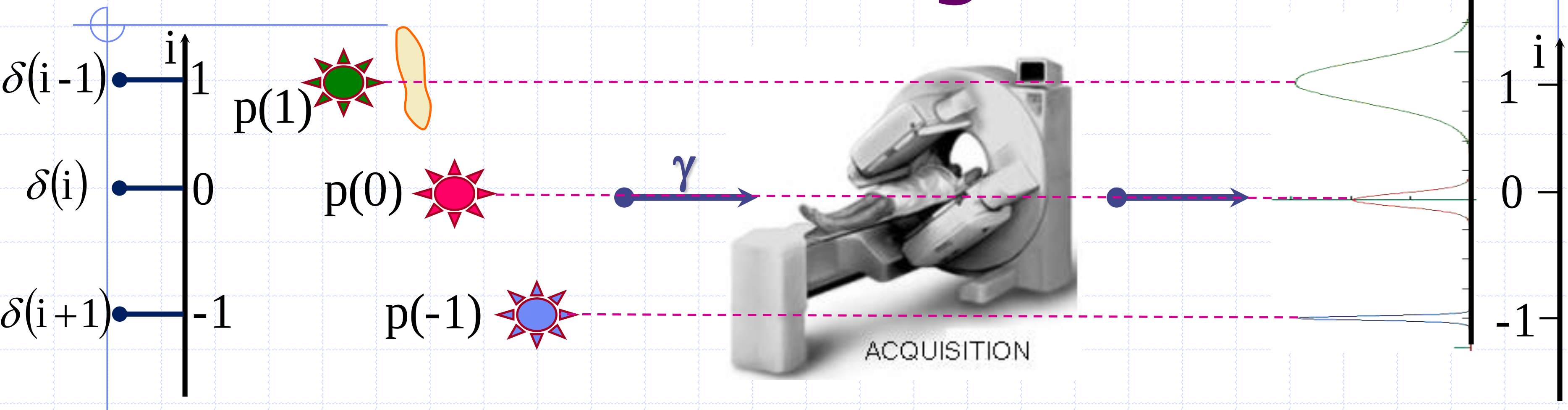

δ(i-k)




$\delta(i-k)$ = impulsion centrée en k

Introduction au traitement numérique des images médicales. D. Mariano-Goulart. *EMC.* (Elsevier Masson SAS, Paris), Radiodiagnostic - Principes et techniques d'imagerie, 35-100-A-10, 2015.

# Formation de l'image

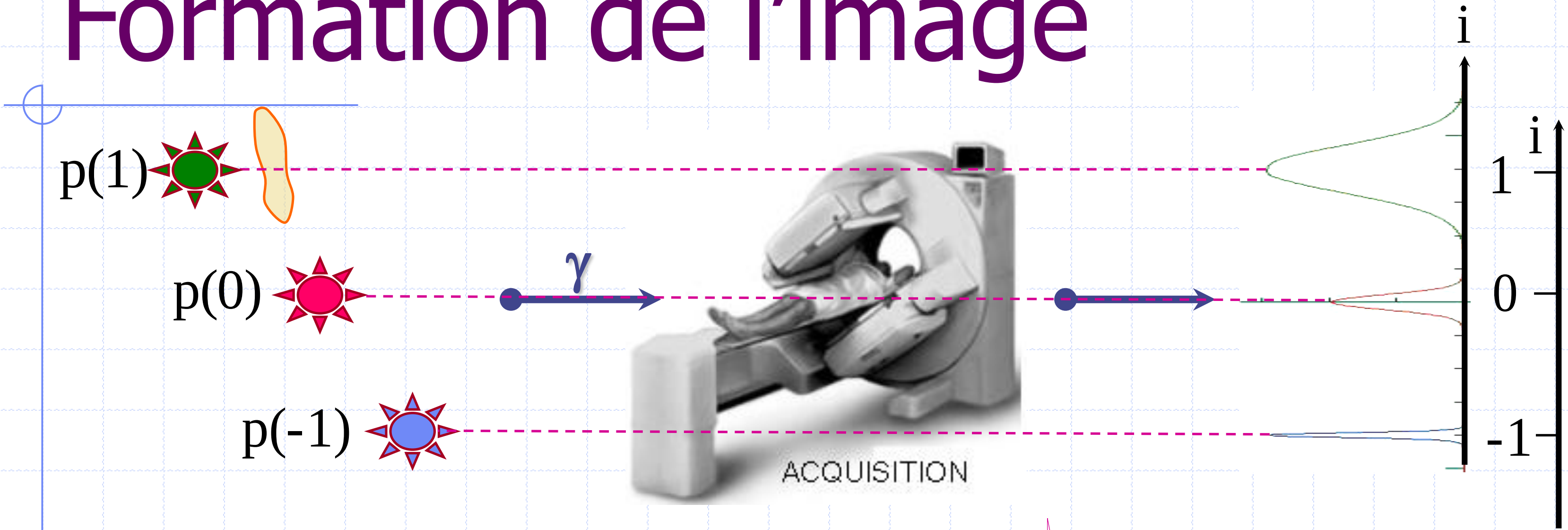



$$p(i) = p(-1)\delta(i+1) + p(0)\delta(i) + p(1)\delta(i-1)$$

$$\text{exemple} : i = 1 \Rightarrow p(-1)\delta(2) + p(0)\delta(1) + p(1)\delta(0) = p(1)$$

$$\boxed{p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\underbrace{\delta(i-k)}_{= 0 \text{ sauf si } k=i \text{ où } \delta(0)=1}, \quad i \text{ fixé}}$$

# Formation de l'image

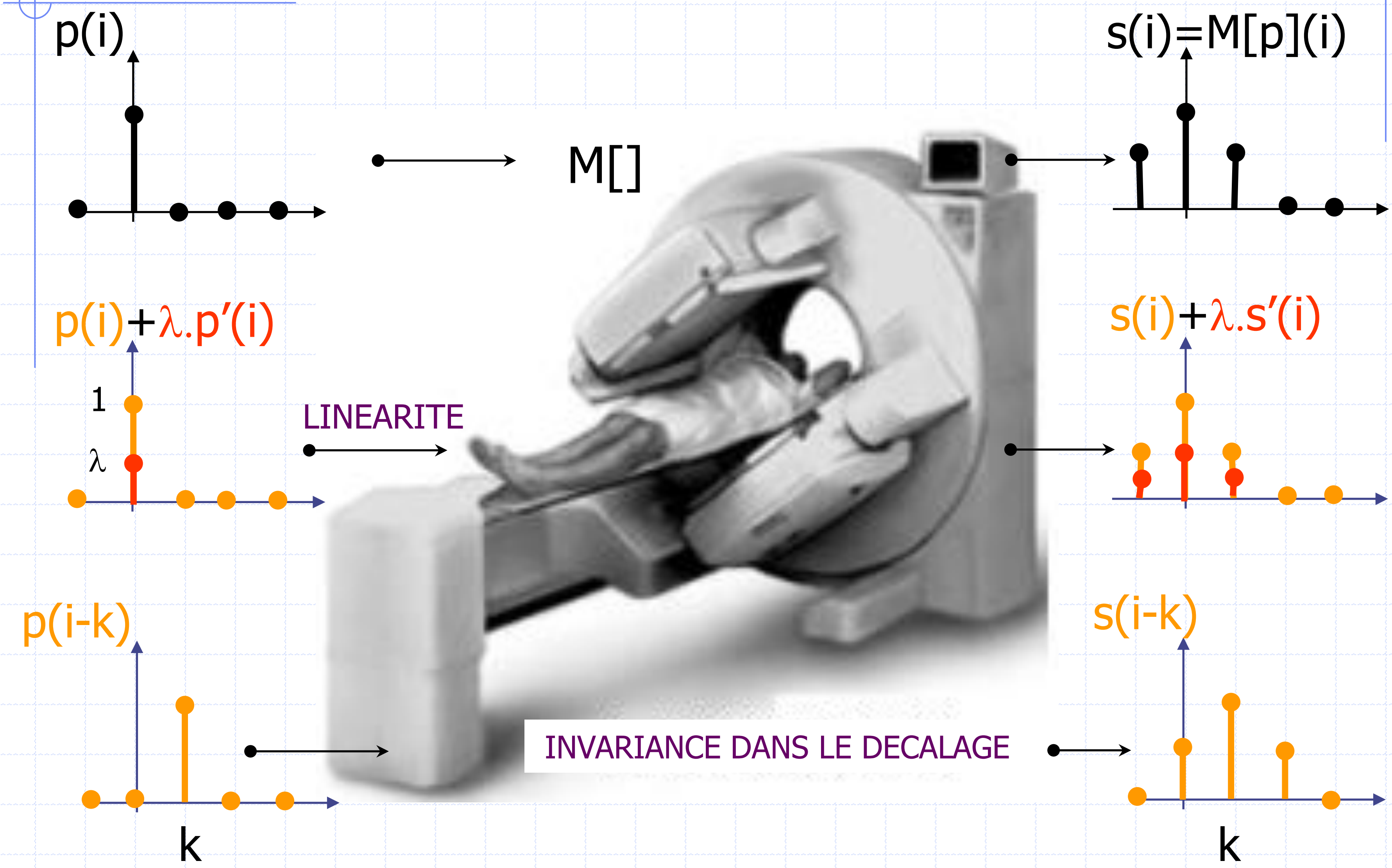



$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k), \quad i \text{ fixé}$$

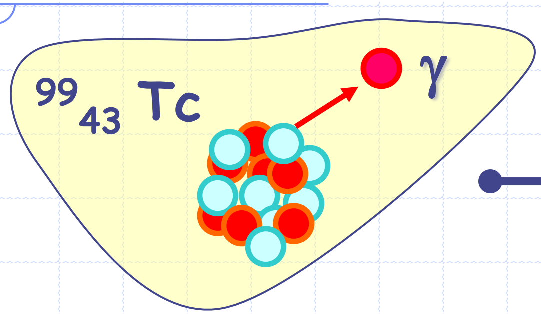
$$s(i) = M[p](i) = ?$$

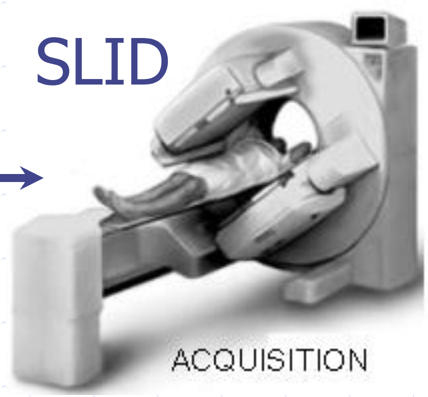
Pour déterminer s, il faut faire des hypothèses sur M, donc sur les caractéristiques de la $\gamma$-caméra…

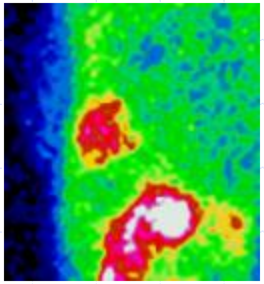
# Caméra ≈ linéaire & invariante (SLID)



# Formation de l'image



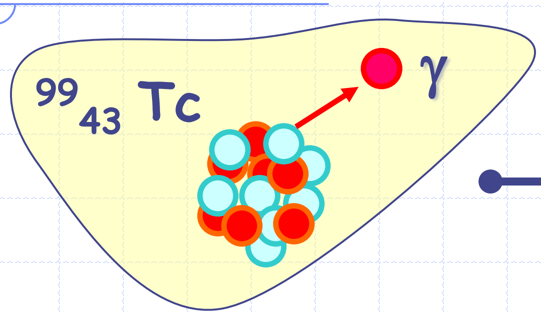
$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k)$$

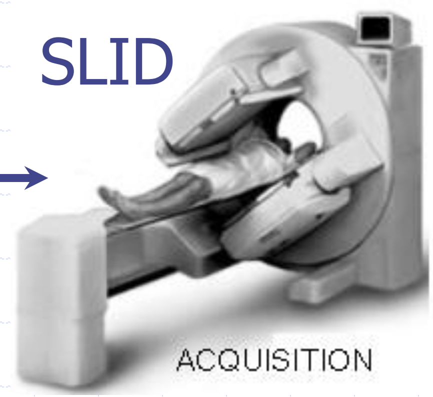
$$h(i) = M[\delta](i)$$

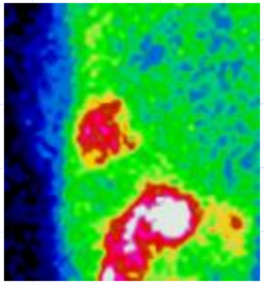
$$s(i) = M[p](i) = ?$$

$$s(i) = M[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k)]$$

# Formation de l'image



$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k)$$

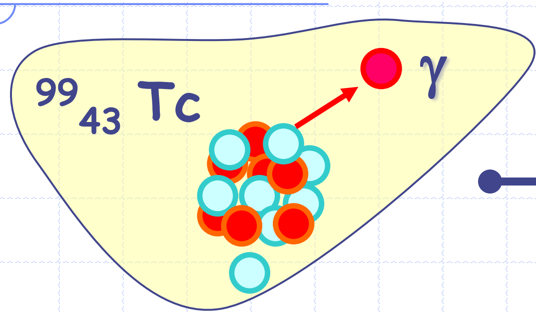
$$h(i) = M[\delta](i)$$

$$s(i) = M[p](i) = ?$$

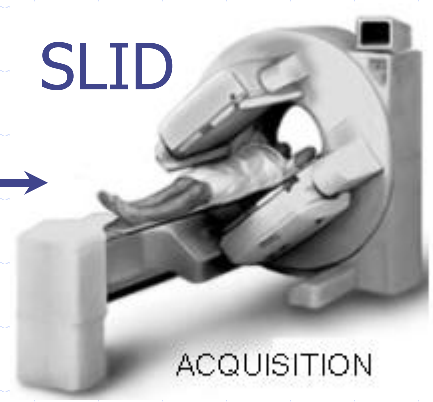
$$s(i) = M[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).M[\delta(i-k)]$$

linéarité

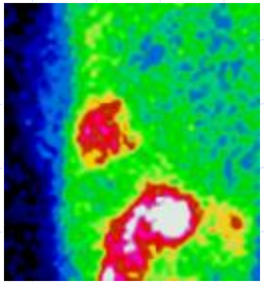
# Formation de l'image




$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k)$$




$$h(i) = M[\delta](i)$$



$$s(i) = M[p](i) = ?$$

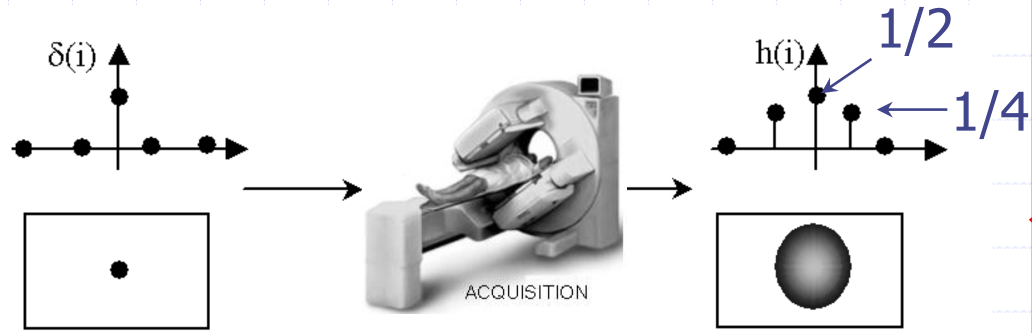
$$s(i) = M[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\delta(i-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\overbrace{M[\delta(i-k)]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).h(i-k)$$

invariance dans le décalage

$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).h(i-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = (p * h)(i) = (h * p)(i)$$

$*$ = produit de convolution

# Interprétation

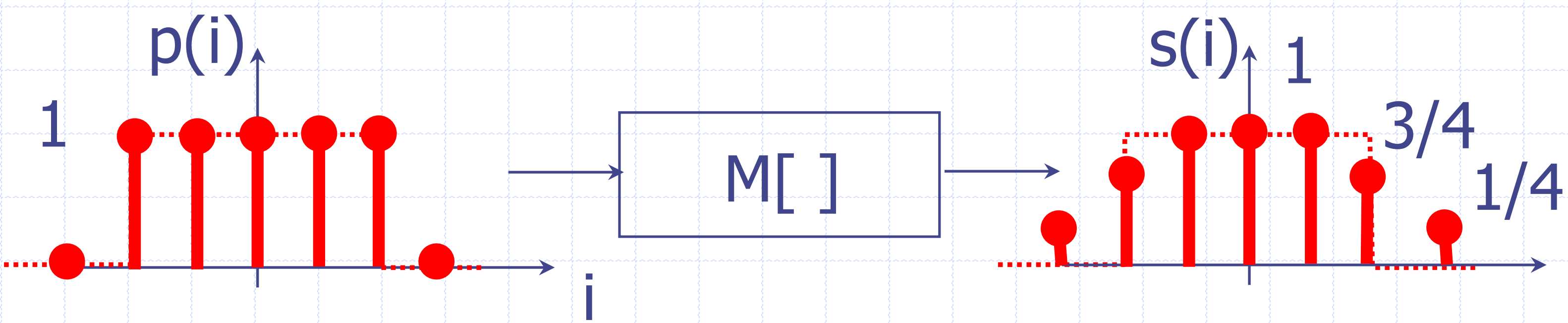



$$\boxed{s(i) = \sum_{k=-1}^{+1} h(k).p(i-k)}$$

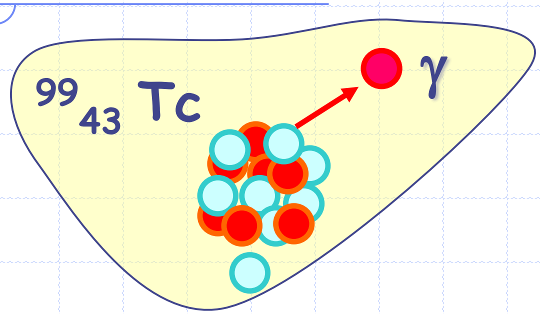
$$s(i) = h(-1).p(i+1) + h(0).p(i) + h(1).p(i-1)$$

$$s(i) = \frac{1}{4}p(i+1) + \frac{1}{2}p(i) + \frac{1}{4}p(i-1) = \frac{2.p(i) + p(i+1) + p(i-1)}{4}$$

**s = moyenne pondérée par h de la grandeur physique p**



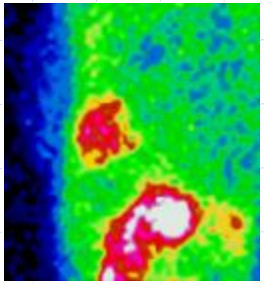
# Formation de l'image



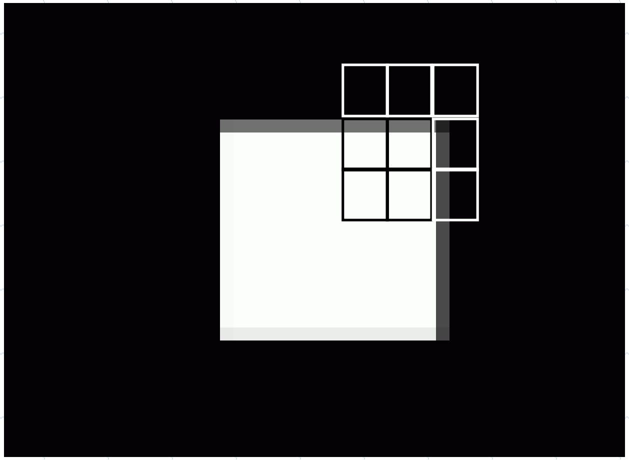

p(i)

SLID

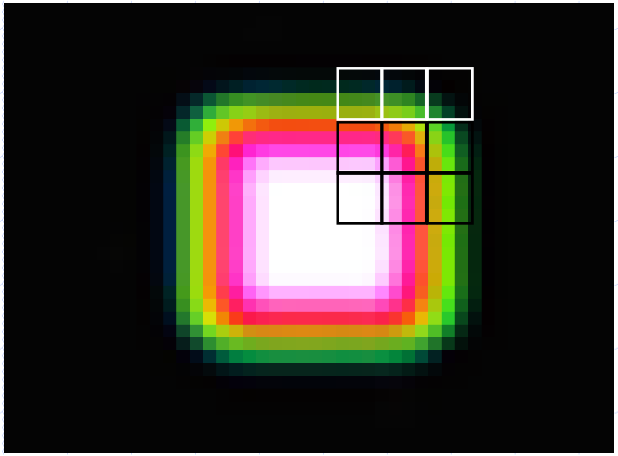

s(i)



$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = (p * h)(i)$$




$$h(i,j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$



# Exemple de formation d'image

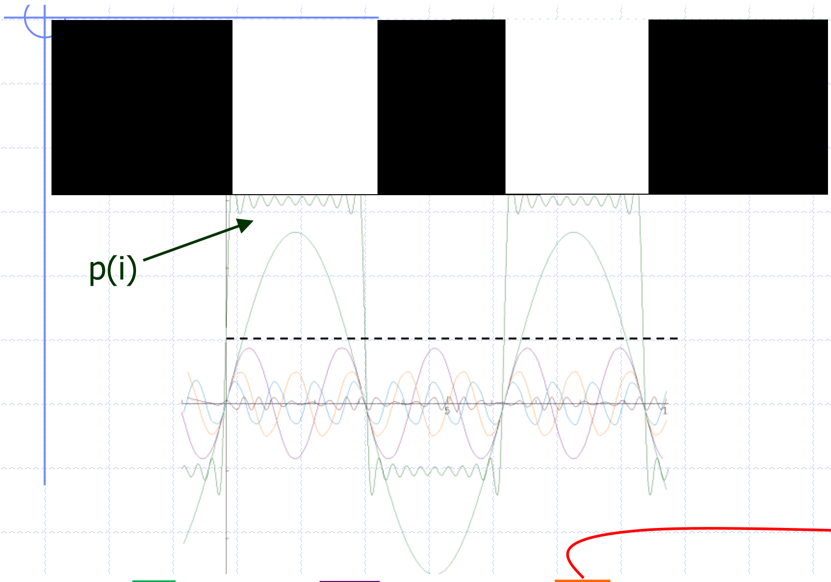
$$h(i, j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

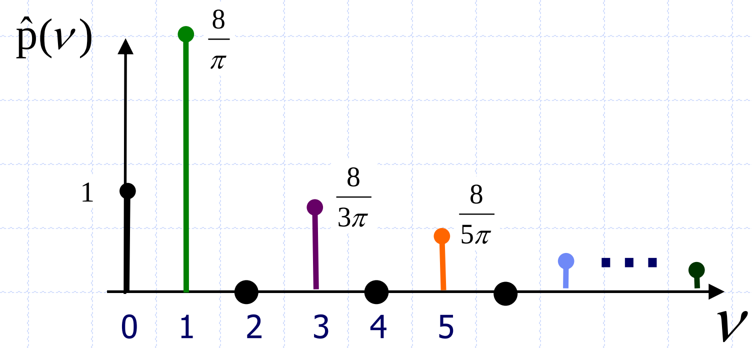
$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow S(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 12 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

OBJET

IMAGE

# Interprétation en fréquence: TF




$$p(i) = \boxed{1} + \boxed{\frac{8}{\pi}}\sin(i) + \boxed{\frac{8}{3\pi}}\sin(3i) + \boxed{\frac{8}{5\pi}}\sin(5i) + \ldots \xrightarrow{\text{TF}} \left|\hat{p}(\nu)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\sin(\nu.k)\right|$$ si p(i) est impaire

de période $2\pi$

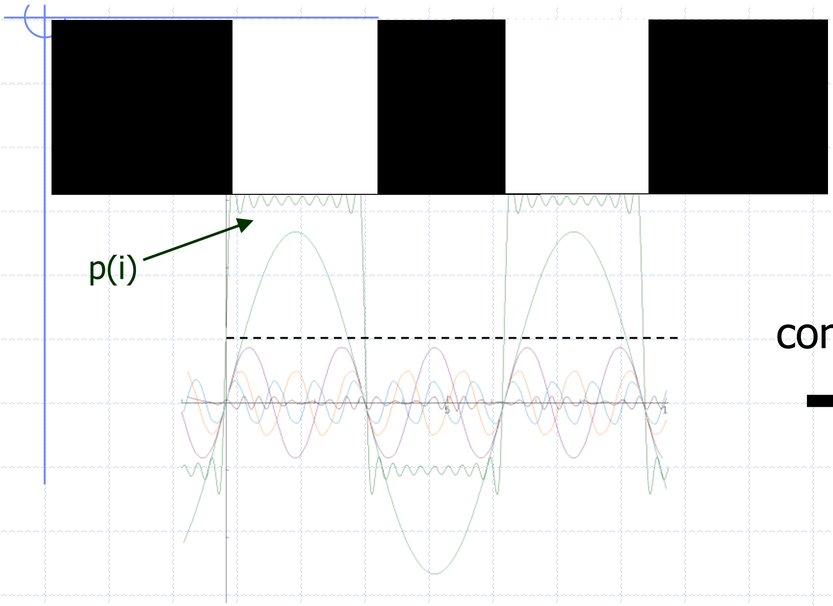
Ce graphe représentant les amplitudes $\hat{p}(\nu)$ de chaque composante de fréquence $\nu$ est appelé spectre (ou transformée de Fourier) du signal p(i)

Remarque: si p(i) est paire, alors $\left|\hat{p}(\nu)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).\cos(\nu.k)\right|$

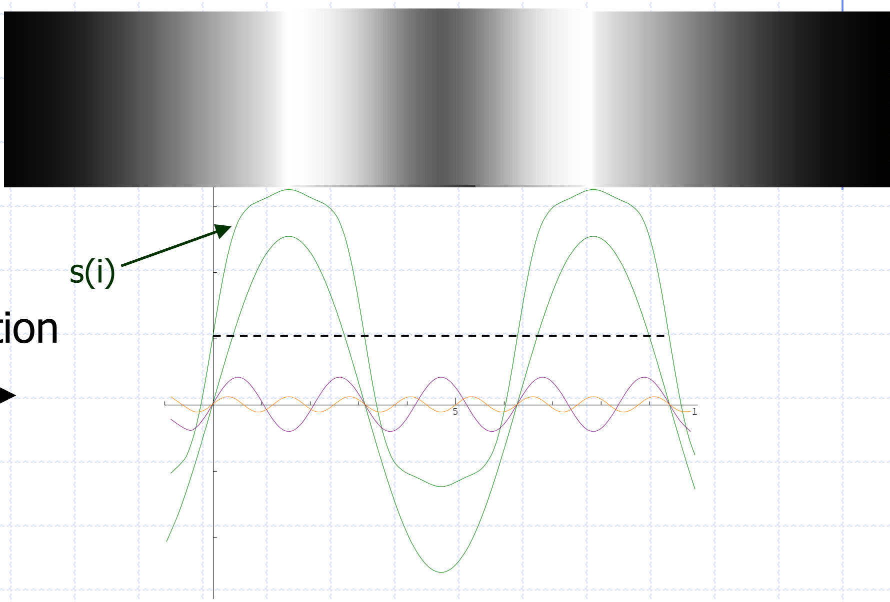
et, en général, $\hat{p}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k).[\cos(\nu.k) - j\sin(\nu.k)]$

(inutile de retenir les formules de TF)

# Interprétation en fréquence

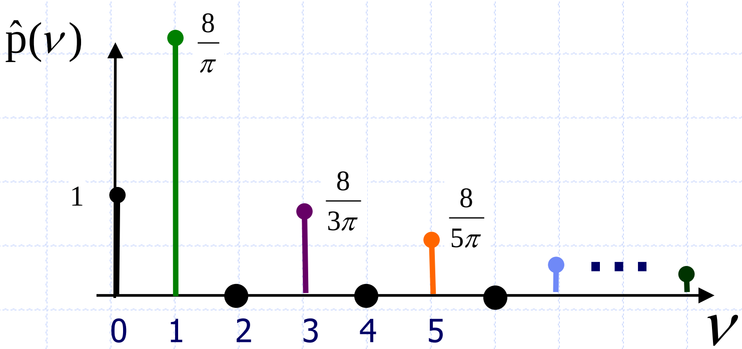


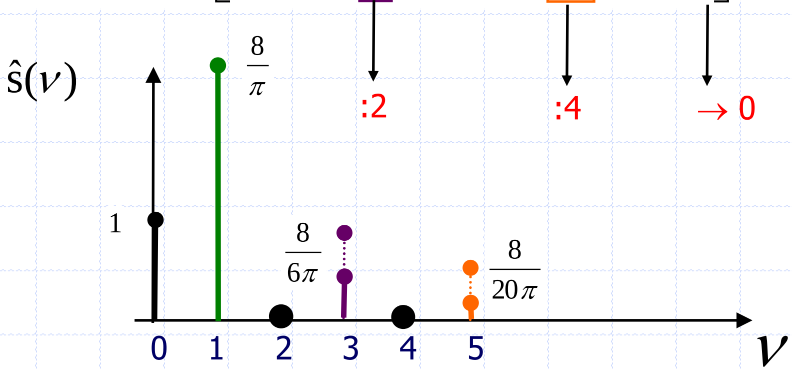

convolution




$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi}\left[\sin(i) + \frac{1}{3}\sin(3i) + \frac{1}{5}\sin(5i) + \ldots\right]$$

$$s(i) = 1 + \frac{8}{\pi}\left[\sin(i) + \boxed{\frac{1}{6}}\sin(3i) + \boxed{\frac{1}{20}}\sin(5i)\right]$$

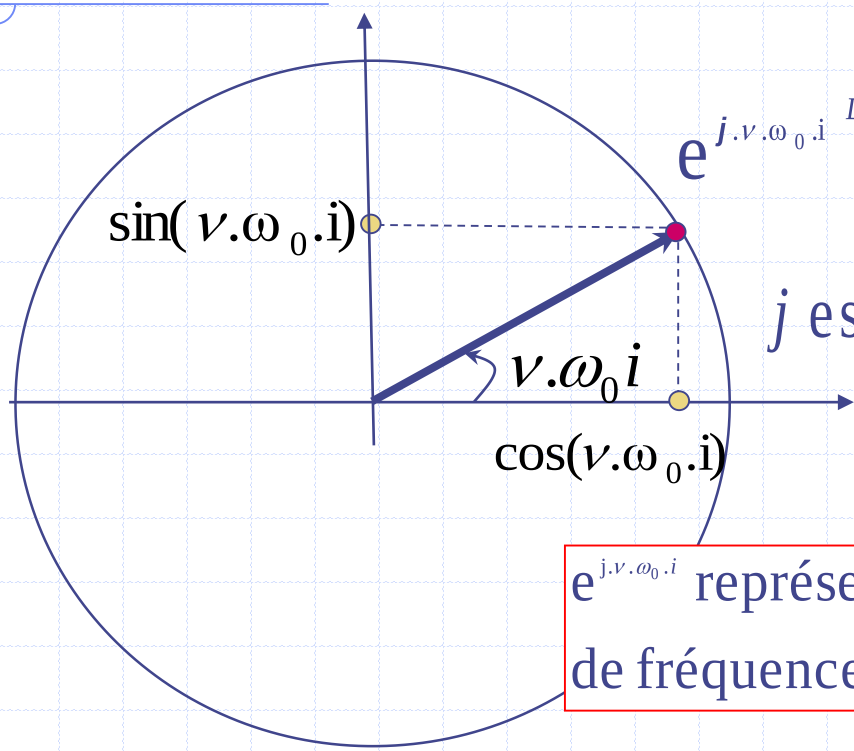



↓ de l'influence des HF

M

# Rappel : expo. complexe & TFD




$$e^{j.\nu.\omega_0.i} \overset{DEF}{=} \cos(\nu.\omega_0.i) + j.\sin(\nu.\omega_0.i)$$

$j$ est le nombre complexe de carré -1

$$f_\nu = \nu.f_0 = \nu.\omega_0/(2\pi)$$

$e^{j.\nu.\omega_0.i}$ représente la fonction circulaire (sin ou cos) de fréquence $\nu$ fois la fréquence $f_0$ = harmonique $\nu$

$$p(i) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\hat{p}(\nu).e^{j.(\nu.\omega_0)i} \Leftrightarrow p(i) = \frac{1}{N}\left[\hat{p}(0) + \hat{p}(1).e^{j.\omega_0.i} + \ldots + \hat{p}(N-1).e^{j.((N-1).\omega_0)i}\right]$$

$$où\ \hat{p}(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1}p(k).e^{-j.(\nu.\omega_0).k} \Leftrightarrow \hat{p}(\nu) = p(0) + p(1).e^{-j.\omega_0.i} + \ldots + p(N-1).e^{-j.((N-1).\omega_0)i}$$

# Théorème de convolution

M

## (démonstration avec les exponentielles complexes)

$$p(i) = e^{j.(\nu\omega_0)i} \rightarrow \boxed{M[\ ]} \longrightarrow s(i) = \sum_k h(k).p(i-k)$$

$$s(i) = \sum_k h(k).e^{j.(\nu.\omega_0).(i-k)} = \underbrace{e^{j.(\nu.\omega_0).i}}_{p(i)} \underbrace{\sum_k h(k).e^{-j.(\nu.\omega_0).k}}_{\hat{h}(\nu)}$$

$$\boxed{p(i) = e^{j.(\nu\omega_0)i} \quad \Rightarrow \quad s(i) = \hat{h}(\nu)\,.\,p(i)}$$

Un SLID agit sur l'harmonique $\nu$ en l'amplifiant par la **réponse en fréquence** en $\nu$ : $\hat{h}(\nu)$
(*MTF = Modulation Transfer Function*)

# Théorème de convolution

$$p(i) = \sin(\nu.i) \longrightarrow \boxed{h(k)} \longrightarrow s(i) = \sum_k h(k).p(i-k)$$

$$s(i) = \sum_k h(k).\sin[\nu(i-k)] = \sum_k h(k).[\sin(\nu i)\cos(\nu k) - \sin(\nu k)\cos(\nu i)]$$

$$\Rightarrow s(i) = \sum_k h(k).[\sin(\nu i)\cos(\nu k)] - \sum_k h(k).[\sin(\nu k)\cos(\nu i)]$$

$$\Rightarrow \underbrace{s(i) = \sin(\nu i)}_{= p(i)}.\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).\cos(\nu k)}_{\hat{h}(\nu)} - \cos(\nu i)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).\sin(\nu k)$$

$p(i)$ $\hat{h}(\nu)$

TF de h

= réponse en fréquence

= 0 car $\forall k, h(k).\sin(\nu k) + h(-k).\sin(-\nu k) = h(k).\sin(\nu k) - h(k).\sin(\nu k) = 0$

(h est paire)

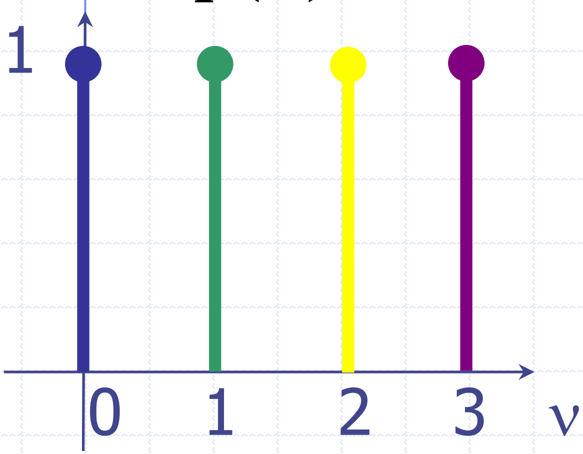
$$\boxed{s(i) = p(i).\hat{h}(\nu)}$$

Un SLID agit sur l'harmonique $\nu$ en l'amplifiant par la **réponse en fréquence** en $\nu$ : $\hat{h}(\nu)$ (*MTF = Modulation Transfer Function*)

# Théorème de convolution

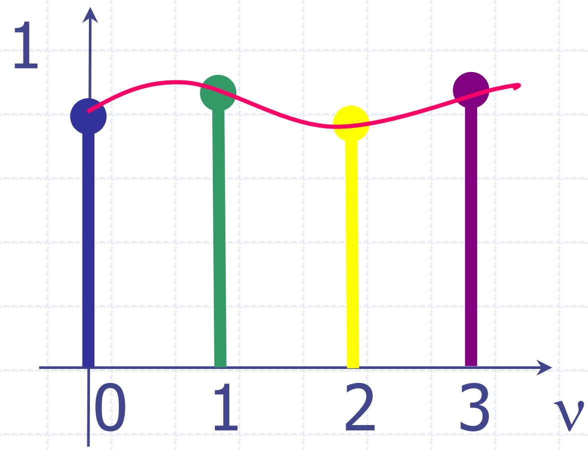
$\hat{h}(\nu)$

$\hat{p}(\nu)$





$\hat{s}(\nu) = \hat{p}(\nu).\hat{h}(\nu)$

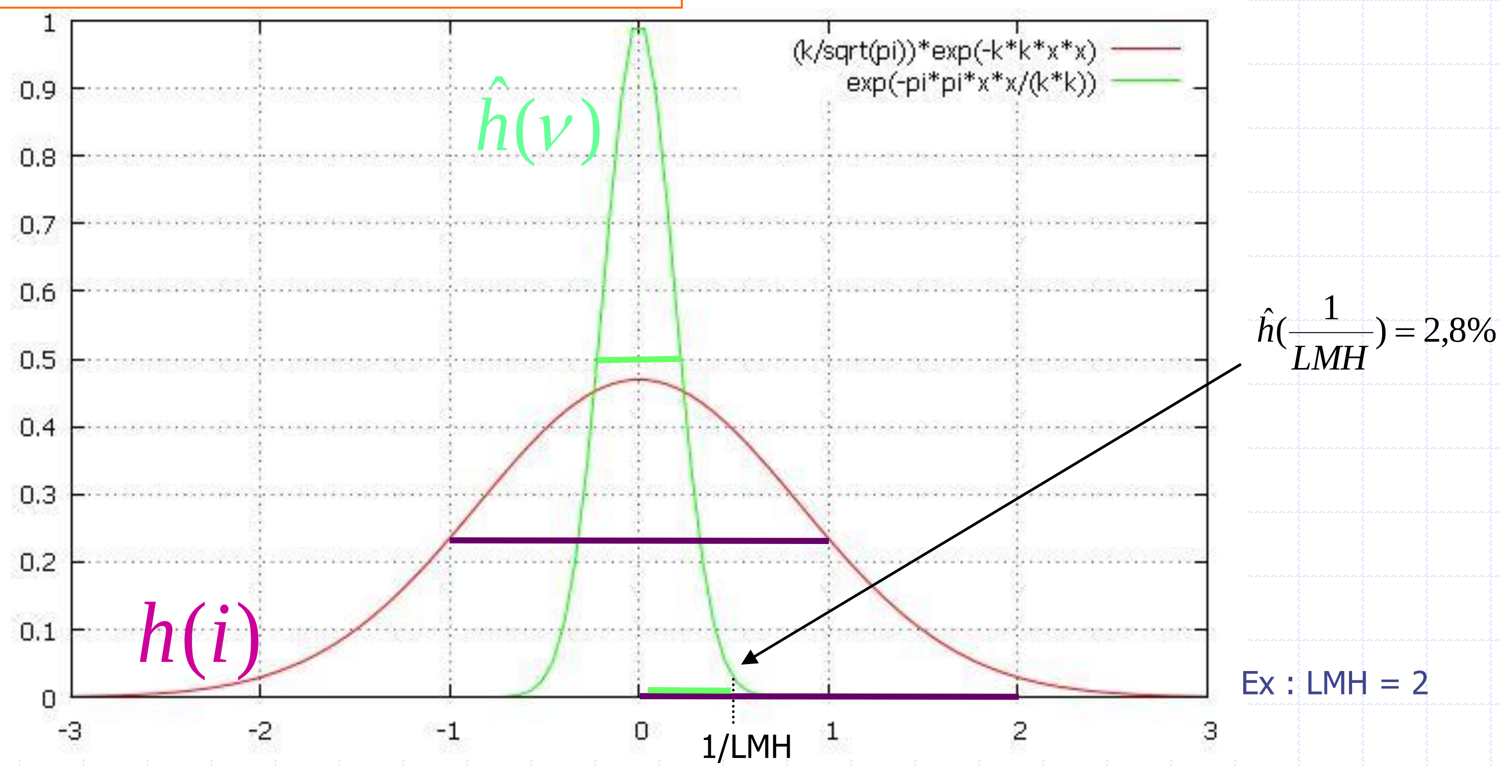



$\hat{s}(\nu)$=multiplication par $\hat{h}(\nu)$ de la TF de la grandeur physique $\hat{p}(\nu)$

s = convolution par h de la grandeur physique p

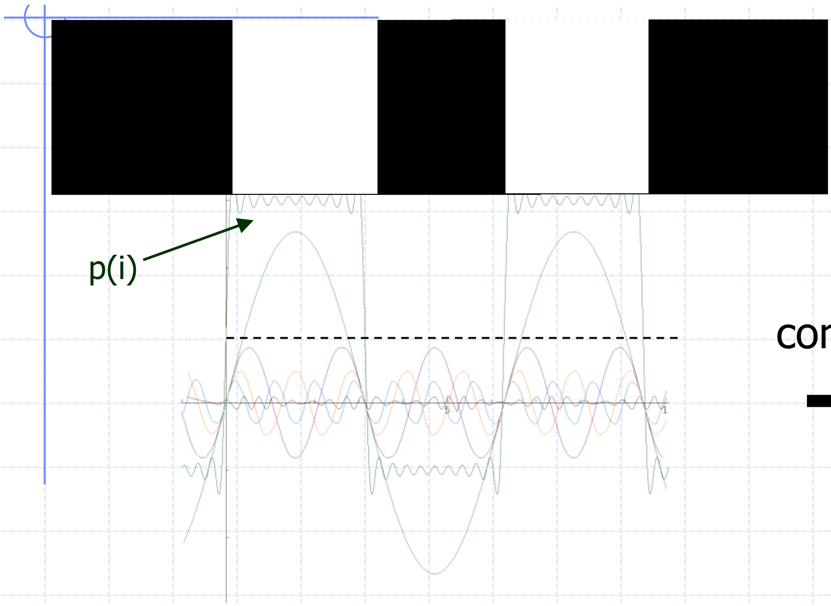
# TF d'une gaussienne

$$\boxed{h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-(C.i)^2} \Leftrightarrow \hat{h}(\nu) = e^{-\left(\frac{\pi.\nu}{C}\right)^2}} \quad C = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

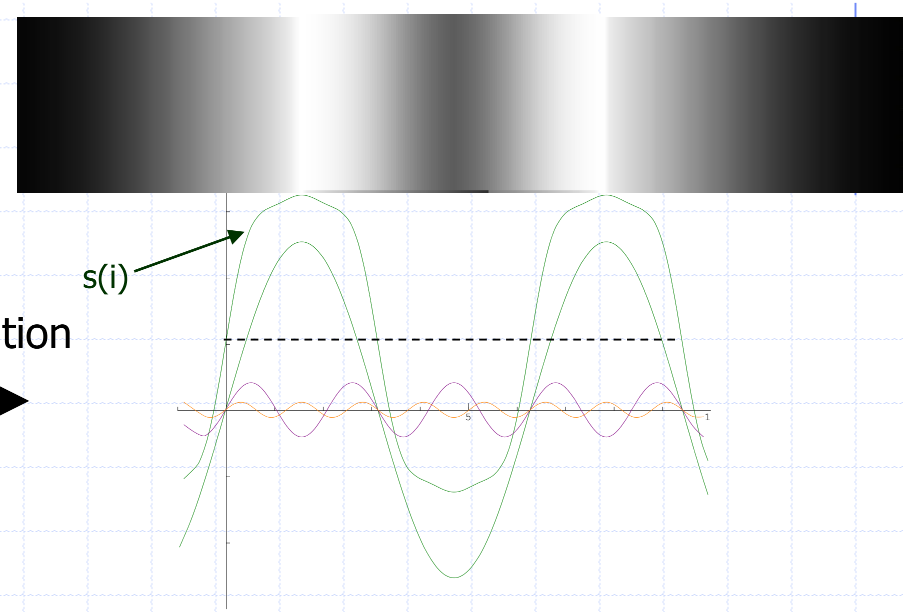



La TF d'une réponse impulsionnelle gaussienne σ est une gaussienne σ' avec σσ' = 1/(2π) soit LMH.LMH' = 4.ln2/π =0.9≈1

# Interprétation en fréquence

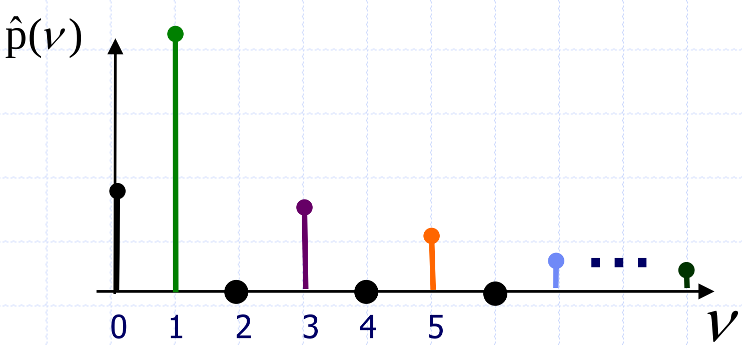



convolution

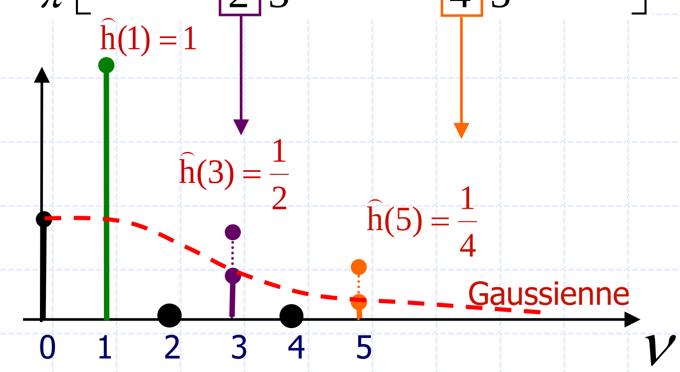



$$p(i) = 1 + \frac{8}{\pi}\left[\sin(i) + \frac{1}{3}\sin(3i) + \frac{1}{5}\sin(5i) + \ldots\right]$$

$$s(i) = 1 + \frac{8}{\pi}\left[\sin(i) + \boxed{\frac{1}{2}}.\frac{1}{3}\sin(3i) + \boxed{\frac{1}{4}}.\frac{1}{5}\sin(5i)\right]$$

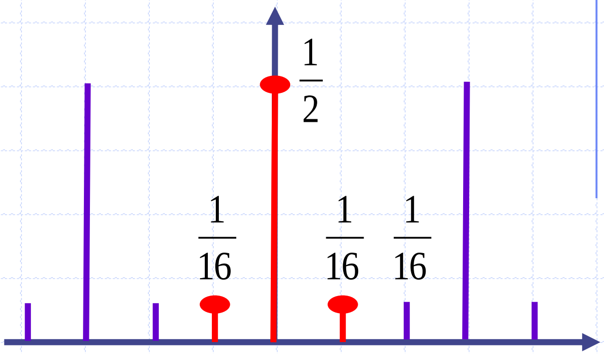



$$\hat{s}(\nu) = \hat{p}(\nu).\hat{h}(\nu)$$



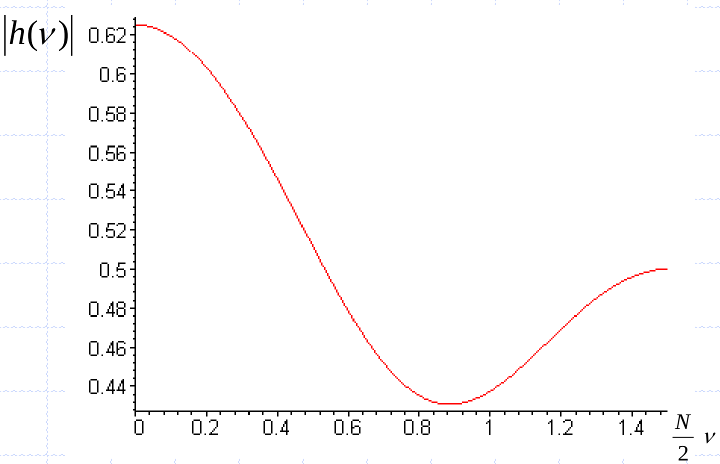
# Exemple de formation d'image

$$P(i,j)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&16&0&0\\0&16&16&16&0\\0&0&16&0&16\\0&0&0&16&16\end{pmatrix}\Rightarrow S(i,j)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&3&11&3&1\\1&11&12&12&2\\1&3&12&6&11\\0&1&2&11&10\end{pmatrix}$$



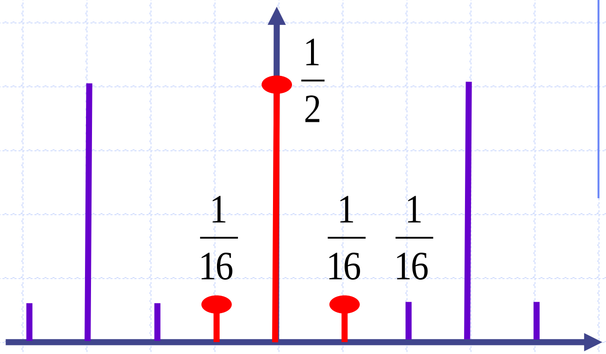

$$h(i)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{16}&\frac{1}{16}\end{pmatrix},\qquad T=N=3$$

$$|h(\nu)|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]\right)^2+\left(\frac{1}{16}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]\right)^2}$$



# Exemple de formation d'image

$$P(i,j)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&16&0&0\\0&16&16&16&0\\0&0&16&0&16\\0&0&0&16&16\end{pmatrix}\Rightarrow S(i,j)=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&3&11&3&1\\1&11&12&12&2\\1&3&12&6&11\\0&1&2&11&10\end{pmatrix}$$

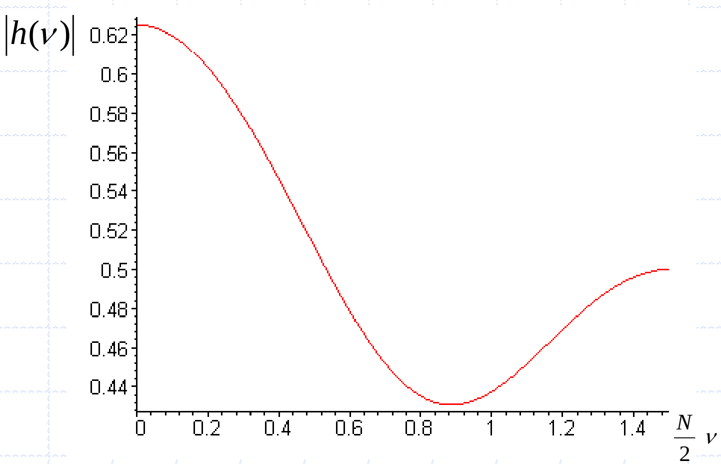



$$h(i)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{16}&\frac{1}{16}\end{pmatrix},\qquad T=N=3$$

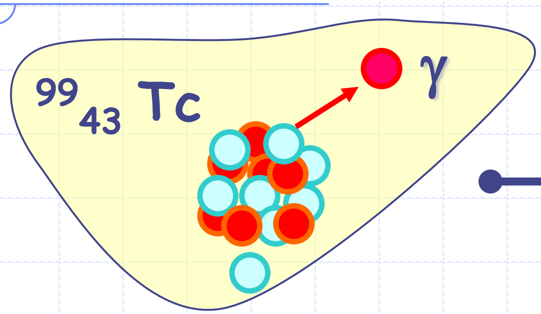
$$h(\nu)=\sum_{k=0}^{2}h(k).e^{-j.(\frac{2\pi}{T}\nu).k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)-j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)\right]+\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)-j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]$$

$$h(\nu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]-j\frac{1}{16}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]$$

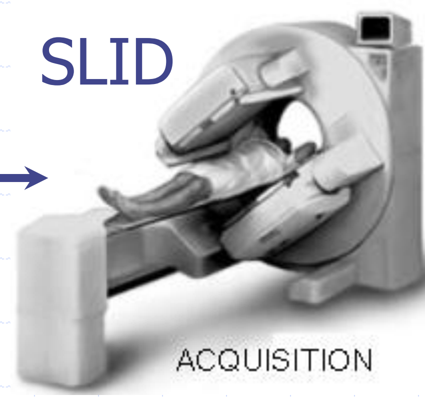
$$|h(\nu)|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]\right)^2+\left(\frac{1}{16}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}\nu\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\nu\right)\right]\right)^2}$$



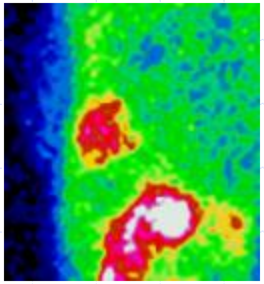
# Réponses impulsionnelle et en fréquence



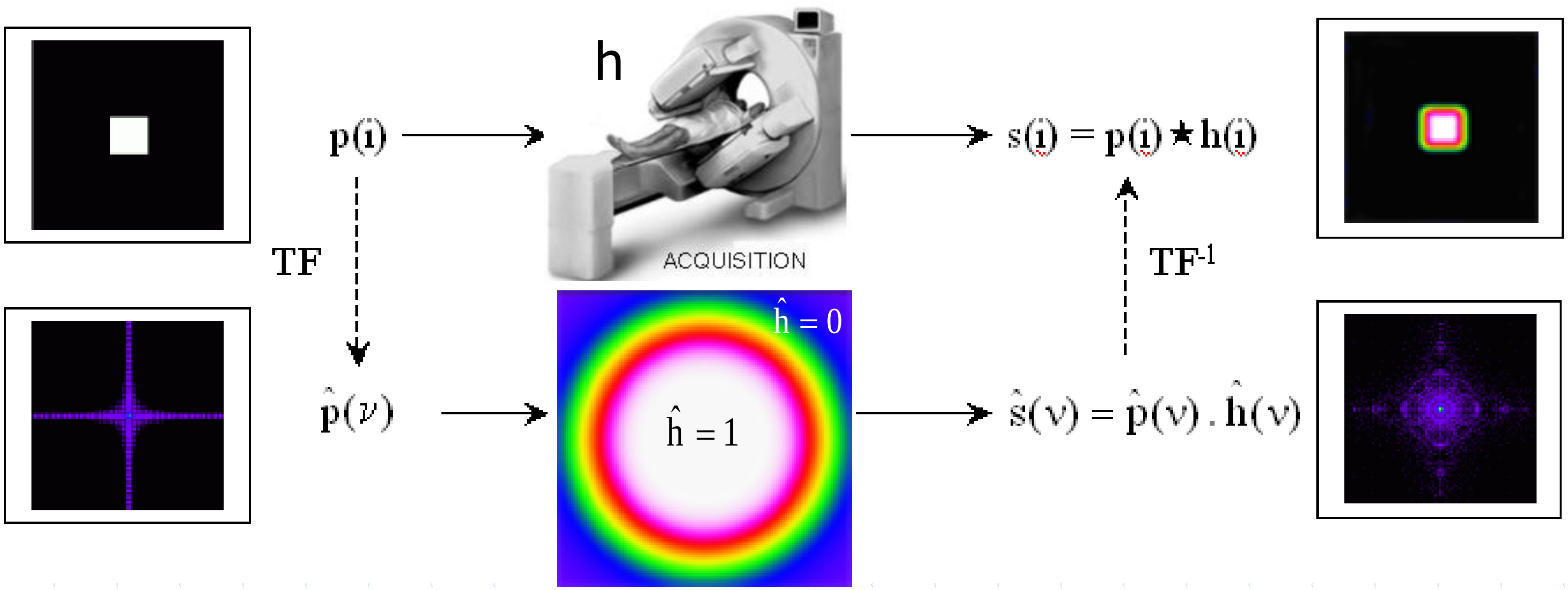

p(i)



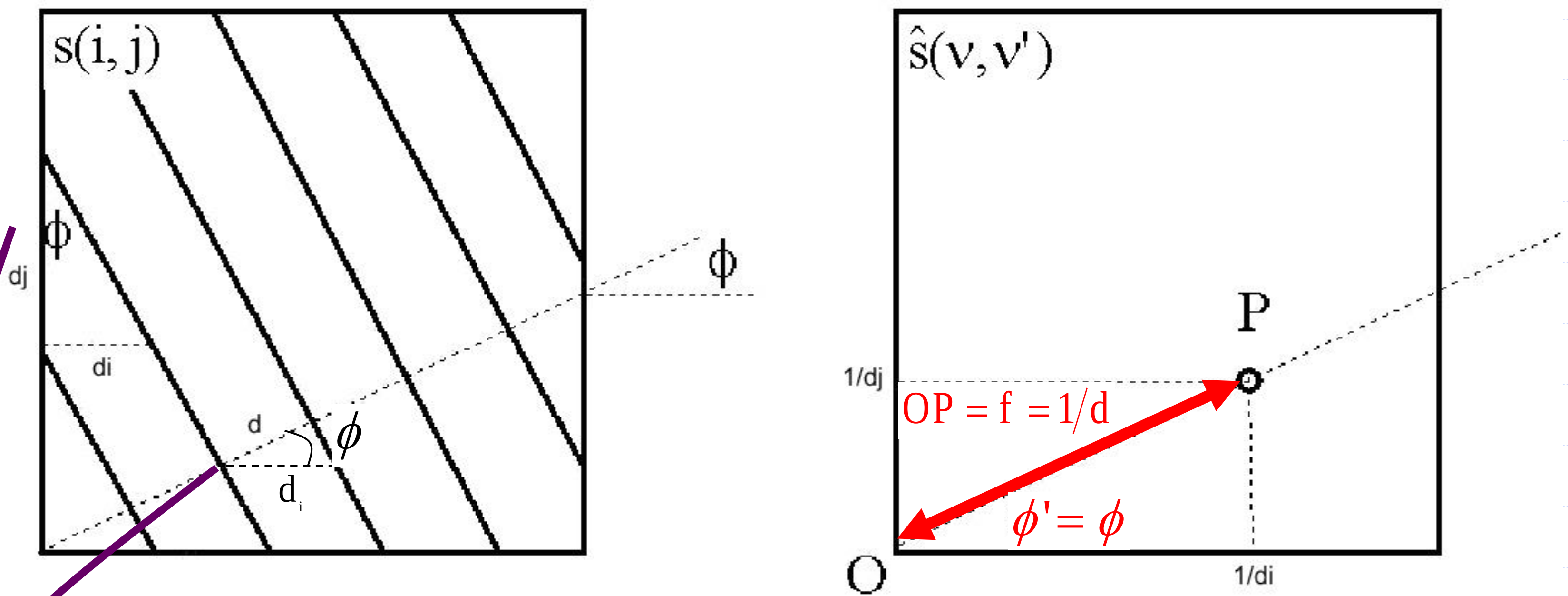

s(i)



$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = (p * h)(i)$$



# Interprétation d'une image en fréquence

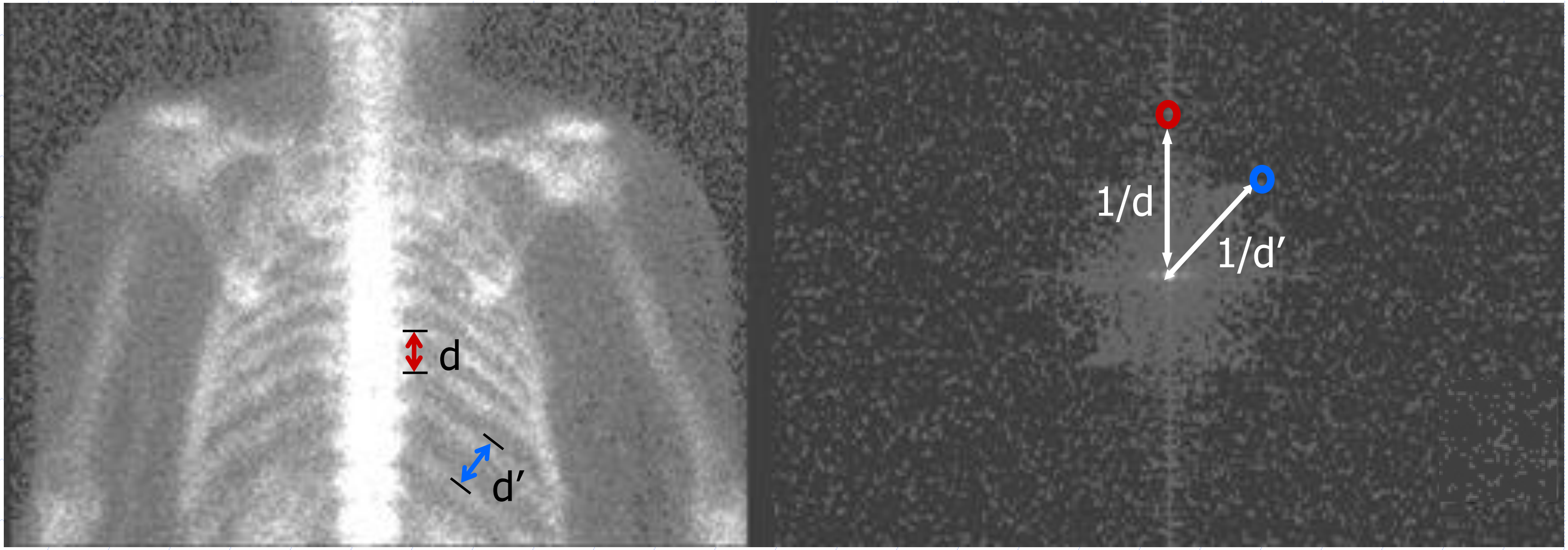



$$tg\phi = \frac{d_i}{d_j} \longrightarrow tg\phi' = \frac{1/d_j}{1/d_i} \Rightarrow \phi' = \phi$$

$$\cos\phi = \frac{d}{d_i} \longrightarrow \cos\phi = \frac{1/d_i}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{d}$$

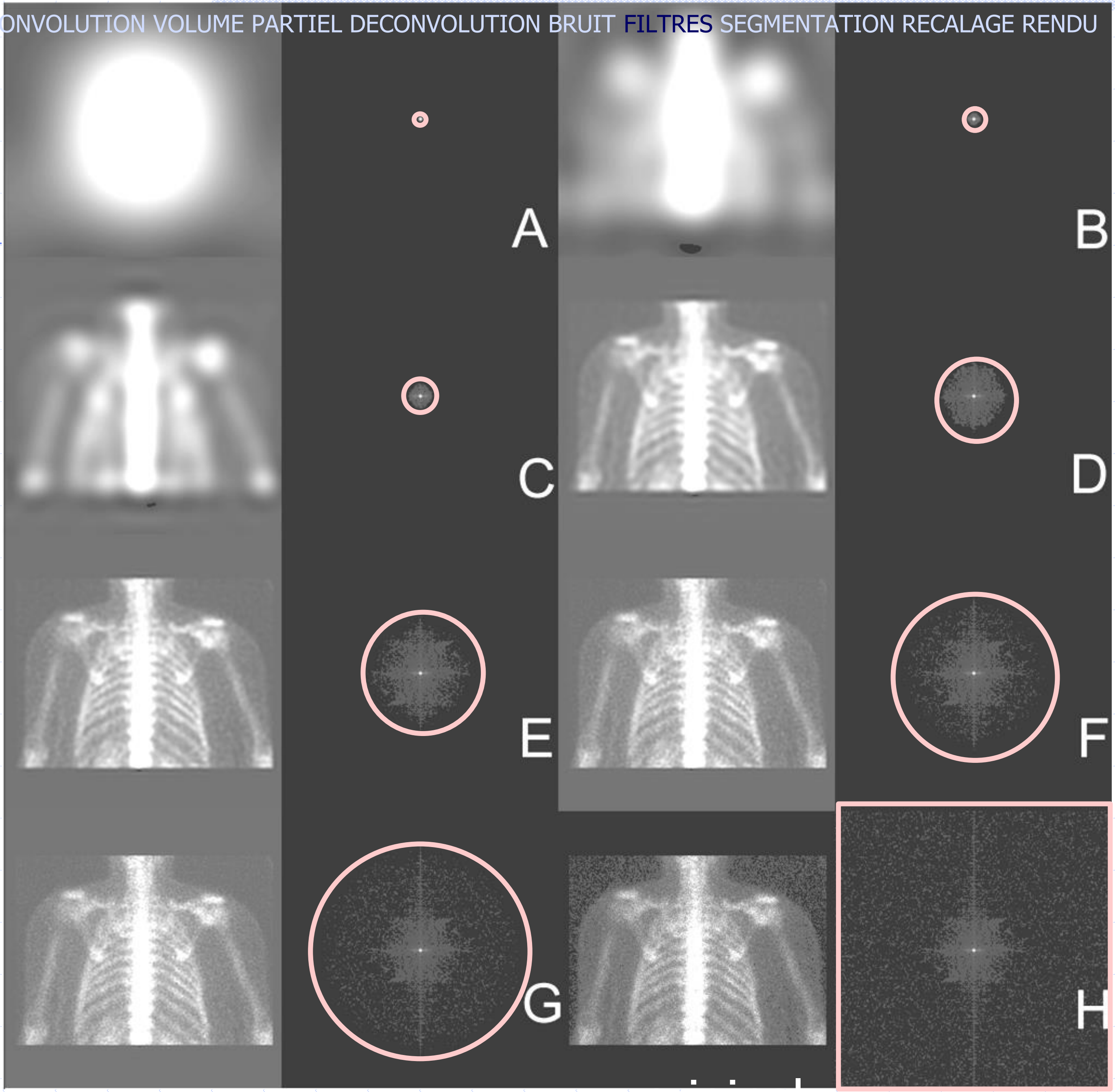
# donc en représentation en fréquence…

Les signaux constituées de droites parallèles espacées de d (arcs post. des côtes) sont représentées dans l'espace de Fourier par un seul point localisé sur la droite perpendiculaire aux signaux (axe vertical donc) et à la distance 1/d de l'origine




Arcs postérieurs des côtes

Arcs moyens des côtes à 45%




De A à H, l'image est reconstruite en prenant en compte de plus en plus de fréquences.

# FORMATION D'UNE IMAGE

- Convolution du signal acquis par la réponse impulsionnelle de la $\gamma$-caméra
  - Moyenne pondérée dans un voisinage du signal RA par les amplitudes de la réponse impulsionnelle (gaussienne)
  - Agit en lissant les contours des parties du signal RA acquis

|||

- Multiplication du spectre du signal acquis par la réponse en fréquence gaussienne de la $\gamma$-caméra
  - Amplification des amplitudes des composantes fréquentielles du signal par les amplitudes de la réponse en fréquence (gaussienne)
  - Agit en diminuant l'influence des HF

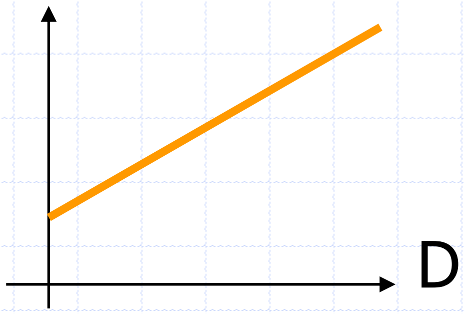
# Cq1: Résolution et distance

s = moyenne pondérée par h de la grandeur physique p

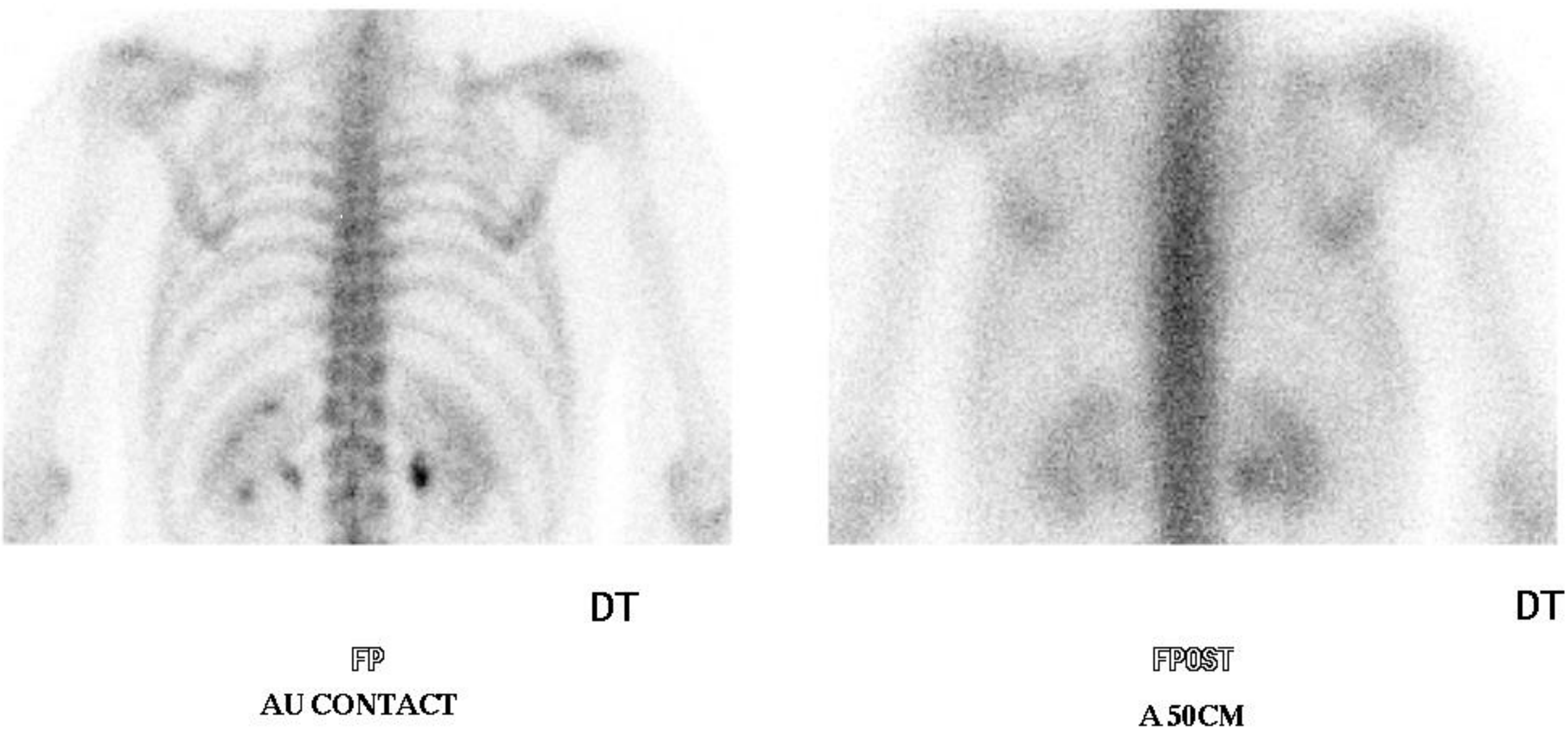
- plus le détecteur est proche du patient…
- plus la réponse impulsionnelle est  étroite
- …et plus l'image est fidèle à l'objet !

$$\sigma = k.\mathrm{D} + k'$$

- Sinon : lissage = flou !

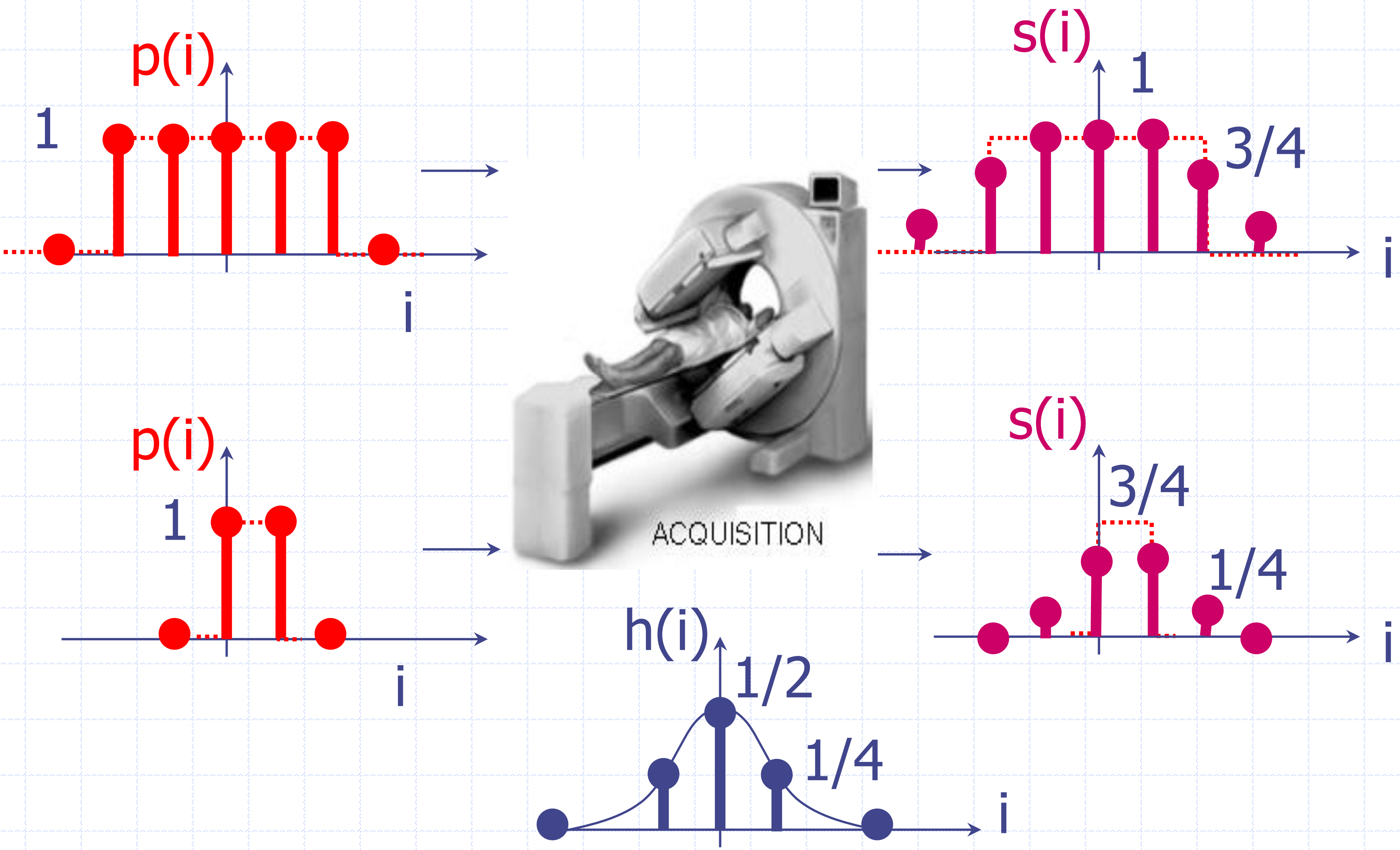


# Cq1: Résolution et distance



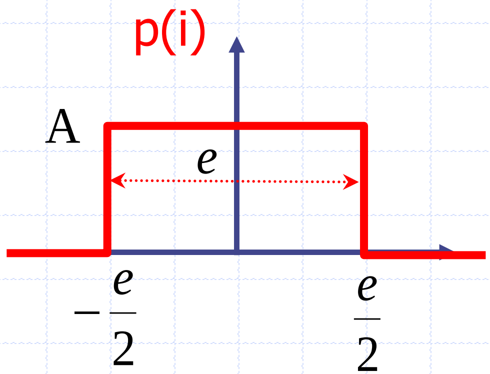
# Cq2: « Effet de volume partiel »

Approche intuitive, aspect qualitatif :

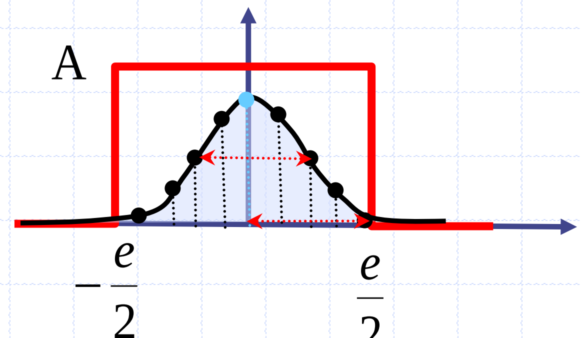


# Cq2: « Effet de volume partiel »

Approche intuitive, si e/2 > LMH :



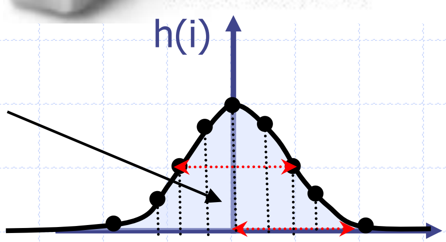





$$s(i=0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(0-k)=A.\sum_{k=-e/2}^{+e/2} h(k)\approx A$$

Le centre de l'image est transmis

$$\text{Surface}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)=\frac{C}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2.i^2}=1$$

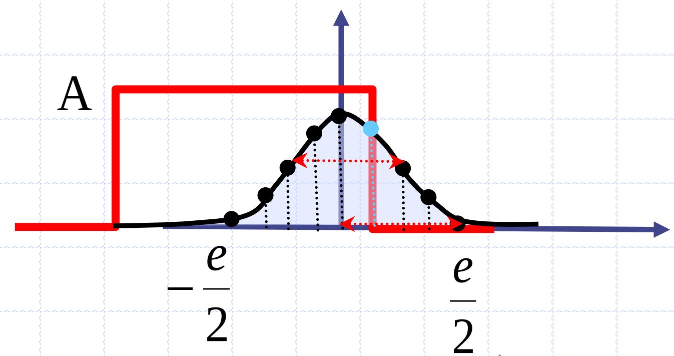



98% de l'intégrale d'une gaussienne se trouve entre ± LMH :

$$\sum_{k=-LMH}^{LMH} h(k)\approx 1$$

$$h(i)=\frac{C}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2.i^2}$$

$$C=\frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

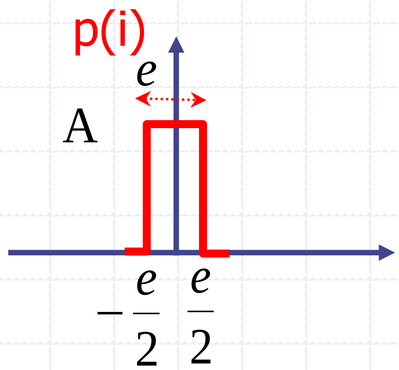



$$s(i)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k)=A.\sum_{k=-e/2}^{1} h(k)<A$$

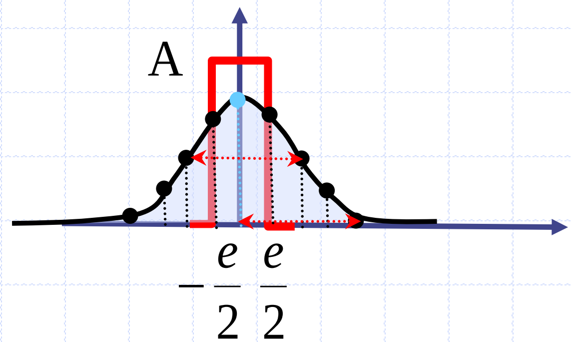
Les bords de l'image sont sous-estimés

# Cq2: « Effet de volume partiel »

Approche intuitive, si e/2 < LMH :







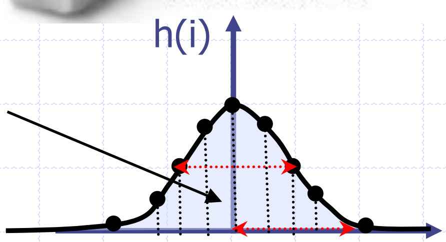

$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(0-k) = A.\sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k) < A$$

Le centre de l'image est sous-estimé par un facteur CR :

$$CR = \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k)$$

$$CR < 1 \text{ si } \frac{e}{2} < LMH$$

$$\text{Surface} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2.i^2} = 1$$

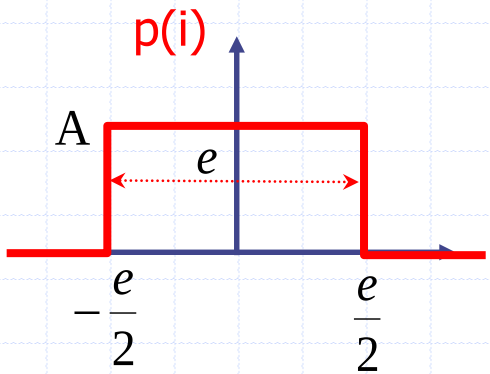



$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2.i^2}$$

$$C = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

# Cq2: « Effet de volume partiel »

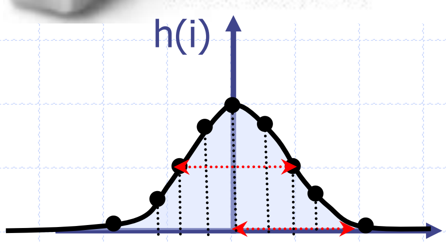
Généralisation :





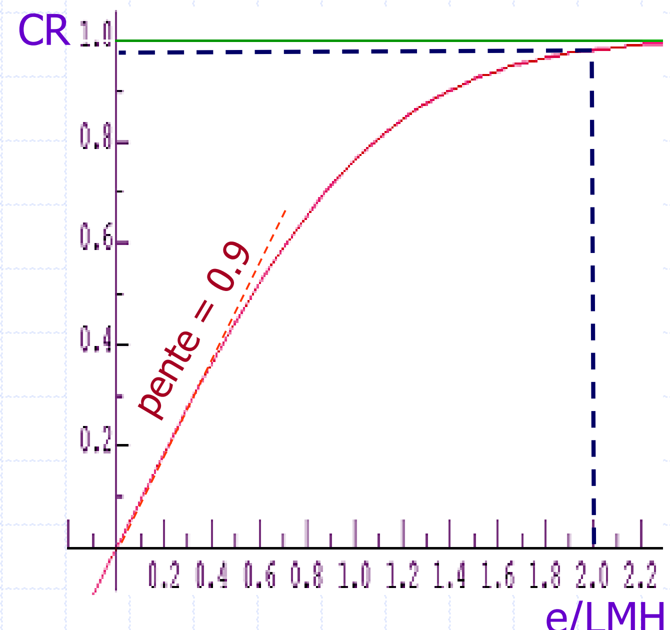
$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 . i^2}$$

$$C = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$



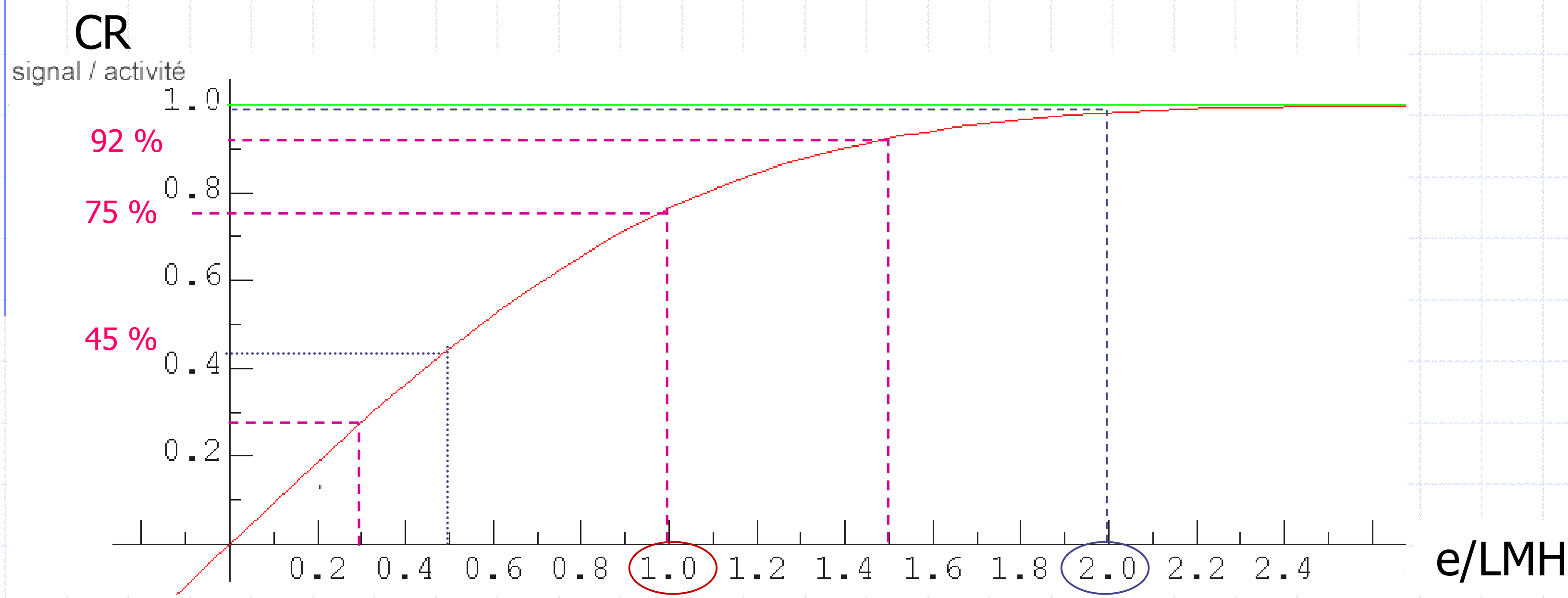

s(0) est le produit du signal A par un Coef-ficient de Restauration CR:

$$CR(e) = \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k)$$

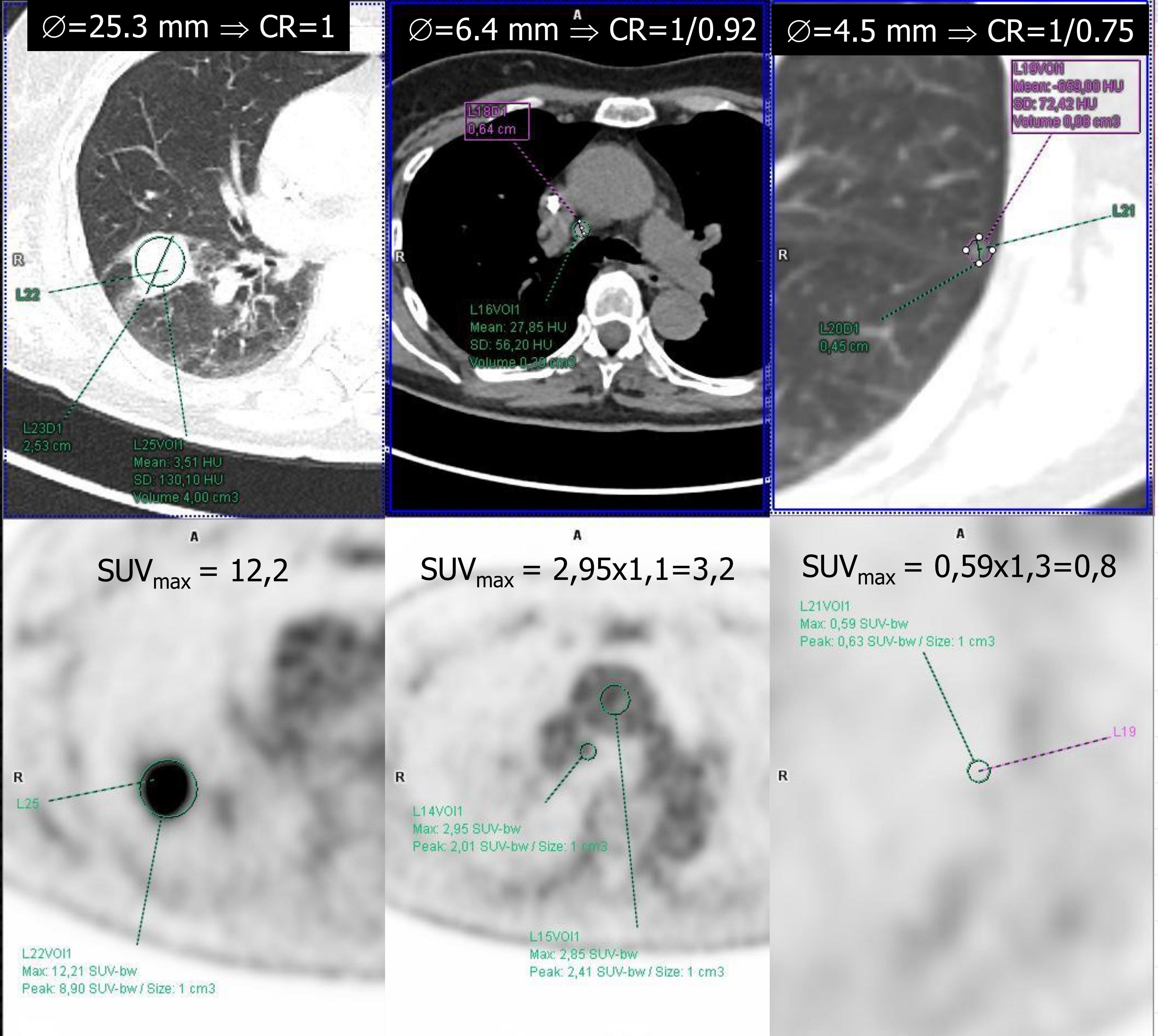



JR Galt et al. «Effects of myocardial wall thichness on SPECT quantification». IEEE TMI 1990;9

# Cq3: Coefficient de Recouvrement




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| TEP | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | (mm) |
| CZT | | 3 | 6 | 9 | 12 | (mm) |
| SPECT Anger | | 7 | 15 | 22 | 30 | (mm) |
| | | | | | | |
| Vraie fixation | | 2,2 | 1,3 | 1,1 | 1 | (x signal) |


∅=25.3 mm ⇒ CR=1
∅=6.4 mm ⇒ CR=1/0.92
∅=4.5 mm ⇒ CR=1/0.75
L22
L23D1
2,53 cm
L25VOI1
Mean: 3,51 HU
SD: 130,10 HU
Volume 4,00 cm3
L18D1
0,64 cm
L16VOI1
Mean: 27,85 HU
SD: 56,20 HU
L19VOI1
Mean: -669,00 HU
SD: 72,42 HU
Volume 0,08 cm3
L21
L20D1
0,45 cm
SUVmax = 12,2
SUVmax = 2,95x1,1=3,2
SUVmax = 0,59x1,3=0,8
L25
L22VOI1
Max: 12,21 SUV-bw
Peak: 8,90 SUV-bw / Size: 1 cm3
L14VOI1
Max: 2,95 SUV-bw
Peak: 2,01 SUV-bw / Size: 1 cm3
L15VOI1
Max: 2,85 SUV-bw
Peak: 2,41 SUV-bw / Size: 1 cm3
L21VOI1
Max: 0,59 SUV-bw
Peak: 0,63 SUV-bw / Size: 1 cm3
L19

# Cq2: « Effet de volume partiel »

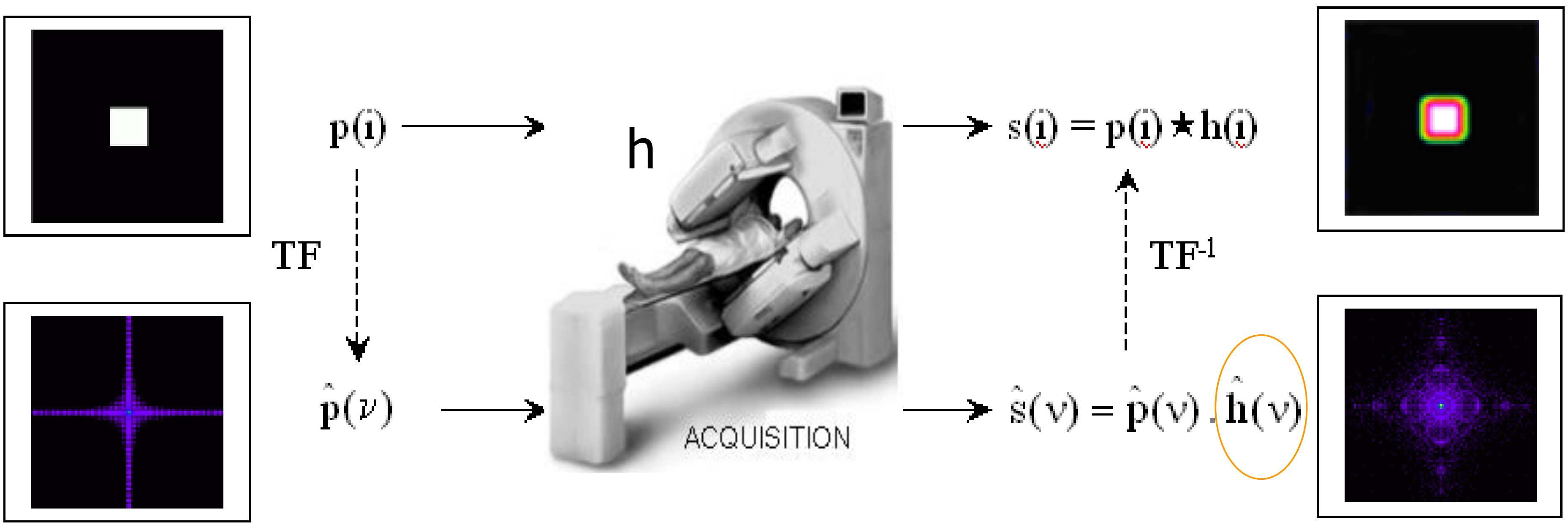
- Activité sous-estimée si e < 2.LMH
  - 75 % de l'activité est mesurée si e = LMH
  - Approximation linéaire possible si e < LMH
  - Rappel : LMH ≈ 4-6 mm en PET-CZT et 15 mm en SPECT
- Rien à voir avec le théorème d'échantillonnage !
  - échantillonnage sans perte ⇒ dimension du pixel d ≤ LMH/2
- Artefact exploitable
  - mouvements <résolution (cf. épaississement systolique)
- Pour limiter cet artefact : déconvolution

# Cq3: Déconvolution, pour…

- corriger l'EVP en améliorerant la résolution
  - Via un coef. de restauration = activité mesurée/vraie
    - Niveau pixel(s) ou ROI(s), dans les coupes ou les projections
  - Par déconvolution (filtres de Metz, Wiener)
    - en 2D ou après reconstruction, <u>sous hypothèse d'invariance</u>
    - En 3D, dans l'espace des projections, <u>en prenant en compte la distance au collimateur</u> (principe fréquence-distance)
  - Par modélisation de la PSF dans l'opérateur de Radon (projection/rétroprojection)
- corriger les artefacts de dilution & recirculation d'un bolus

# Cq3: Déconvolution (planaire)

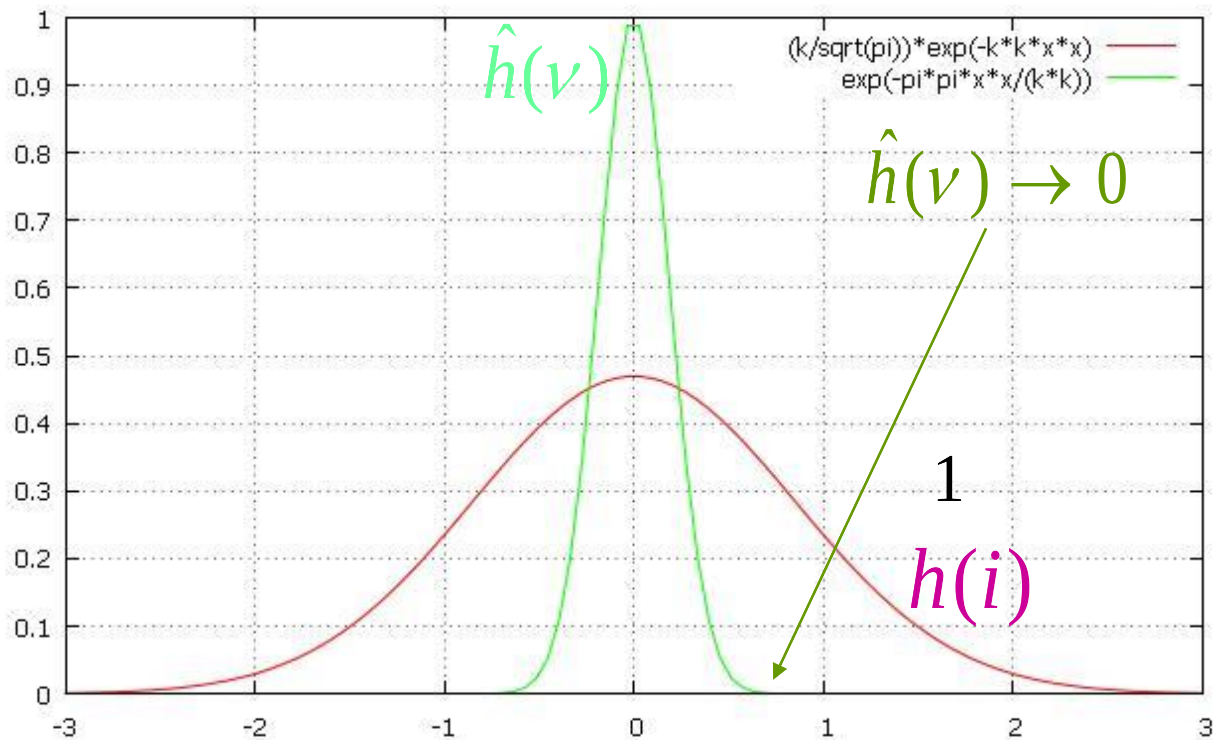
Dans une image de projection, la distance entre la source et le détecteur où se forme l'image est inconnue. On néglige donc la dépendance en D de la réponse impulsionnelle.

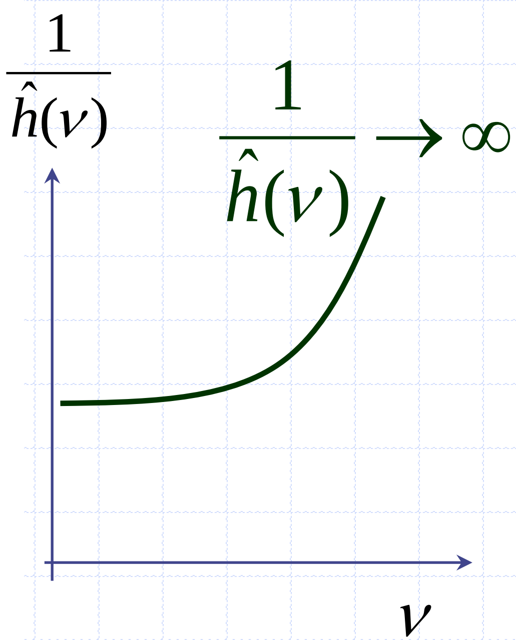


# TF d'une gaussienne

$$\boxed{h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-(k.i)^2} \Leftrightarrow \hat{h}(\nu) = e^{-\pi^2 \left(\frac{\nu}{k}\right)^2}}$$

$$k = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

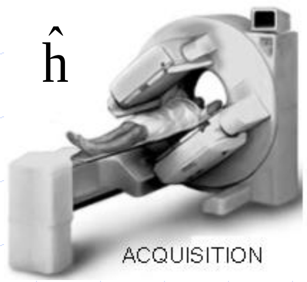


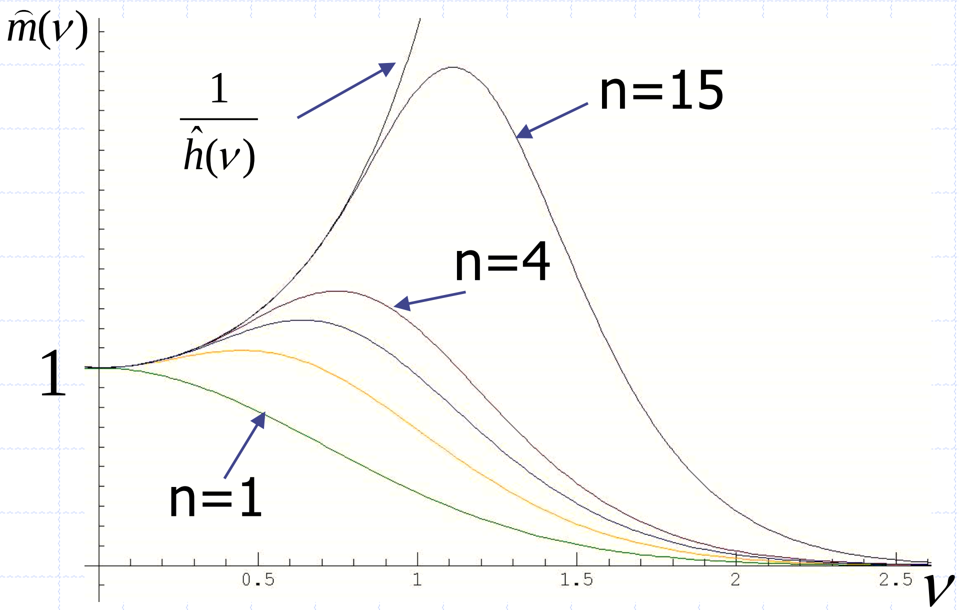

Réponse impulsionnelle supposée invariante

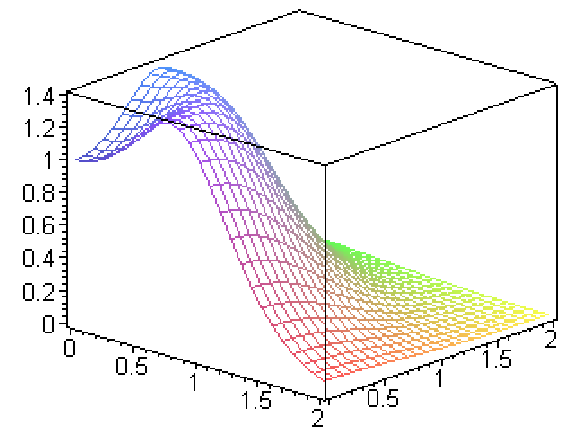
# Filtre de déconvolution de Metz

$\hat{p}$ ⟶ $\hat{h}$




⟶ $\hat{s} = \hat{h} \cdot \hat{p}$ ⟶ $\boxed{\dfrac{1}{\hat{h}}}$ ⟶ $\hat{p}$



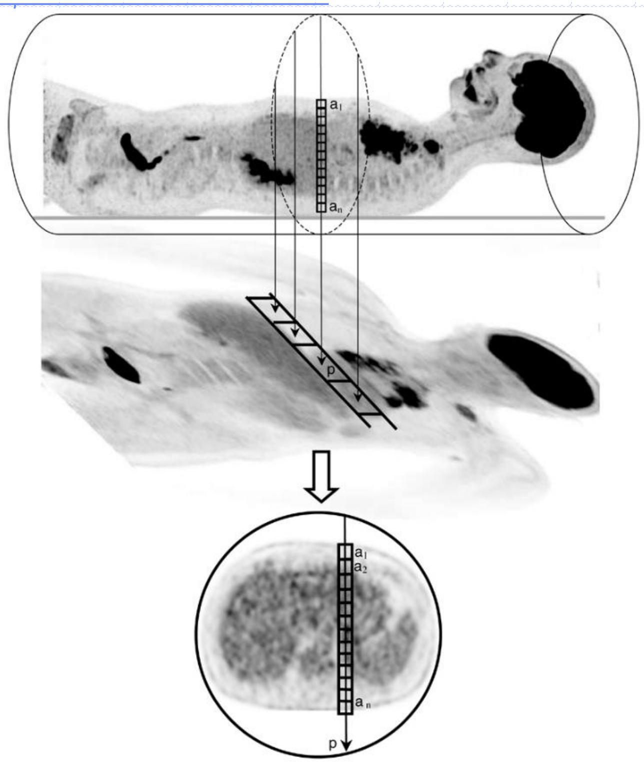

$$\hat{m}(\nu,\nu') = \frac{1-\left[1-\hat{h}(\nu,\nu')^2\right]^n}{\hat{h}(\nu,\nu')}$$

$$n = 0{,}834.\ln(C) - 7.774$$

Pb : $\hat{h}$ dépend de la d(source, collimateur)

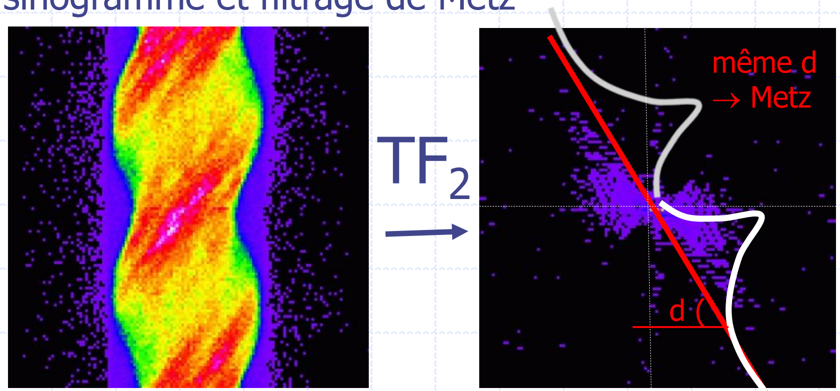
King et al. JNM 1983;24 et Metz et al. JNM 73;15

# Déconvolution en TEMP et TEP




2 techniques de déconvolution en TE :

- Le principe fréquence-distance :
  - Identification de la distance de la source sur la TF du sinogramme et filtrage de Metz

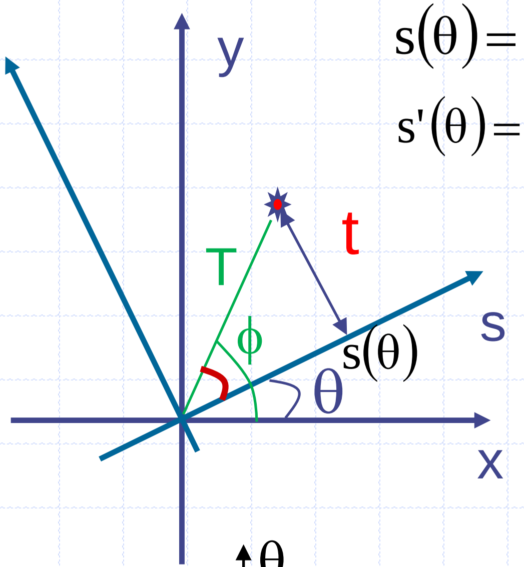



- La modélisation de la réponse impulsionnelle du tomographe dans les opérateurs de retro/projection. C'est la technique la plus utilisée de nos jours.

W Xia IEEE TMI 1995;14 - Hawkins. IEEE TMI 1988;7 - Lewitt Proc SPIE 1989; 1092 - Glick IEEE TMI 1994;13 - Kohli Phys Med Biol 1998;43.

M

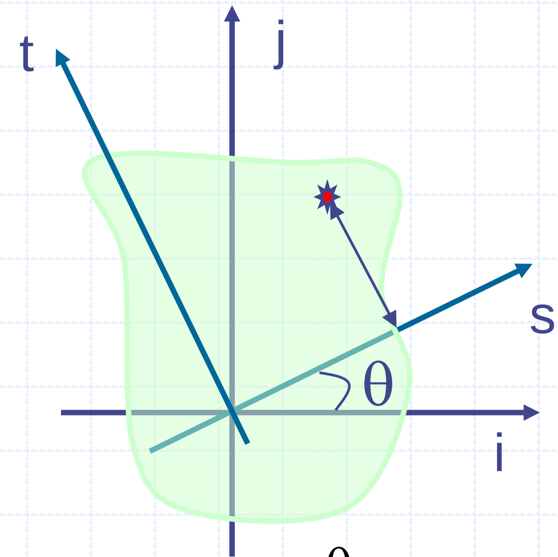
# Relation fréquence-distance

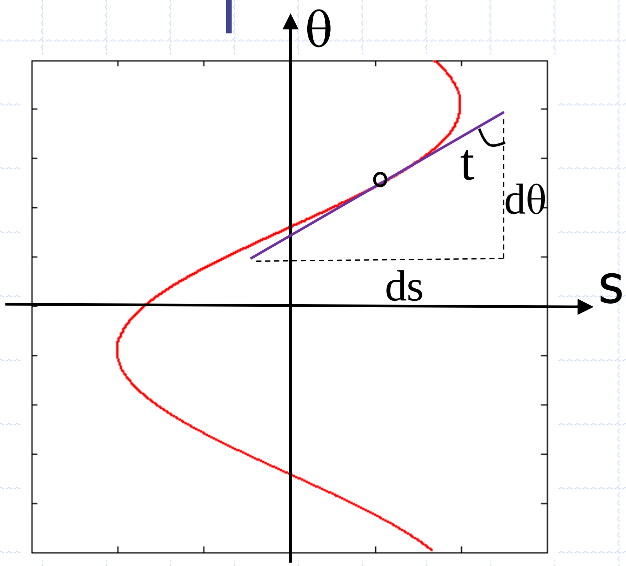


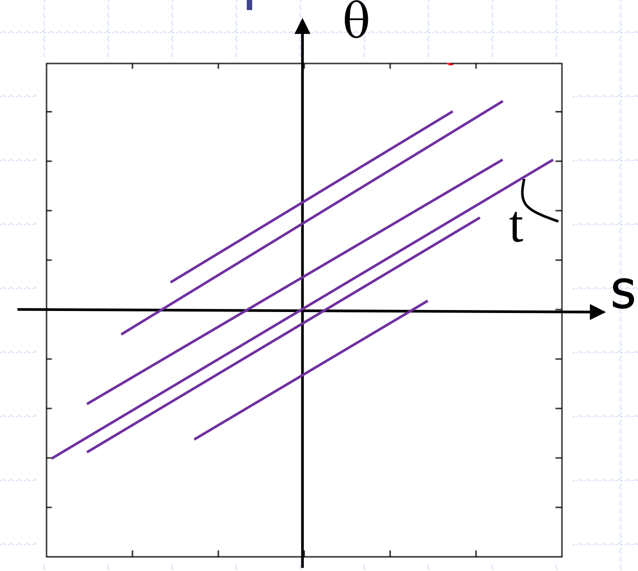

$$s(\theta) = T.\cos(\varphi - \theta)$$

$$s'(\theta) = \frac{ds}{d\theta} = T.\sin(\varphi - \theta) = t$$

$$\boxed{\frac{ds}{d\theta} = t}$$

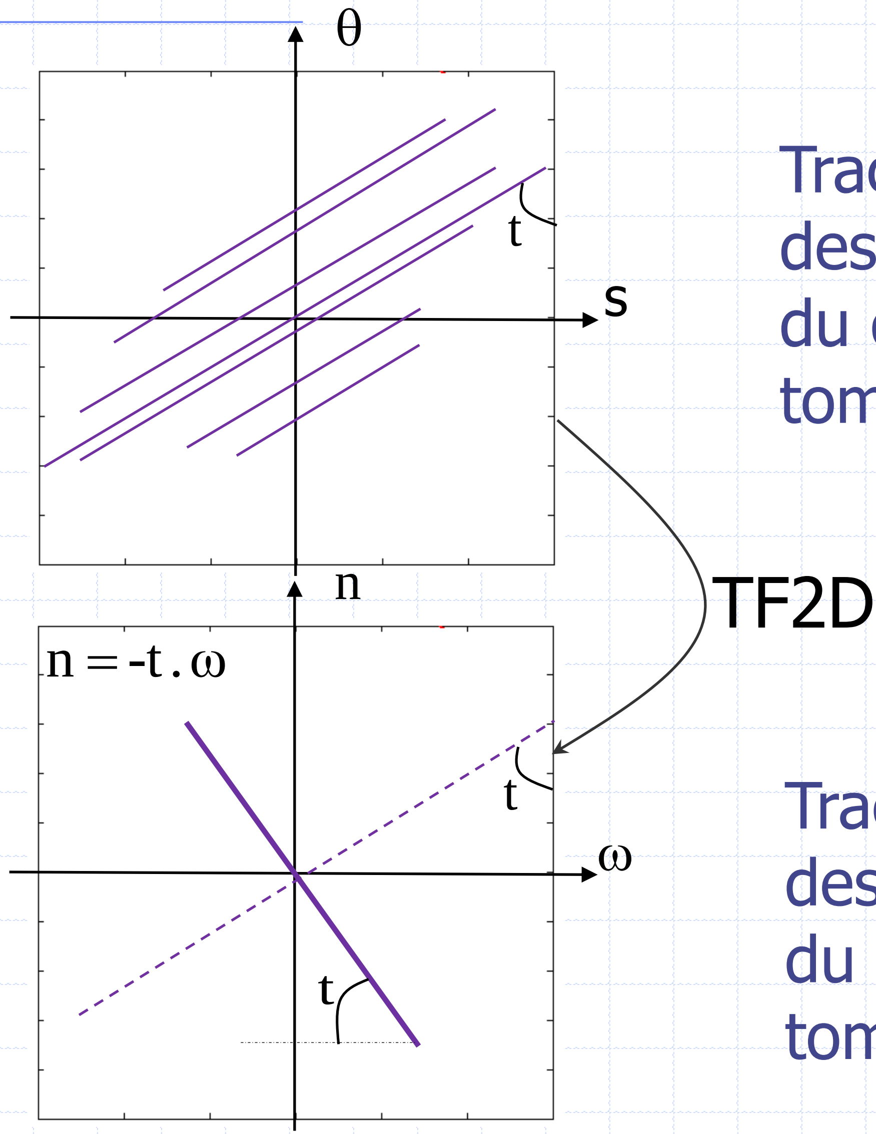


M

# Relation fréquence-distance

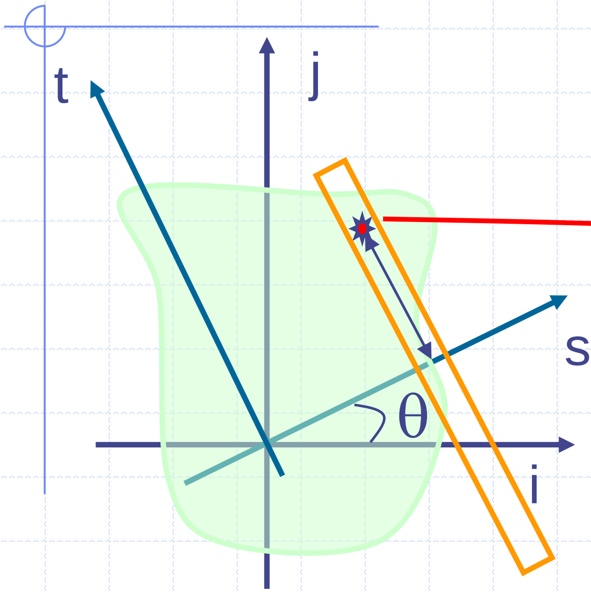


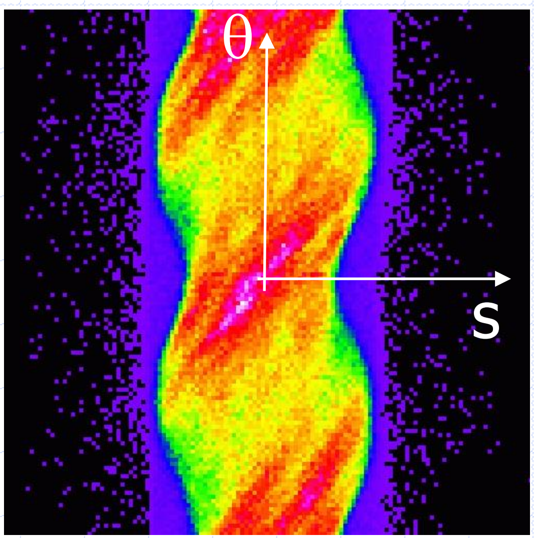

Traces dans le sinogramme
des points situés à t mm
du détecteur lors de l'acquisition
tomographique

Traces dans la TF du sinogramme
des points situés à t mm
du détecteur lors de l'acquisition
tomographique

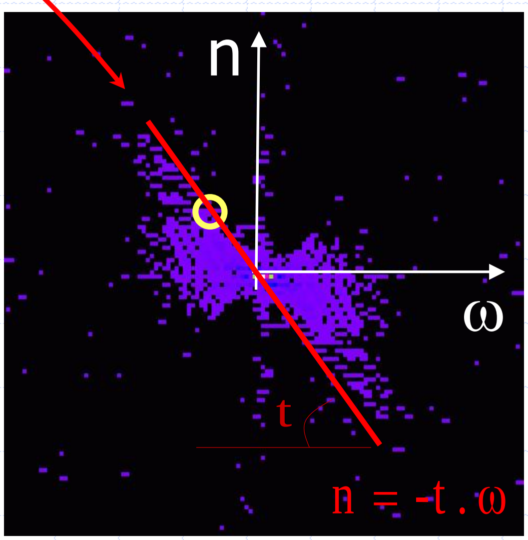
M

# Relation fréquence-distance




$\xrightarrow{TF_2}$




sources à t mm
de l'axe s

⇩

signal ≈ sur la droite
de pente -t dans la
TF2 du sinogramme

$$p_c(s,\theta) = \int f(i,\ j).dt$$

$$\hat{p}_c(\omega, n)$$

M

# Déconvolution en TEMP par RFD

$\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{t}}$

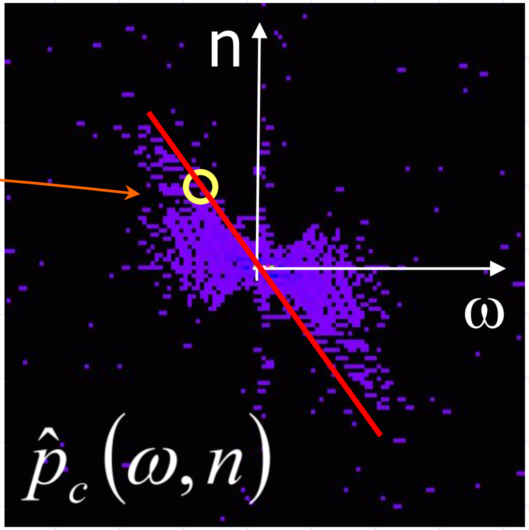
$\hat{\mathrm{p}}$ →


→ $\hat{\mathrm{p}}_c = \hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{t}}\,.\,\hat{\mathrm{p}}$ → $\boxed{\dfrac{1}{\hat{\mathrm{h}}_{\mathrm{t}}}}$ → $\hat{\mathrm{p}}$

$$h_t(i) = \frac{2.\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}}{LMH_t}\exp\left(-\frac{4.\ln 2}{LMH_t^2}\, i^2\right)$$

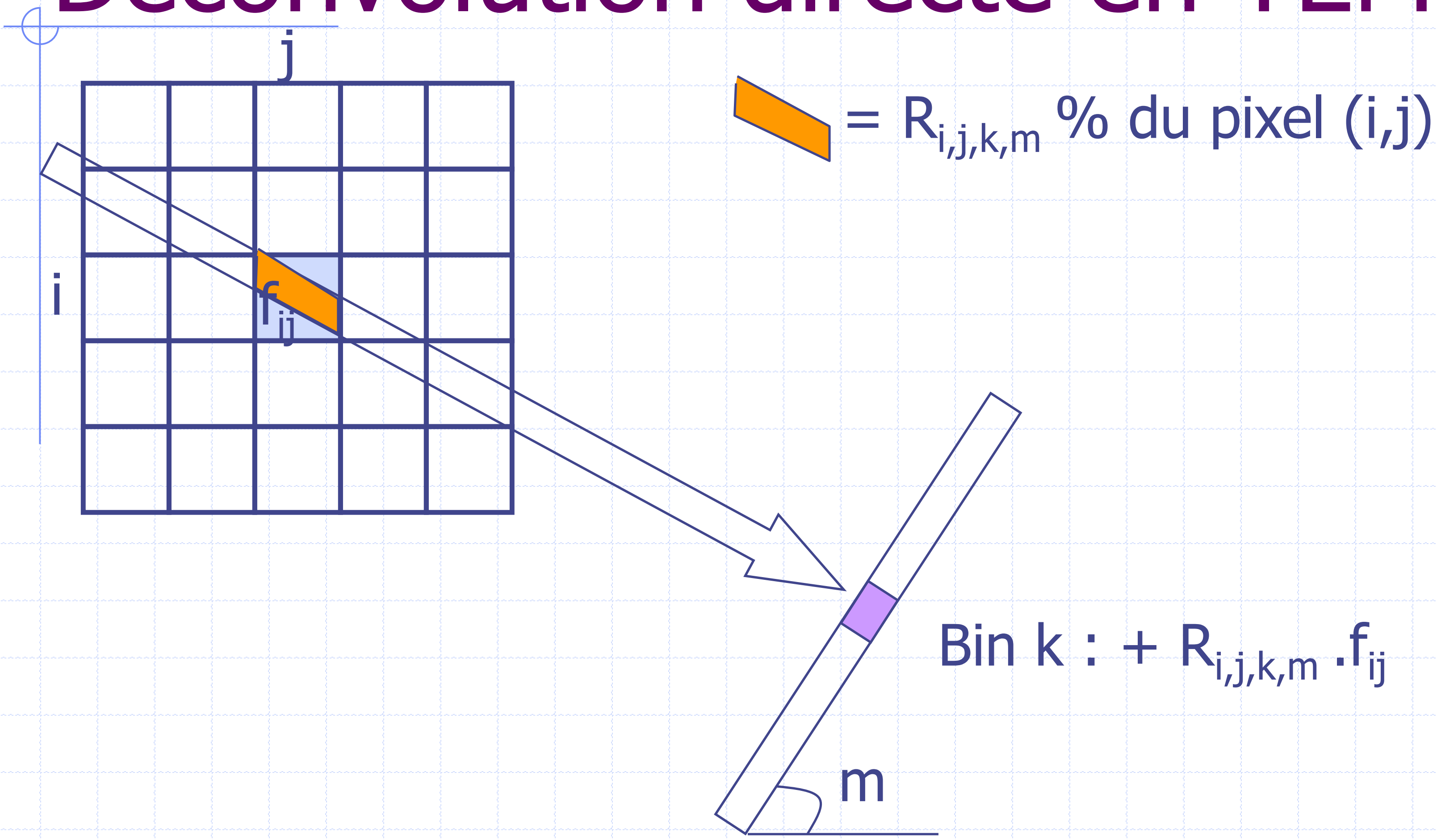
$$\hat{p}_c(\omega,n) = \hat{h}_{t=-\frac{n}{\omega}}(\omega).\hat{p}(\omega,n)$$

$$\boxed{\hat{p}(\omega,n) = \frac{1}{\hat{h}_{t=-\frac{n}{\omega}}(\omega)}.\hat{p}_c(\omega,n)}$$

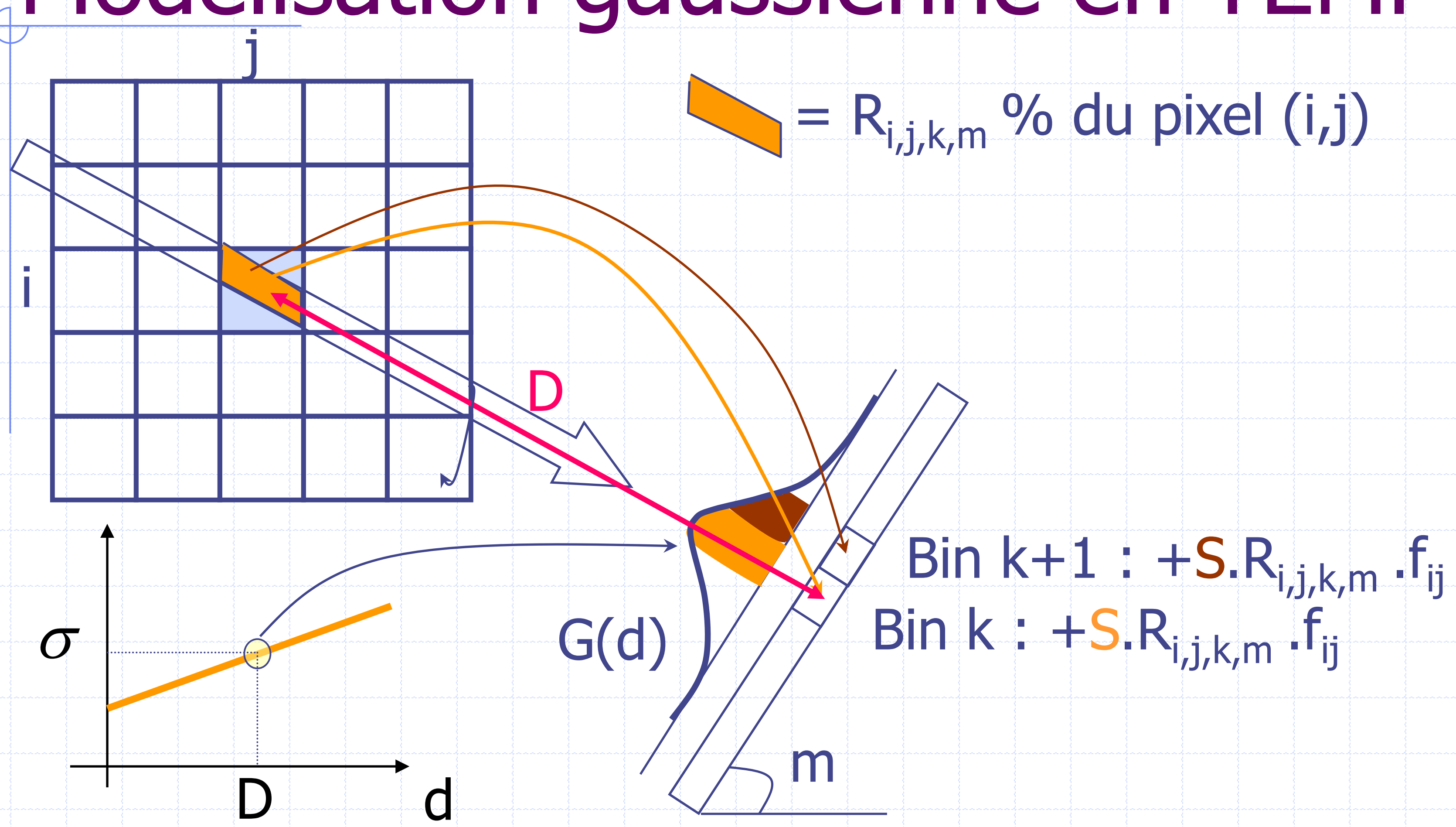



W Xia et al, IEEE TMI 1995;14-Hawkins et al. IEEE TMI 1988;7-Lewitt et al. Proc SPIE 1989; 1092-Glick et al. IEEE TMI 1994;13.

# Déconvolution directe en TEMP

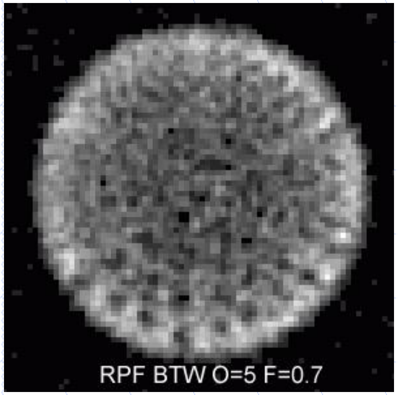


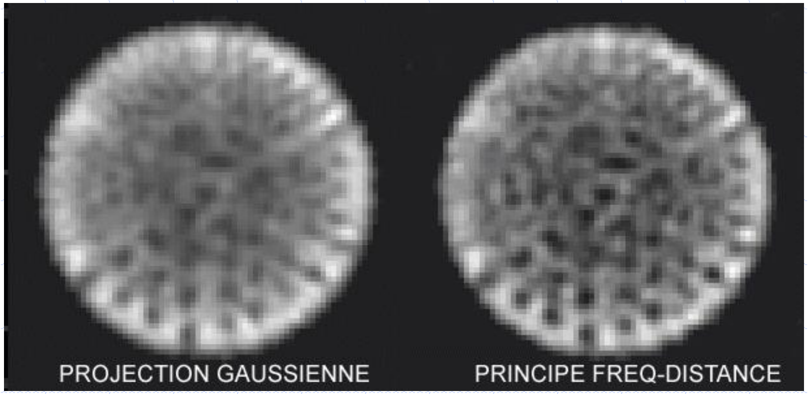
# Modélisation gaussienne en TEMP

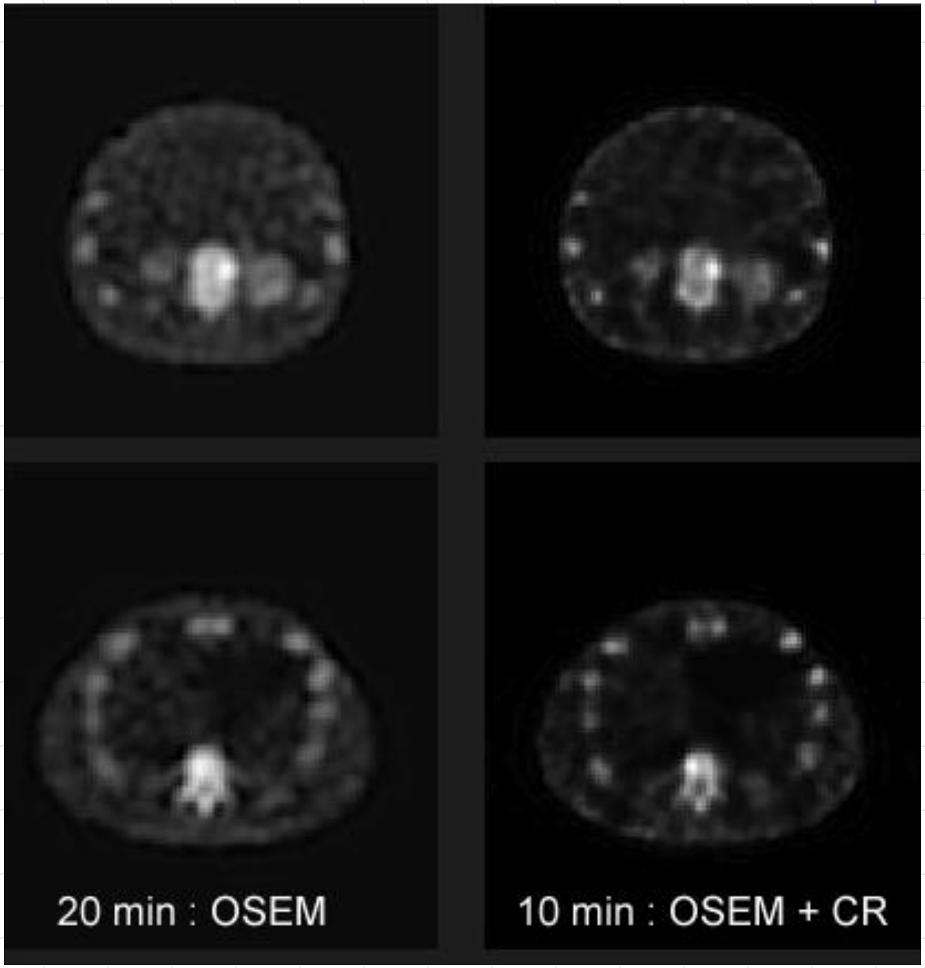



Tsui et Floyd, IEEE Trans Nucl Sci 1988;35 – A Formiconi, Phys Med Biol 1989;34 – Penney, IEEE TNS 1990;37 - McCarthy, IEEE TMI 1991;10 – Zeng, IEEE TNS 1991;38-1992;39 – Bechman, IEEE TNS 1993; 40

# Exemple de déconvolution




Kohli Phys Med Biol 1998;43.

Applications cliniques: TEP, restore®, evolution for bone®…

# Généralisation de la méthode

La modélisation de la réponse impulsionnelle est valable pour tous les algorithmes de reconstruction tomographique utilisant des fonctions de projection et de rétroprojection, c'est-à-dire pour:

- les méthodes itératives (ART, MLEM, OSEM, GC…)
- mais aussi la rétroprojection filtrée

(seule l'inversion directe par la formule de Radon ne peut pas en bénéficier)

En revanche, l'inversion de la transformée de Radon (directe ou par rétroprojection filtrée) se plie mal à une correction des artefacts d'atténuation, ce qui explique, avec leur validité en cas de projections tronquées, le développement d'OSEM en SPECT et PET.

# CONVOLUTION

- Image = convolution de la distribution de radioactivité par la réponse impulsionnelle
  - = moyenne pondérée d'une activité par les activités voisines
  - = atténuation (par x) des fréquence spatiales les plus hautes
- Effet de volume partiel =
  - sous estimation de l'activité si dimension anatomique < 2.LMH
  - Environ –25% si e=LMH; environ –55% si e=LMH/2.
- Déconvolution
  - En / par la réponse en fréquence puis filtre passe-bas (Metz)
  - En / par la réponse en fréquence dans la TF2 du sinogramme
  - En modélisant la projection gaussienne dans le projecteur

# ② BRUIT & FILTRAGES

Statistique de Poisson

Rapport signal sur bruit

Filtrages Linéaires

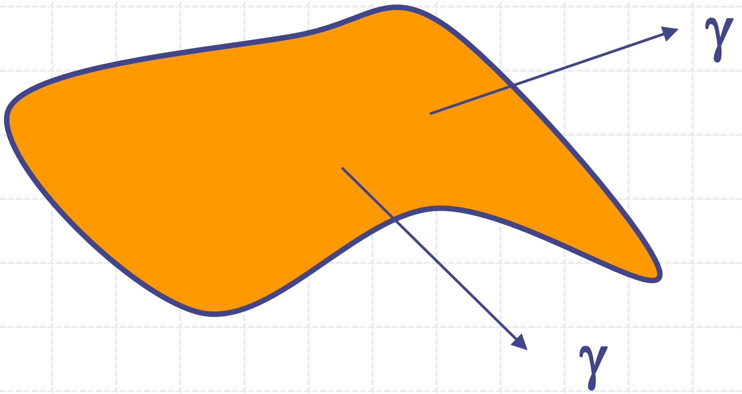
Filtrages non linéaires

# Désintégration radioactive

- **N** = Nombre de noyaux radioactifs
- $\lambda$ = proba. qu'un isotope se désintègre/sec
- $\lambda$ =(-dN/N)/dt

donc en moyenne $\overline{C} = N.\lambda.\Delta t$ désintégrations en $\Delta t$

- **$P(C_{\Delta t}=n)$** : probabilité de mesurer n désintégrations dans un intervalle de temps $\Delta t$



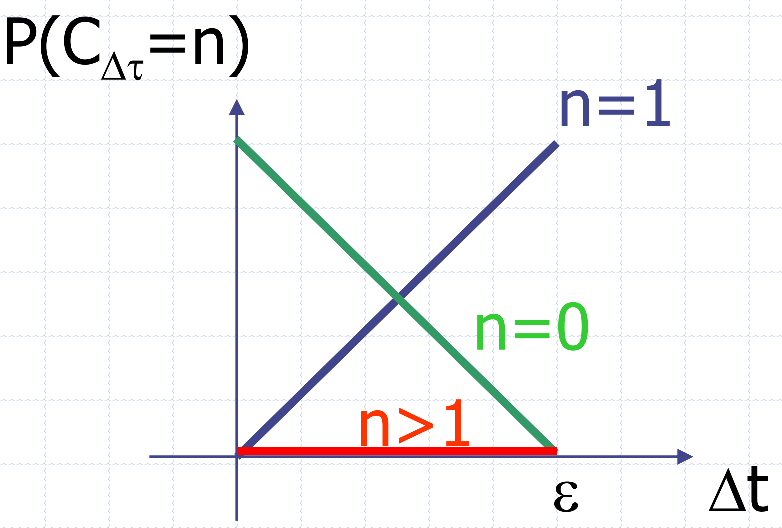

$\xrightarrow{\Delta t}$ n photons $\gamma$

# Désintégration radioactive

- **Sans mémoire** (désintégrations indépendantes)
  - les désintégrations qui ont eu lieu avant l'instant t n'influent pas sur celles qui auront lieu après l'instant t.

- **Stationnaire** la probabilité d'une désintégration entre t et t+h ne dépend que de h (et pas de t)

- **Rare** : Si $\Delta t \rightarrow 0$, alors
  - $P(C_{\Delta t} = 1) \rightarrow \lambda N.\Delta t$
  - $P(C_{\Delta t} = 0) \rightarrow 1-\lambda N.\Delta t$
  - $P(C_{\Delta t} > 1) \rightarrow 0$



# Statistique de Poisson (2)

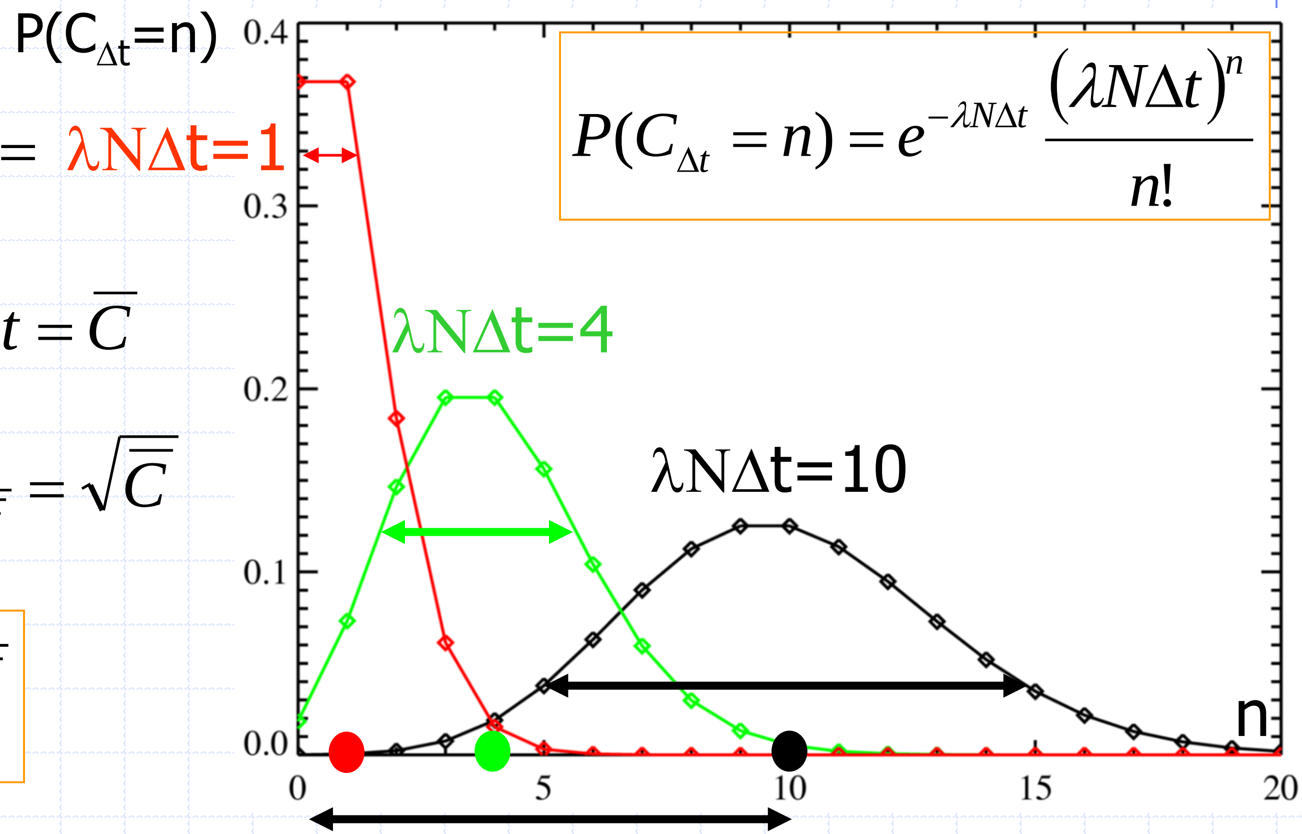
*Phénomène rare,*
*sans mémoire*
*et stationnaire*

$\Updownarrow$ Radioactivité = Processus **POISSONNIEN**

$$P(C_{\Delta t} = n) = e^{-\lambda N \Delta t} \frac{(\lambda N \Delta t)^n}{n!}$$

http://pbil.univ-lyon1.fr/R/pdf/AvnerDea_mer.pdf, pages 16 à 22
cg.ensmp.fr/bibliotheque/1965/MATHERON/Cours/DOC_00287/MATHERON_Cours_00287.pdf, pages 18-22

# Statistique de Poisson (3)



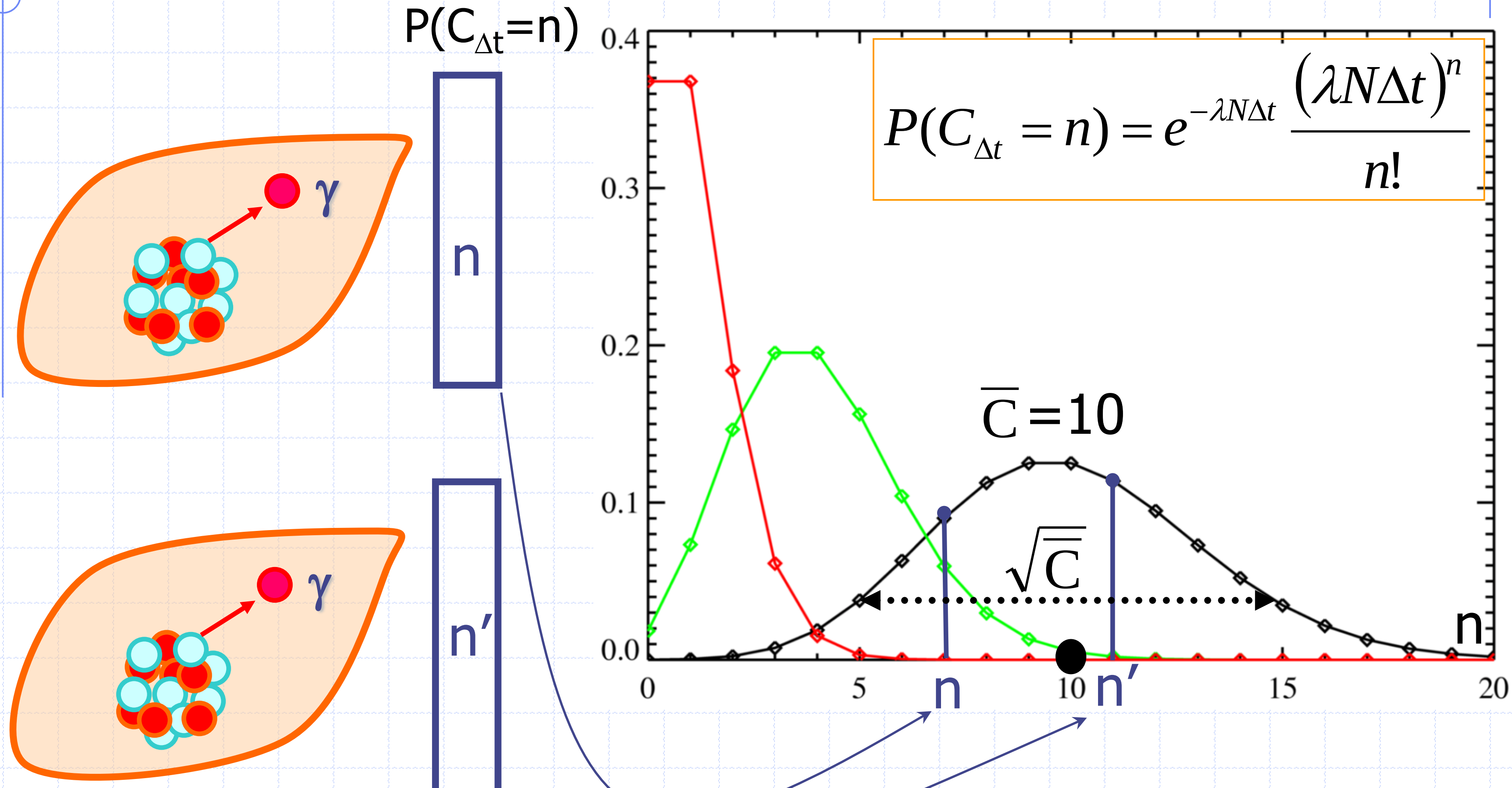

$$E=\sigma^2=\lambda N\Delta t=\overline{C}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{B}=\frac{E}{\sigma}=\frac{\overline{C}}{\sqrt{\overline{C}}}=\sqrt{\overline{C}}$$

$$\boxed{\frac{S}{B}=\sqrt{\overline{C}}}$$

$\overline{C}$ nombre moyen de désintégration pendant $\Delta t = \lambda.N.\,\Delta t$

# Statistique de Poisson (4)

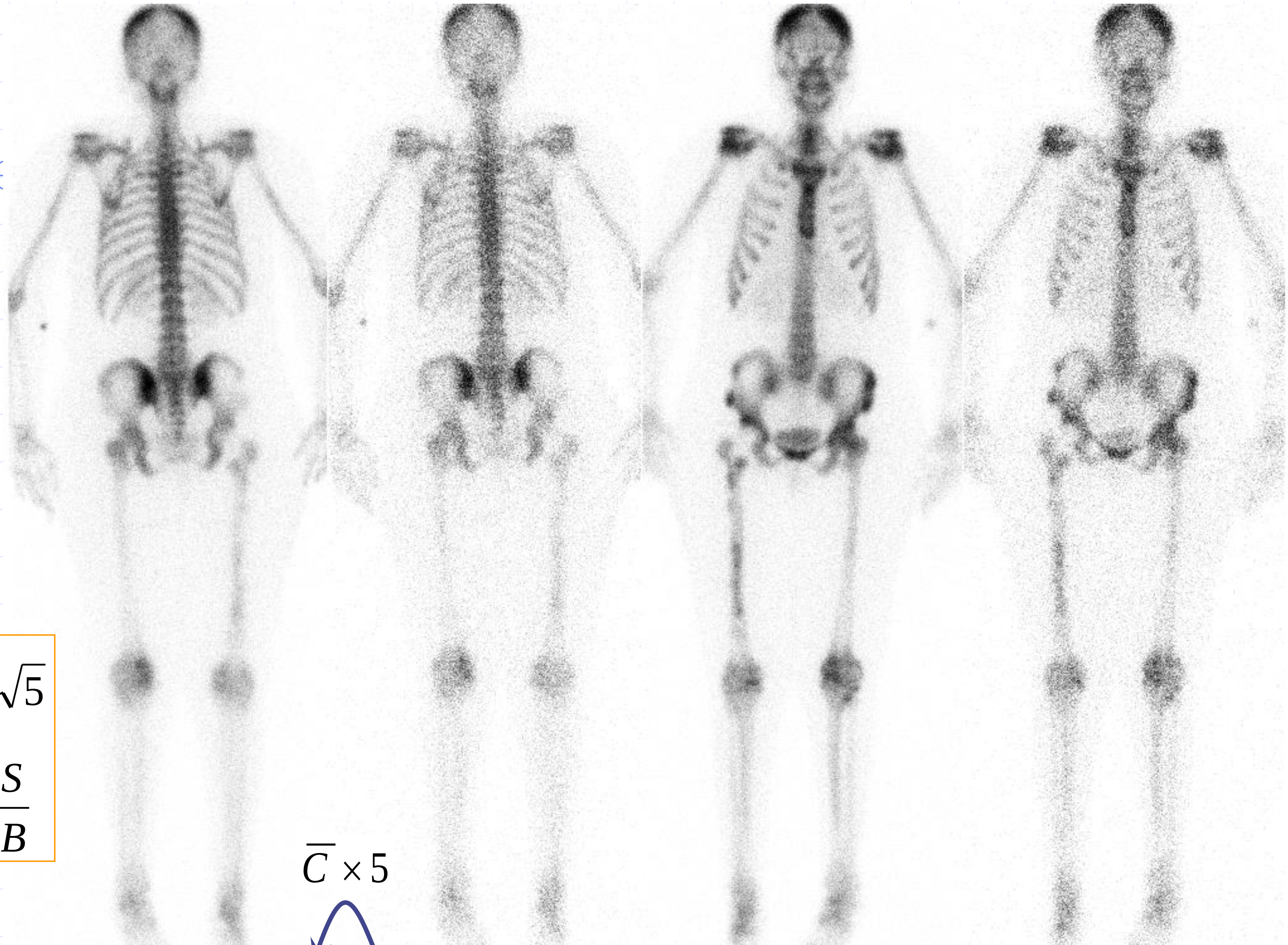



$$P(C_{\Delta t}=n)=e^{-\lambda N\Delta t}\,\frac{(\lambda N\Delta t)^n}{n!}$$

$$C\in[\overline{C}-\sqrt{\overline{C}},\overline{C}+\sqrt{\overline{C}}]$$

$$p=68{,}3\%$$

Un comptage RA est un « tirage au sort » suivant P



$$\frac{S}{B} \times \sqrt{5} \approx 2.\frac{S}{B}$$

$$\overline{C} \times 5$$

12 cm/min | 60 cm/min | 12 cm/min | 60 cm/min

# ECHANTILLONNAGE pratique (2)

- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - 530 / 3.5 = 151 pixels / côté $\Rightarrow$ 256 pixels
  - Si 512 pixels (pixels découpés en 4) :
    - Résolution inchangée
    - C divisé par 4 $\Rightarrow$ S/B divisé par 2

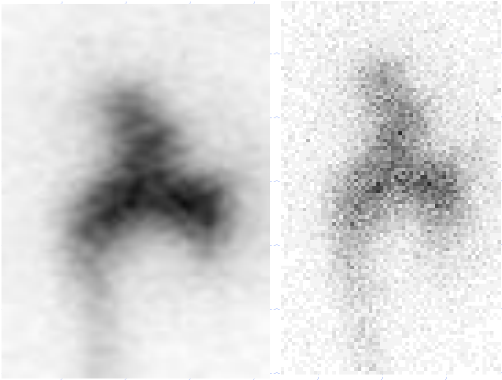
# ECHANTILLONNAGE pratique (2)

- Champ d'une gamma-caméra : 40x53 cm
- LMH en mode planaire = 7 mm
  - 530 / 3.5 = 151 pixels / côté $\Rightarrow$ 256 pixels
  - Si 512 pixels (pixels découpés en 4) :
    - Résolution inchangée
    - C divisé par 4 $\Rightarrow$ S/B divisé par 2
- LMH en mode tomographique = 18 mm
  - 530 / 9 = 59 pixels / côté $\Rightarrow$ 64 pixels
  - Si 128 pixels (pixels découpés en 4) :
    - Résolution inchangée
    - C divisé par 4 $\Rightarrow$ S/B (fortement) diminué

# ECHANTILLONNAGE pratique (2)

256 512 1024

256

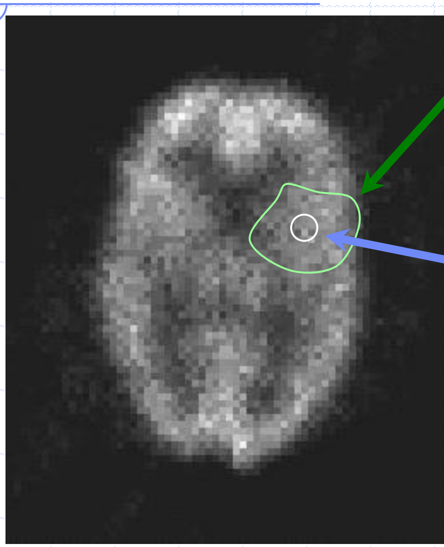


1024

# TAUX DE COMPTAGE

- Désintégration = rare, sans mémoire, stationnaire
  - Donc statistique de Poisson de moyenne $\overline{C} = \sigma^2$
  - Donc S/B = $\sqrt{\overline{C}}$
- Conséquence : optimiser le taux de comptage
  - Activité injectée suffisante, pas de point d'injection (masqué)
  - Mais surtout : temps de pose suffisant
- Taille des pixels lors de la numérisation
  - d = LMH/2
  - Si d < LMH /2, on dégrade le rapport S/B sans gain en résolution.
  - Si d > LMH /2  on dégrade la résolution et on aggrave les effets de volume partiel.

# Notion de filtrage

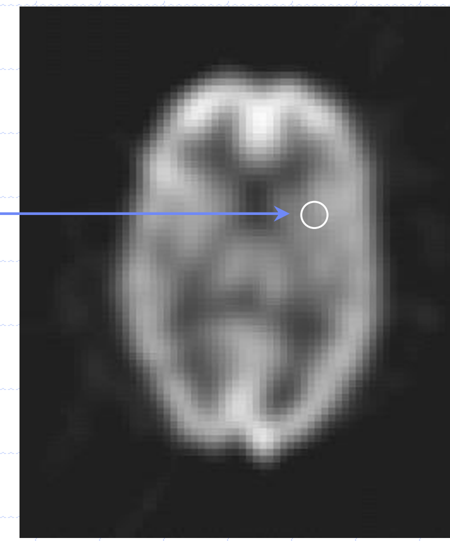


voisinage = masque

information locale

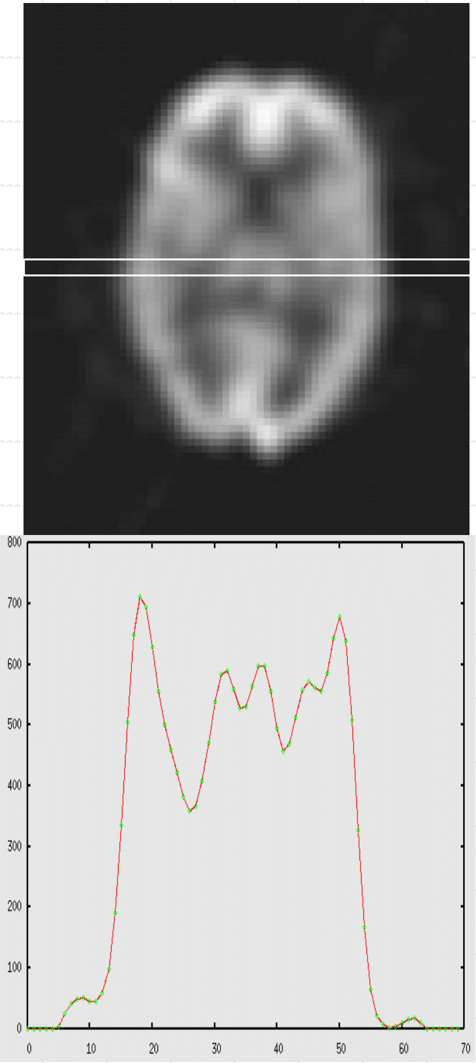
pixel à traiter

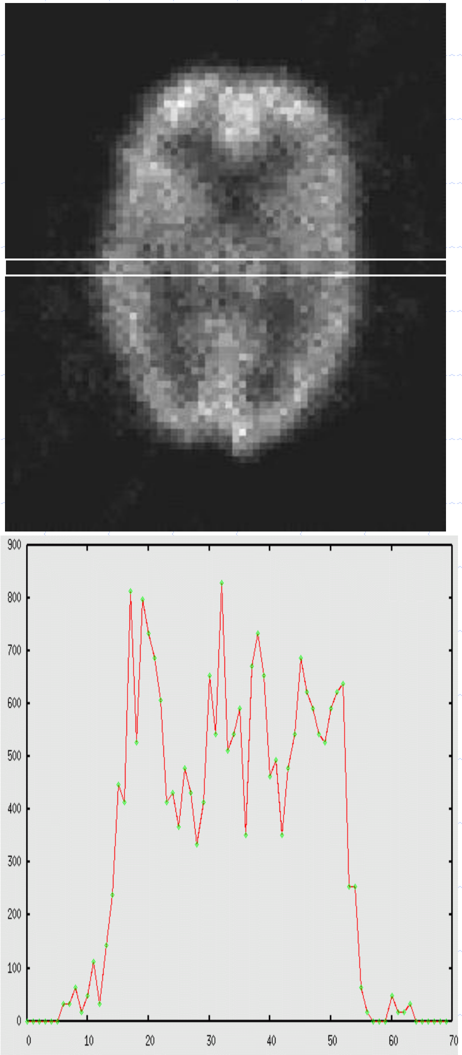
critère
algorithme



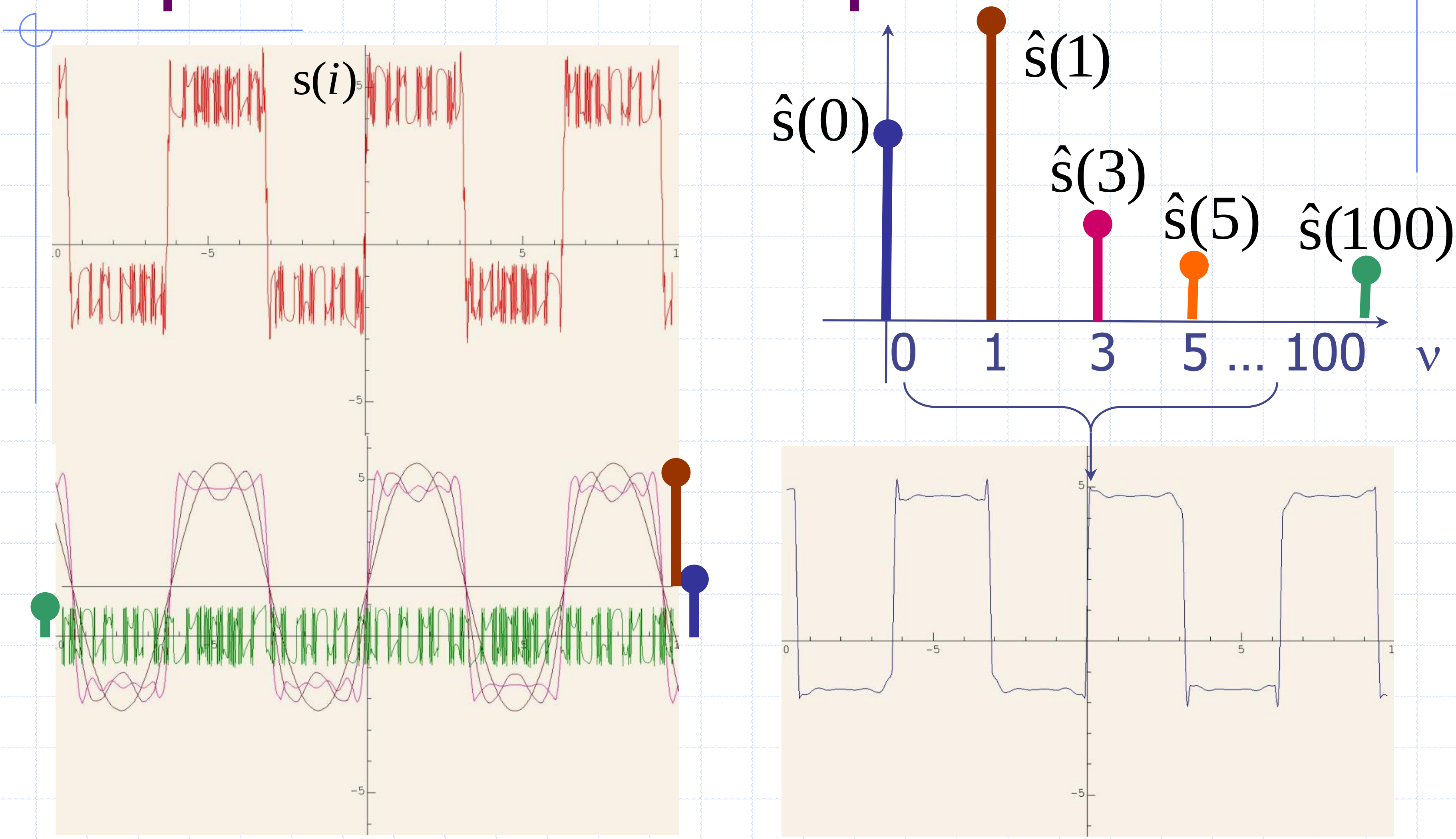
- Filtrer un image médicale, c'est
  - éliminer les signaux gênants
  - respecter les signaux pertinents
- C'est donc au médecin nucléaire de définir :
  - un critère pour discriminer signaux parasites et pertinents
  - un algorithme pour éliminer les signaux parasites

# 1° idée : critère fréquentiel

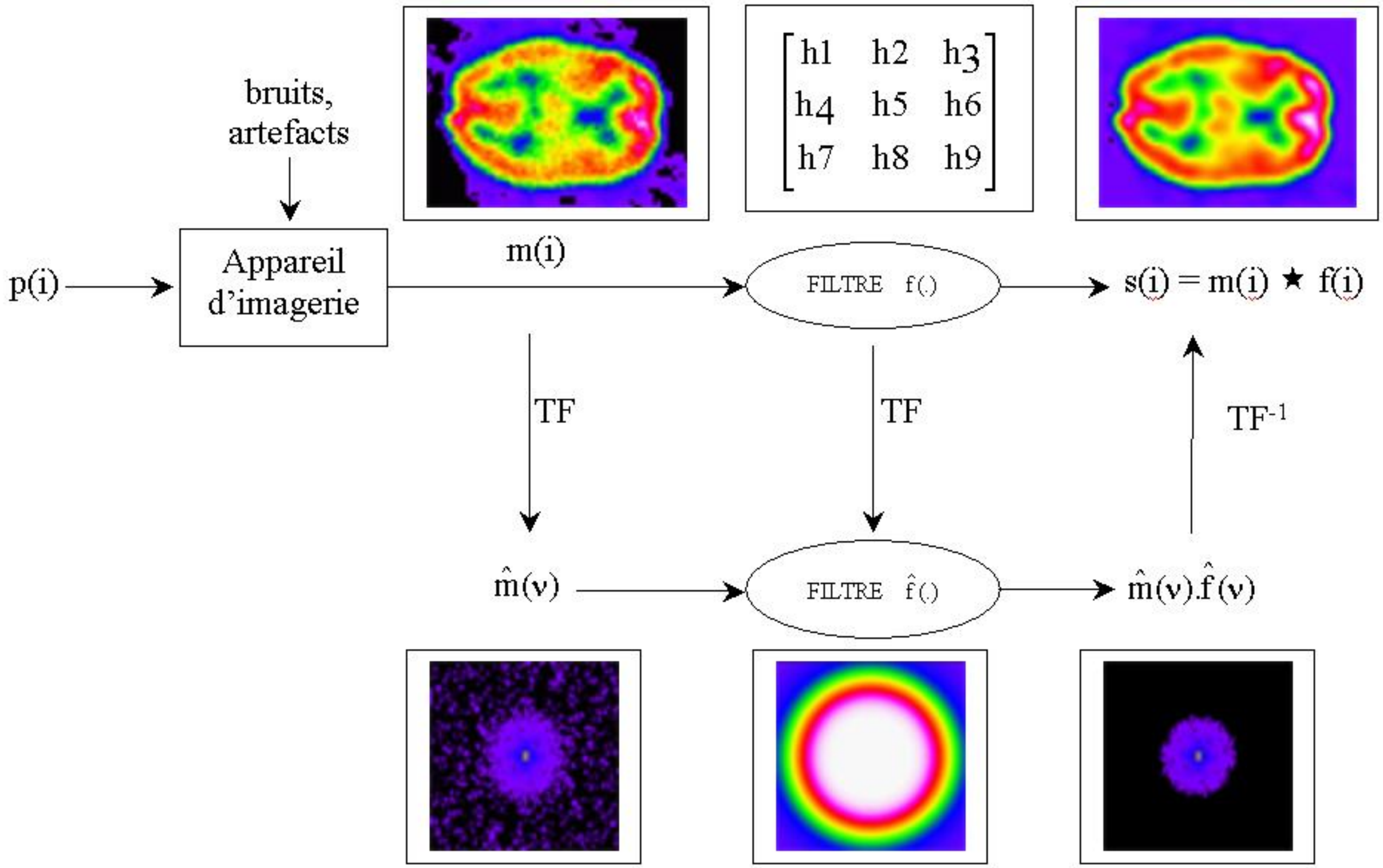


# Représentation fréquentielle

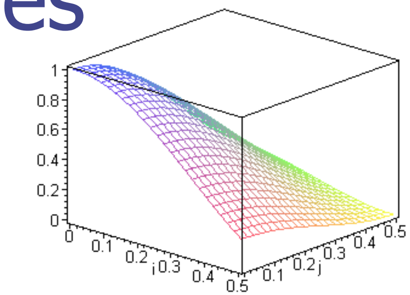


# Filtrage linéaire d'image



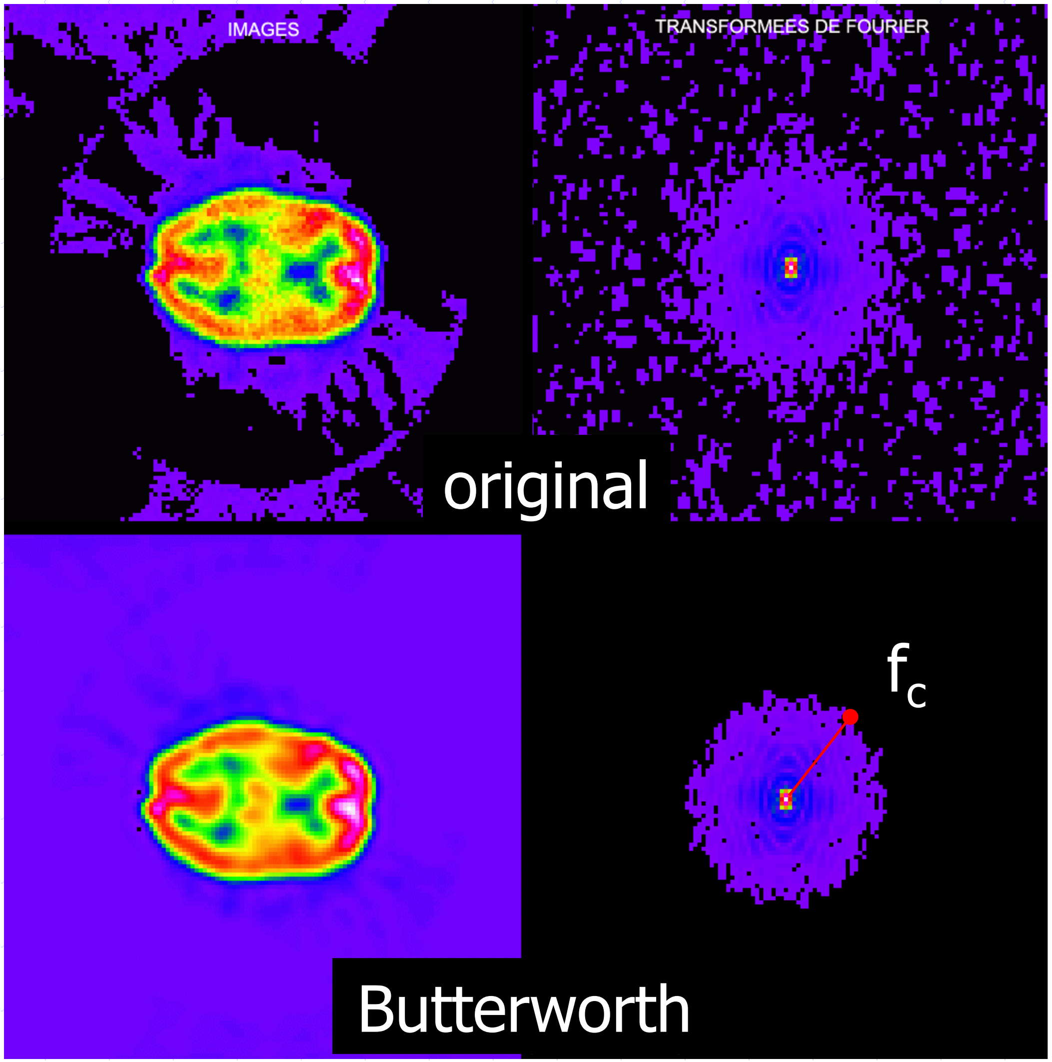
# Filtres passe-bas

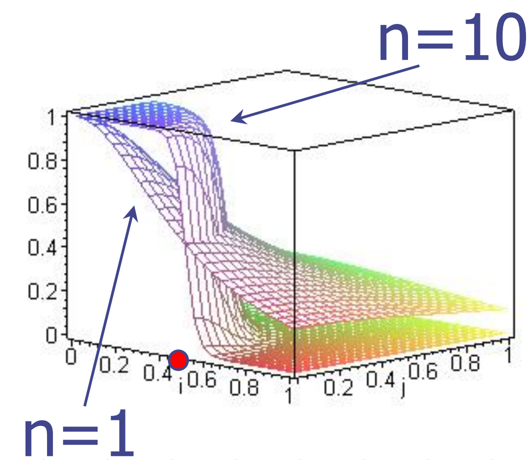
- Convolution: $s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k).m(i-k)$
- Remplace chaque NG par une moyenne pondérée des NG voisins $\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$
- Atténuation sélective de certaines fréquences
  $\hat{f}(\nu) = 0{,}5.[1+\cos(\pi\frac{\nu}{\nu_e})]$




- Un appareil d'imagerie est un exemple de filtre linéaire passe-bas

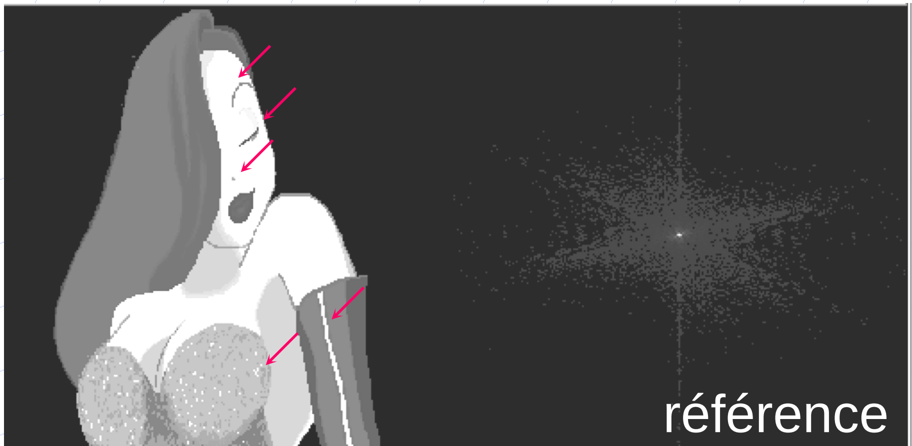
# Exemple: filtres de Butterworth

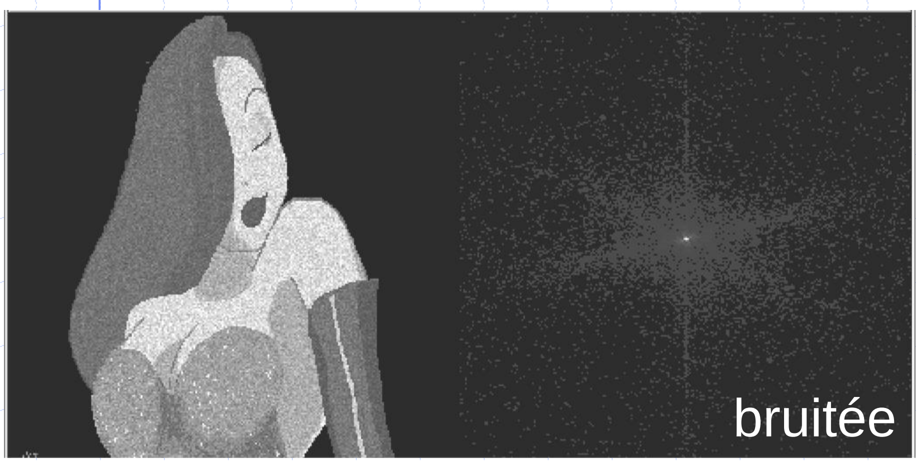


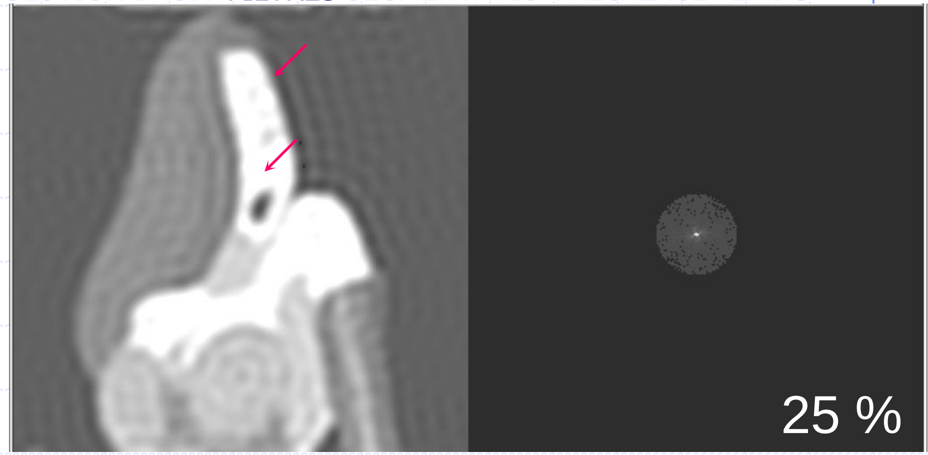



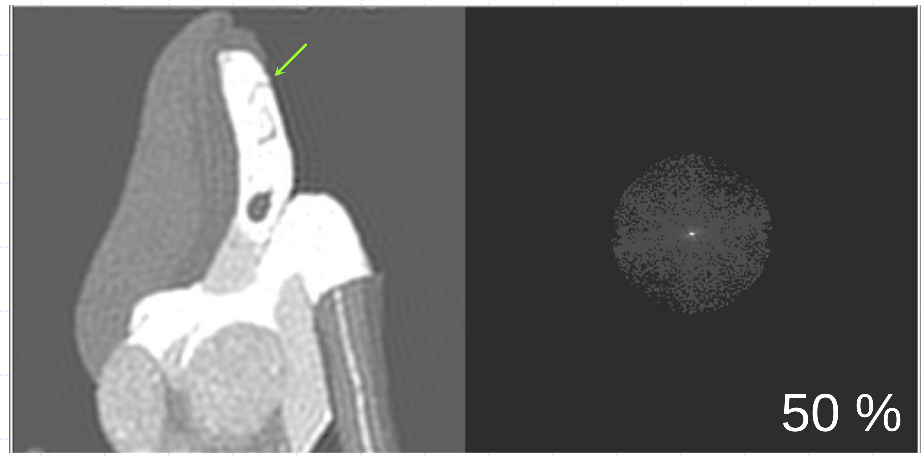

$$\hat{f}(\nu,\nu') = \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{\nu^2+\nu'^2}}{f_c}\right)^{2.n}}$$

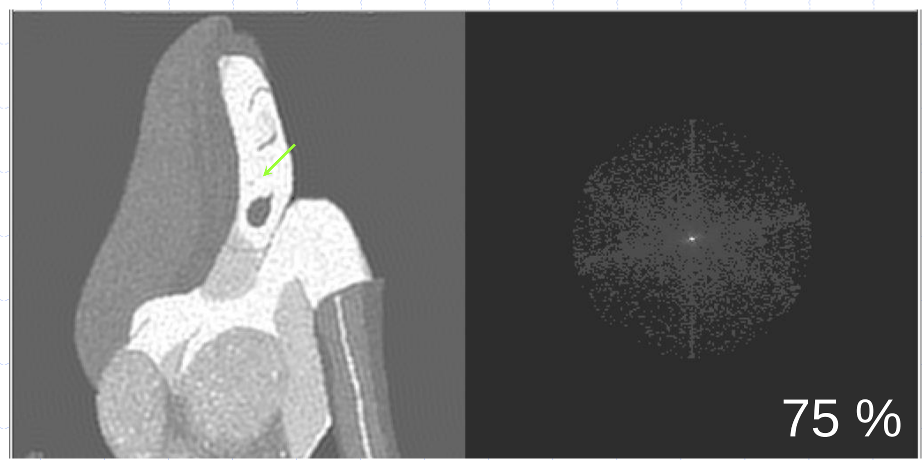
# Filtres linéaires



# FILTRES LINEAIRES

Ils opèrent par convolution (moyenne pondérée) ou par amplification sélective des fréquences spatiales. Ces filtres sont réversibles si $\widehat{h}(\nu) \neq 0$ pour toute fréquence de l'image.

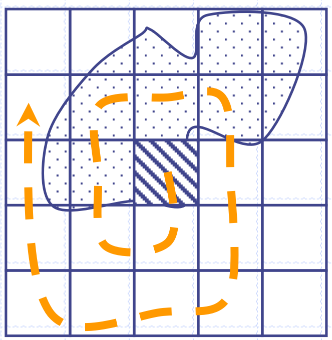
- ▲Facilité (relative) de synthèse
  - ▲ via une fréquence de coupure et un gabarit
  - ▲ ou par définition d'un masque de convolution
- ▲ Contrôle des caractéristiques modifiées
  - ▲via les fréquences spatiales amplifiées
  - ▲en lien avec la résolution de la $\gamma$-caméra
- ▼ Information de voisinage mal prise en compte
- ▼ Altération de la résolution si filtrage passe-bas

# D'autres types de filtrages…

| MASQUE \ ALGORITHME | MOYENNE PONDERE | AUTRE |
|---|---|---|
| INVARIANT | FILTRE LINEAIRE ( $\bar{x}$ ,masque fixe, discrimination en fréquences) | FILTRE MEDIAN (MEDIANE)<br>FILTRE MORPHOLOGIQUE (MIN, MAX) |
| NON INVARIANT | LISSAGE SUR MASQUE ADAPTE ( $\bar{x}$ sur masque variable) | SHINE (ACP)<br>FILTRE MORPHOLOGIQUE (MIN, MAX) |

Introduction au traitement numérique des images médicales. D. Mariano-Goulart. *EMC.* (Elsevier Masson SAS, Paris), Radiodiagnostic - Principes et techniques d'imagerie, 35-100-A-10, 2015S.

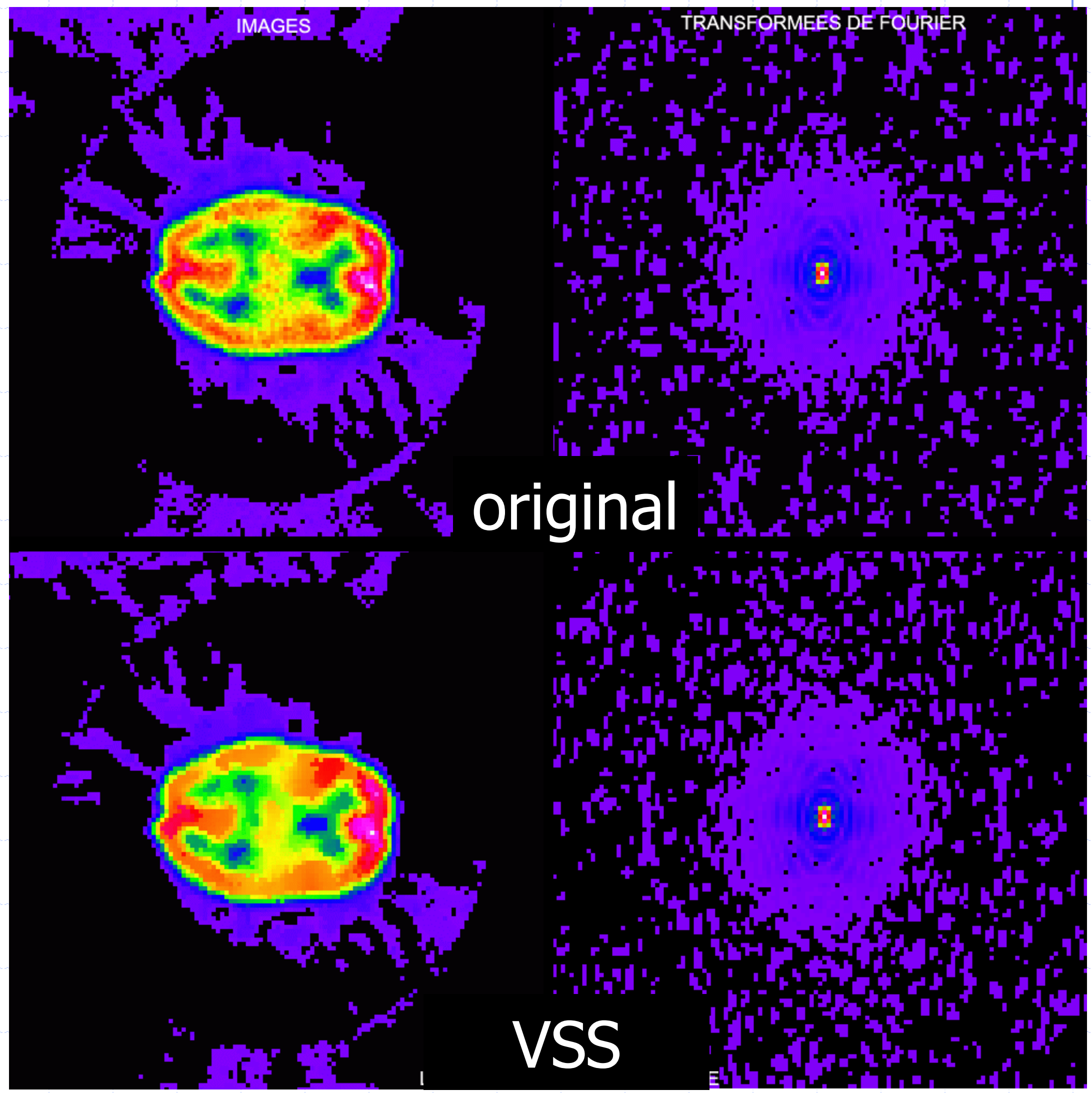
# Lissage sur masque adapté (VSS)



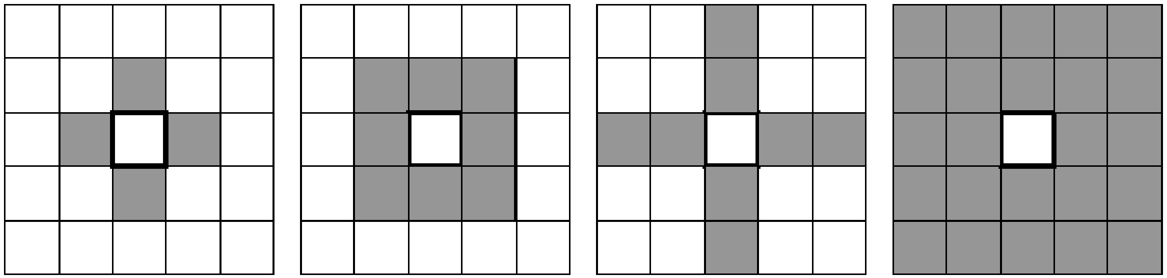
Accumulation pour moyenne des

$$s(i',j') \in s(i,j) \pm 2\sqrt{s(i,j)}$$

Ce filtre opère toujours une moyenne, mais n'est plus linéaire car non invariant en translation (le masque change).

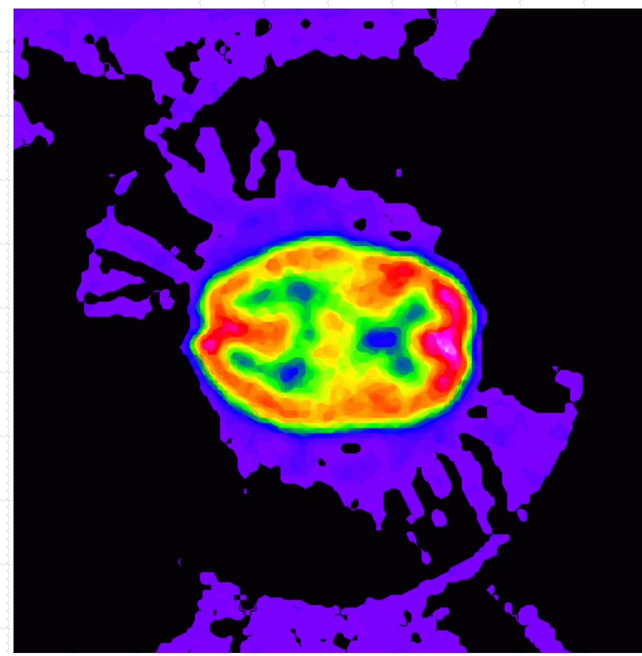


# Filtre médian



Connexité 4 Connexité 8 Connexité 4 Connexité 8

Taille 1 Taille 2



On remplace s(i,j) par la valeur de pixel médiane dans un voisinage fixe de (i,j)

Ce filtre opère de façon non linéaire (il ne calcule pas de moyenne pondérée)

# Opérateurs morphologiques

$$P(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

EROSION :

$$\varepsilon(i,j) = \operatorname*{Inf}_{(i',j')\in V(i,j)} s(i',j') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Voisinage :

$$V(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

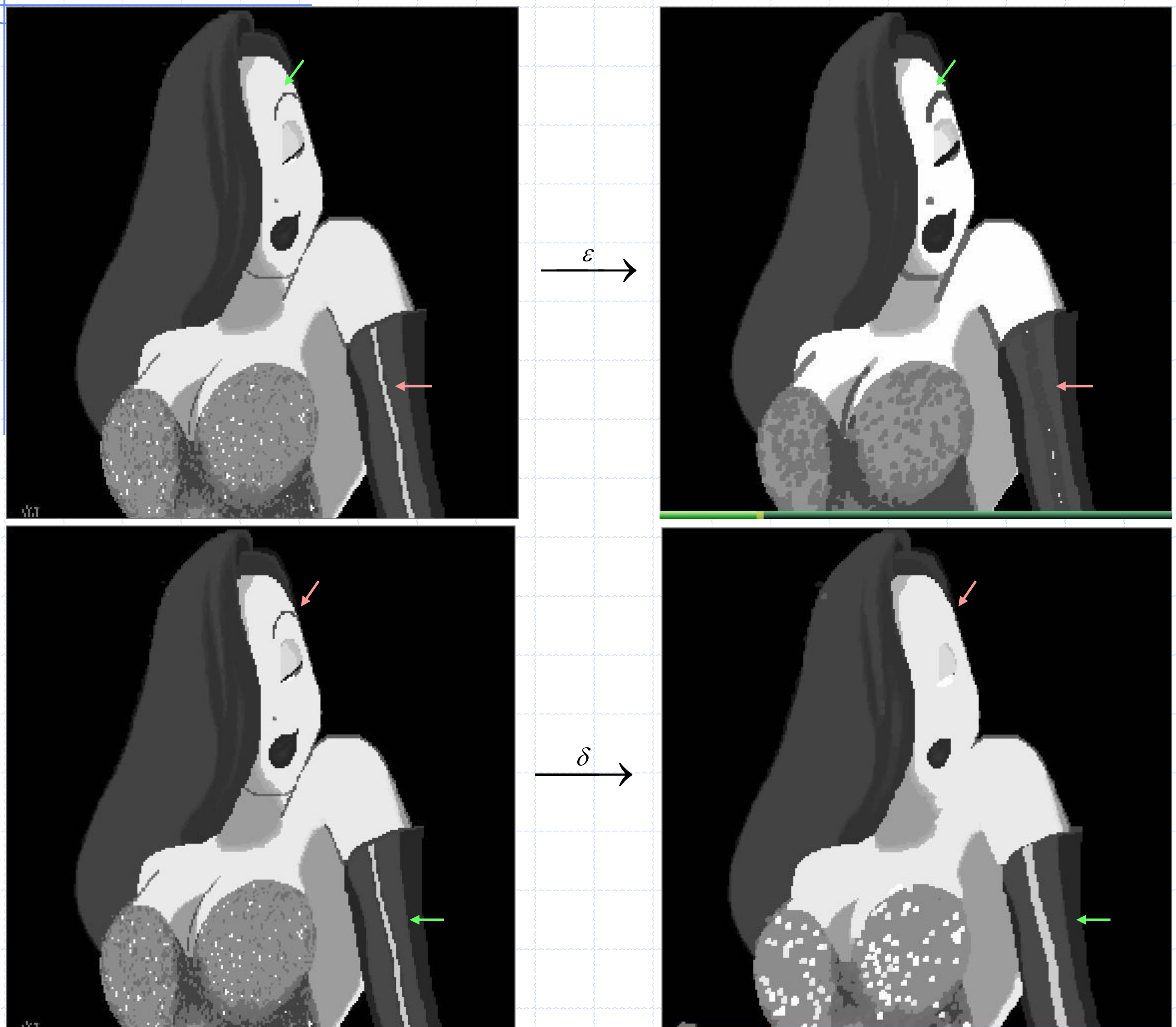
DILATATION :

$$\delta(i,j) = \operatorname*{Sup}_{(i',j')\in V(i,j)} s(i',j') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

ε remplace chaque valeur de pixel par le minimum des valeurs des pixels du voisinage

δ remplace chaque valeur de pixel par le maximum des valeurs des pixels du voisinage

# Opérateurs morphologiques




ε diminue le signal,
élargit les hypo-signaux,
gomme les hyper-signaux

δ augmente le signal,
gomme les hypo-signaux,
élargit les hyper-signaux

# Filtres morphologiques

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \varepsilon(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

OUVERTURE:

$$\rightarrow \gamma(i, j) = \delta\varepsilon(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 14 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

↳ gomme les hyper-signaux petits par rapport à V

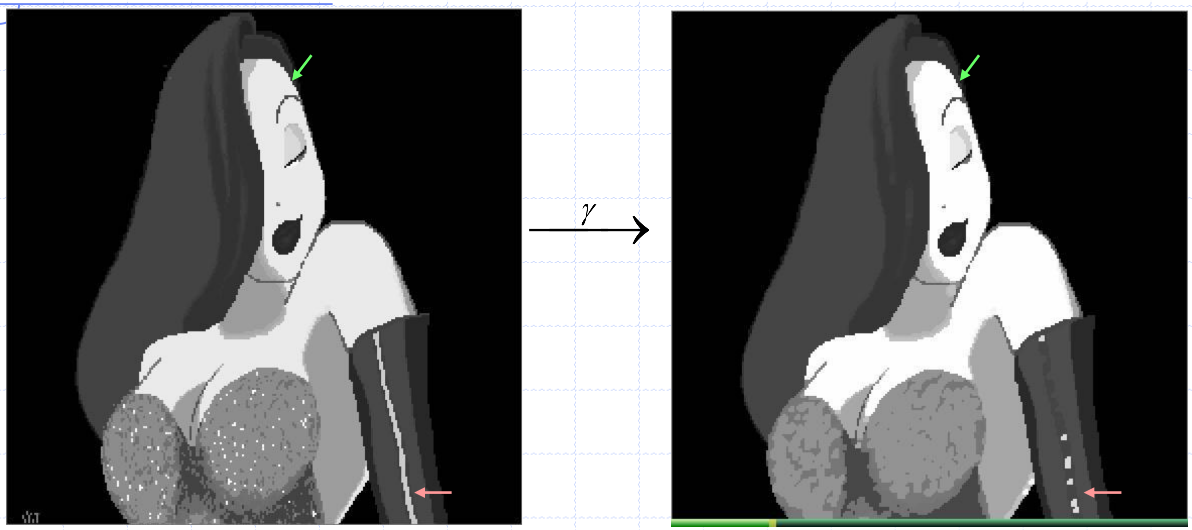
$$\rightarrow \delta(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

FERMETURE:

$$\rightarrow \varphi(i, j) = \varepsilon\delta(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

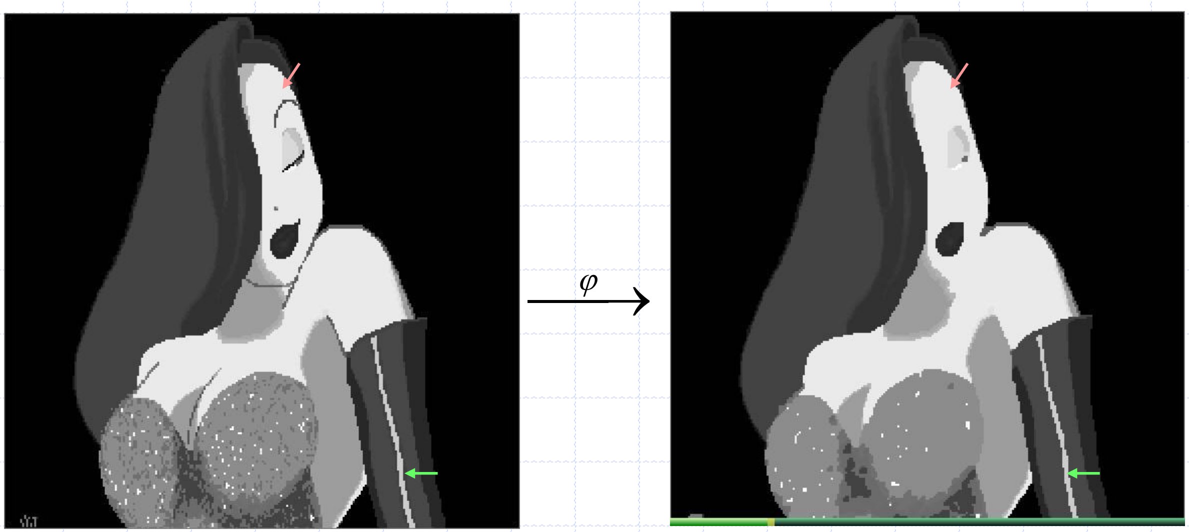
↳ gomme les hypo-signaux petits par rapport à V

# Filtres morphologiques




**OUVERTURE:**

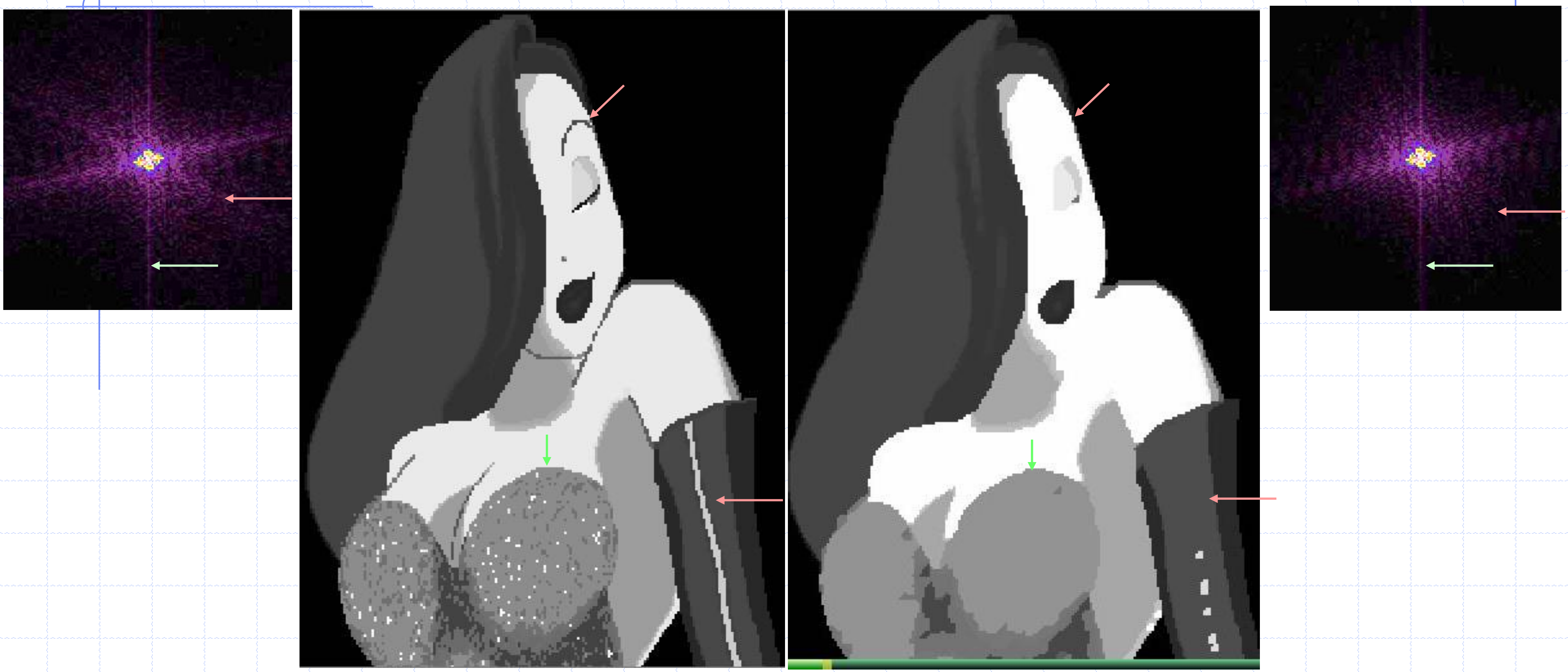
- gomme les hyper-signaux petits par rapport à V




**FERMETURE:**

- gomme les hypo-signaux petits par rapport à V

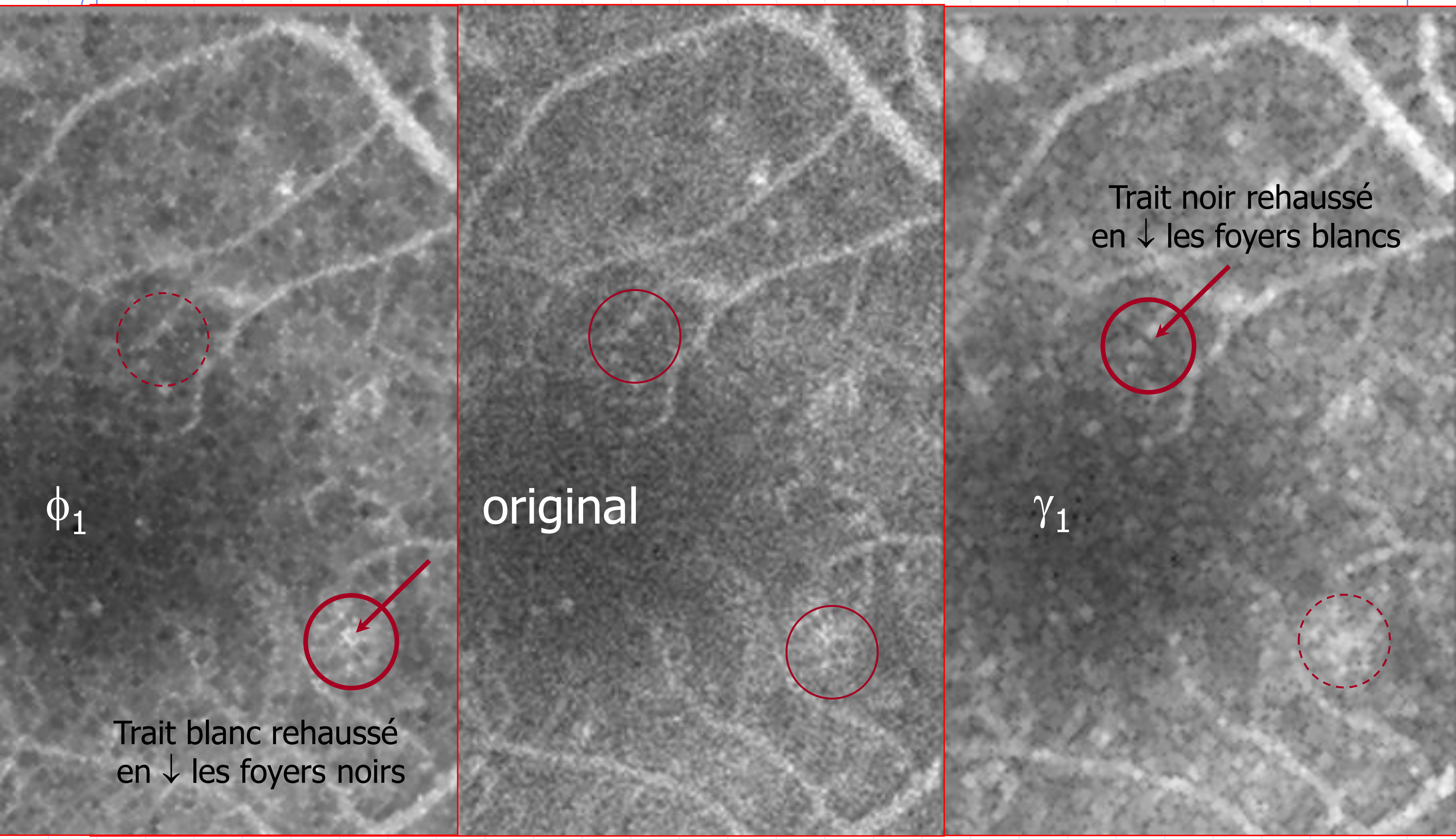
# Filtres alternés séquentiels



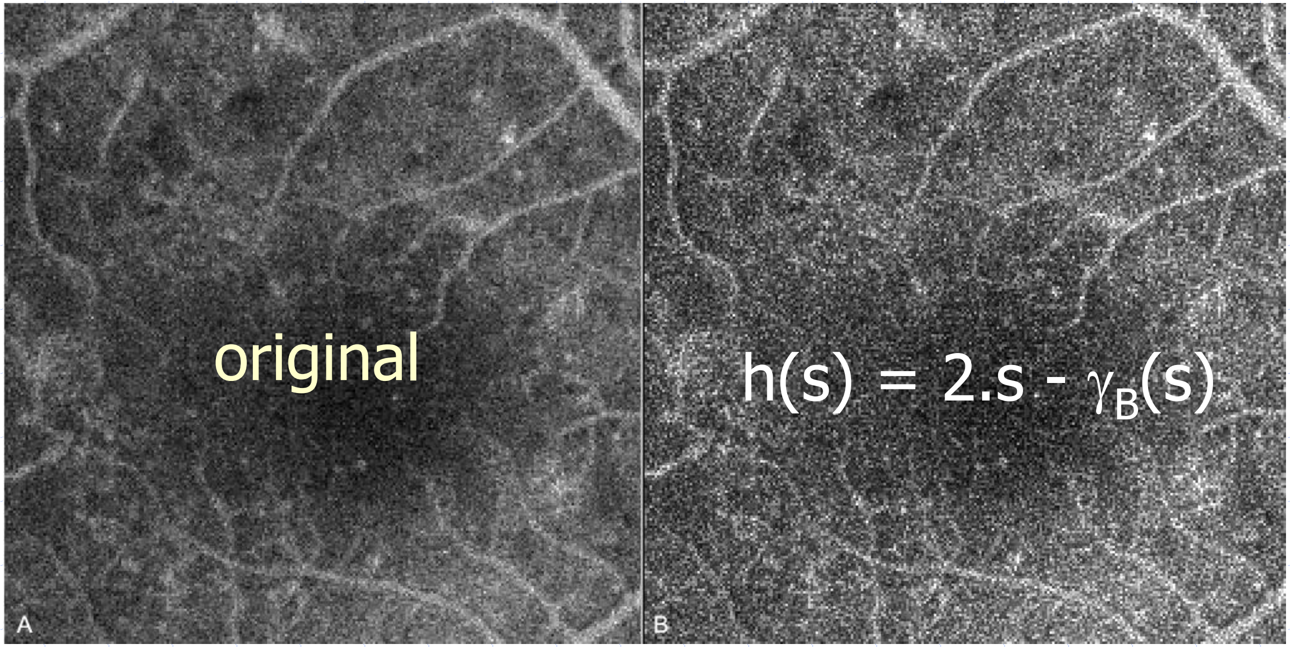
$$\boxed{\gamma\varphi(s)(i,j) = (\delta \circ \varepsilon)(\varepsilon \circ \delta)(s)(i,j)}$$

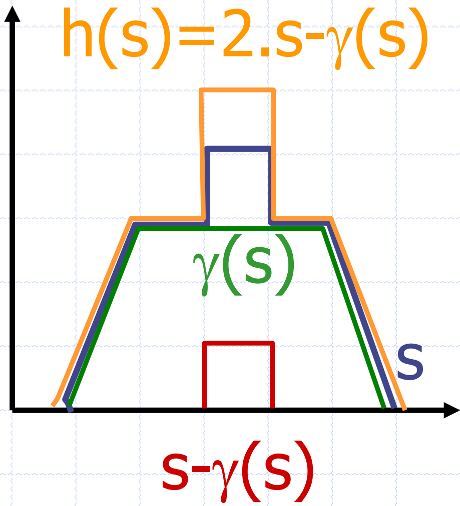
Algorithme : fermeture suivie d'une ouverture : gomme les hyper et les hypo-signaux petits par rapport à V sans utiliser la fréquence comme critère

# Filtres morphologiques



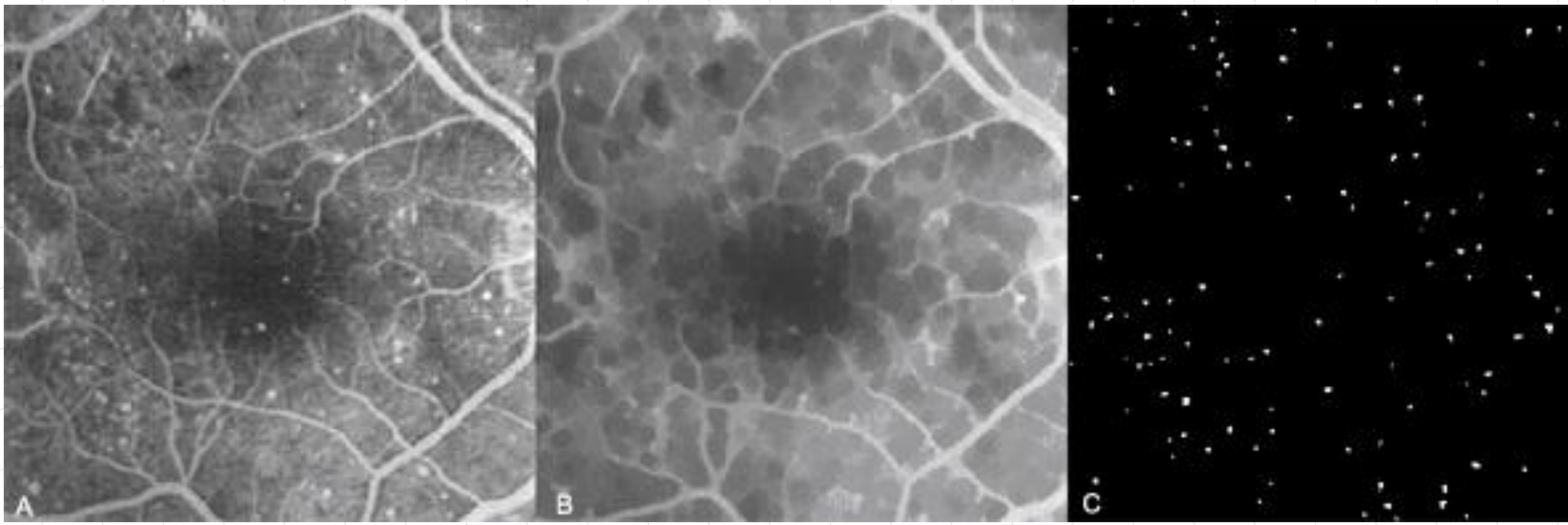
# Transformation « chapeau haut de forme »



# Contrôle de l'activité d'un filtre

- Opérateurs géodésiques
  - dilater m < s tant que $\delta$(m) < s
  - éroder m > s tant que $\varepsilon$(m) > s

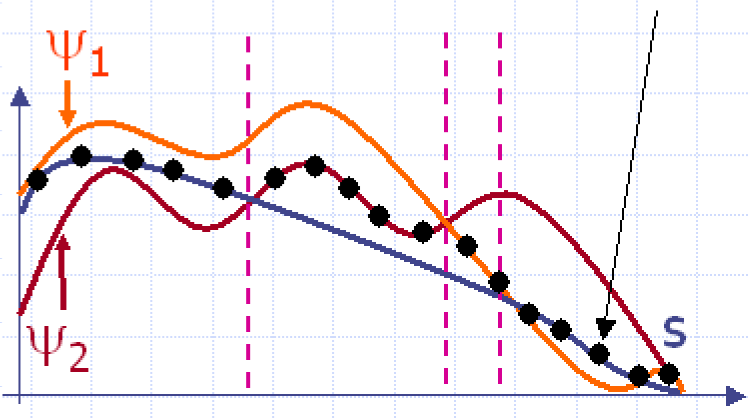


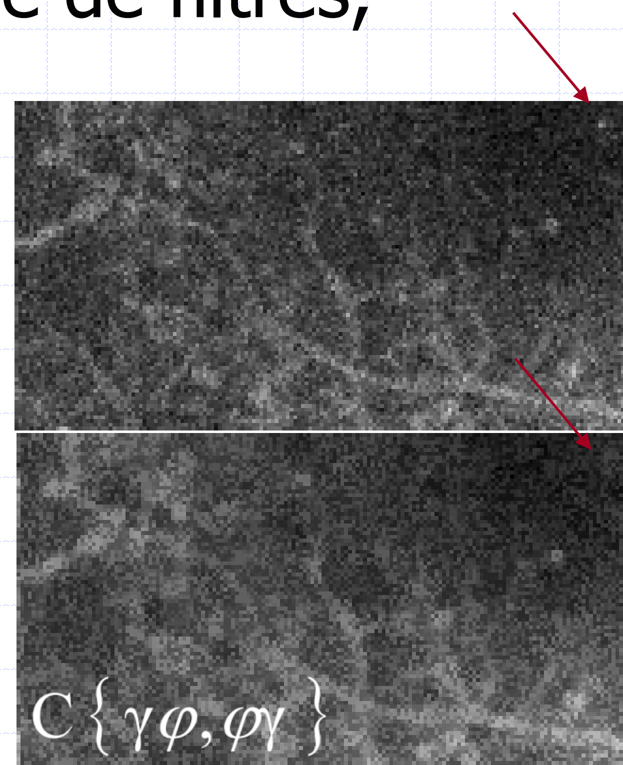

original $\delta_S^\infty(\varepsilon)$ puis $\varepsilon_S^\infty(\delta_B)$ Différence seuillée

F. Zana et JC. Klein du Centre de Morphologie Mathématique de l'Ecole des Mines de Paris

# Contrôle de l’activité d’un filtre

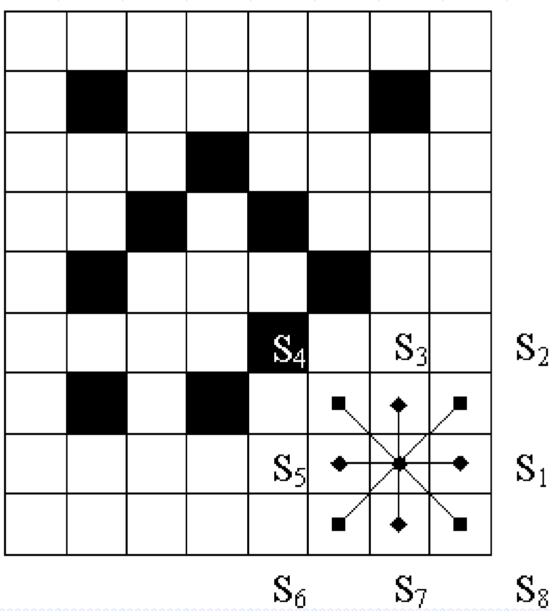
- Opérateurs géodésiques
  - dilater m < s tant que $\delta(m) < s$
  - éroder m > s tant que $\varepsilon(m) > s$
- Centres: on se donne une famille de filtres,
  - et pour chaque pixel, on choisi le moins actif si tous les filtres agissent dans le même sens, sinon, on ne modifie pas le pixel.

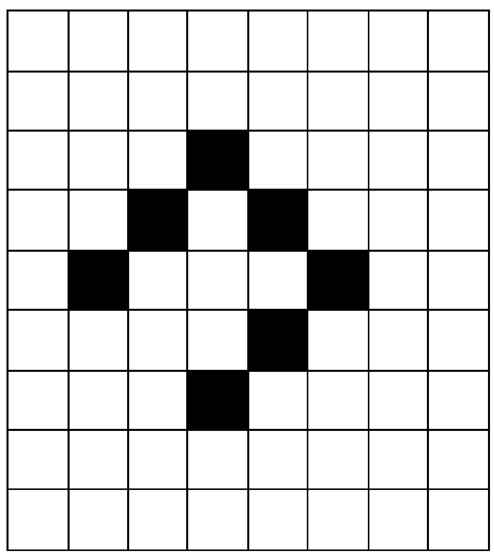


# Contrôle de l’activité d’un filtre

- Opérateurs géodésiques
- Centres
- Extrema d’opérateurs
  - Abandonner l’invariance dans le décalage de l’élément structurant: Sup d’érodés ou Inf de dilatés.



On érode (dilate) avec un segment de direction choisie pour fournir le résultat le plus (moins) élevé.

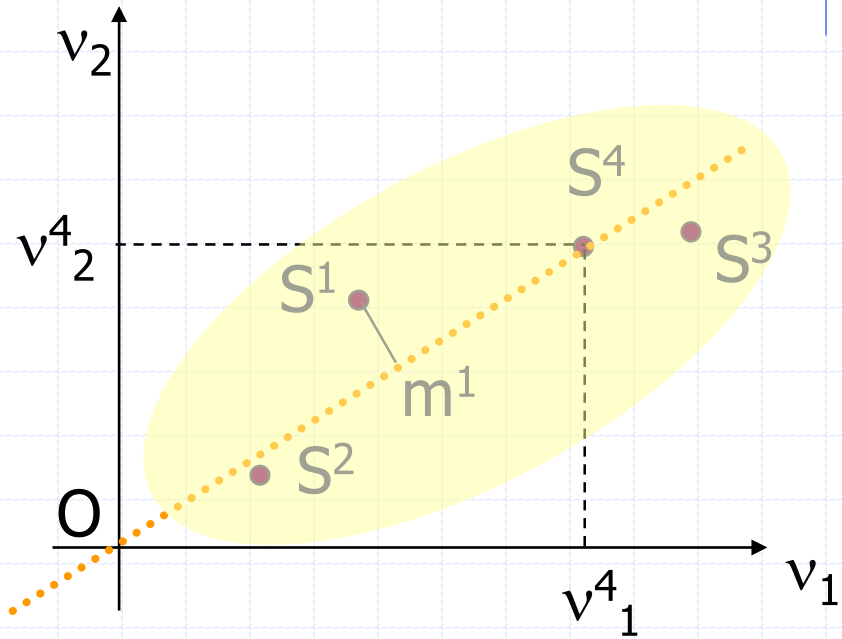
$$\varepsilon(s)(i,j) = \mathrm{Sup}_k\,(\,\varepsilon_{Sk}\,)(s)(i,j)$$

# Analyse Factorielle des Correspondances

Analyse de 2 variables $\nu_n$ (ex: taille et poids) sur 4 sujets $S^p$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \\ v_1^4 & v_2^4 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{sujet } S^2$$

variable $\nu_1$ variable $\nu_2$




Idée : isoler les caractéristiques principales de chaque sujet $S^i$ en ne le décrivant que par le point $m^i$ (« costaud » ou pas) : ↓ le nombre de variables

JP Benzecri 1992. Correspondence Analysis Handbook.(new-York: Dekker).

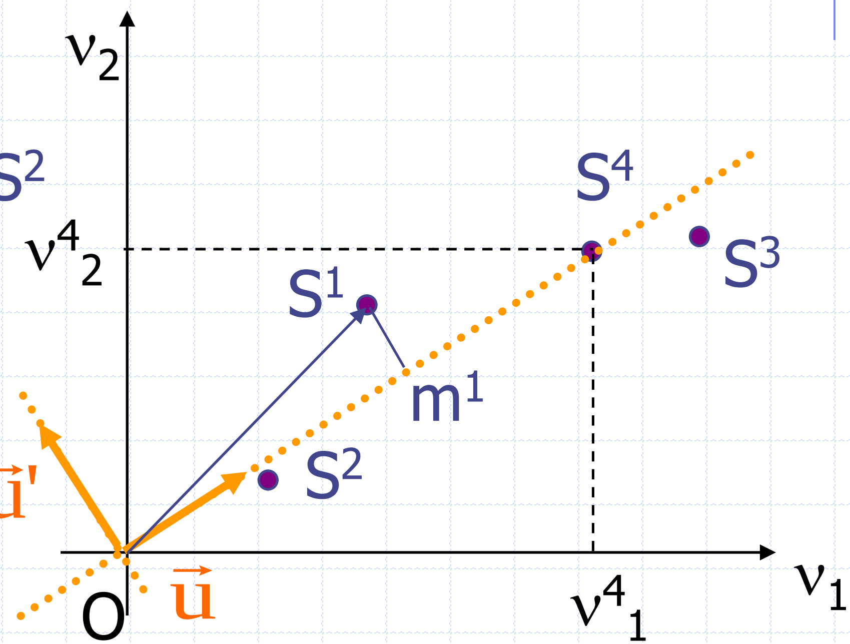
# Analyse Factorielle des Correspondances

Analyse de 2 variables $\nu_n$ (ex: taille et poids) sur 4 sujets $S^p$

$$M = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \\ v_1^4 & v_2^4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \\ m^4 \end{bmatrix}$$

→ sujet $S^2$

variable $\nu_1$ variable $\nu_2$




Idée : isoler les caractéristiques principales de chaque sujet $S^i$ en ne le décrivant que par le point $m^i$ (« costaud » ou pas) : ↓ le nombre de variables

JP Benzecri 1992. Correspondence Analysis Handbook.(new-York: Dekker).

M

# AFC: aspects techniques

$$\mathrm{Max}\ (\mathrm{Om}^{p})^{2} \Leftrightarrow C\,\vec{u} = \lambda.\vec{u} \quad \text{où} \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} v_i^k . v_j^k \quad C = M^{t}M$$

$\vec{u}$ = vecteur propre de la matrice C des intercorrélations entre variables,associé à la valeur propre $\lambda \propto$ informat°

Diagonalisation : $\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C^{u_1}_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & C^{u_2}_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & C^{u_3}_{3,3} \end{pmatrix}$

Base de vecteurs propres

On représente chaque sujet $S^p$ par ses composantes sur les vecteurs propres associés aux plus grandes $\lambda$

# Construction de la matrice des données

Découpage de l'image par blocs (≡ sujets) de n pixels (≡ variables)

bloc n° 1

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ \dots & x_{1,n}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} \\ \dots & x_{2,n}\end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} x_{3,1} & x_{3,2}\\ \dots & x_{3,n}\end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \begin{bmatrix} x_{p,1} & x_{p,2} \\ \dots & x_{p,n}\end{bmatrix}\end{array}$$

$$M = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & & & \\ & & & \\ x_{p,1} & \dots & \dots & x_{p,n} \end{bmatrix} \; p$$

n pixels par bloc = n variables

→ ↓ nombre de variables par bloc tel que $\sigma < \sigma_b$ puis reconstruction

P. Hannequin & J Mas, Phys med Biol 2002; 47 - P Marano. Ann. Télécom. 1972; 27

M

# AFC appliquée au filtrage du bruit

- On réalise une AFC sur M
  - Permet de réduire le nombre de variables (par ligne)
  - Sur critère de ne pas inclure le bruit statistique: arrêt si var résiduelle < var bruit

bloc n° 1

$$M = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & & & \\ & & & \\ x_{p,1} & \cdots & \cdots & x_{p,n} \end{bmatrix}$$

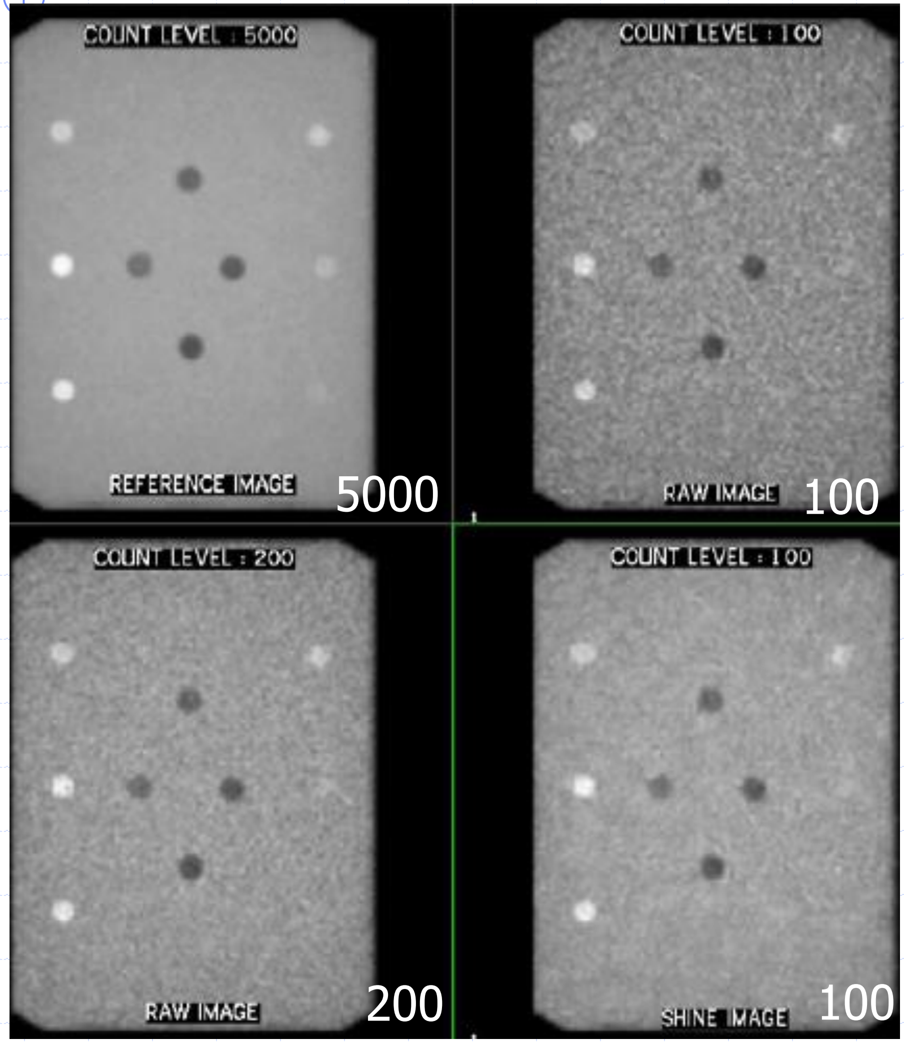
p

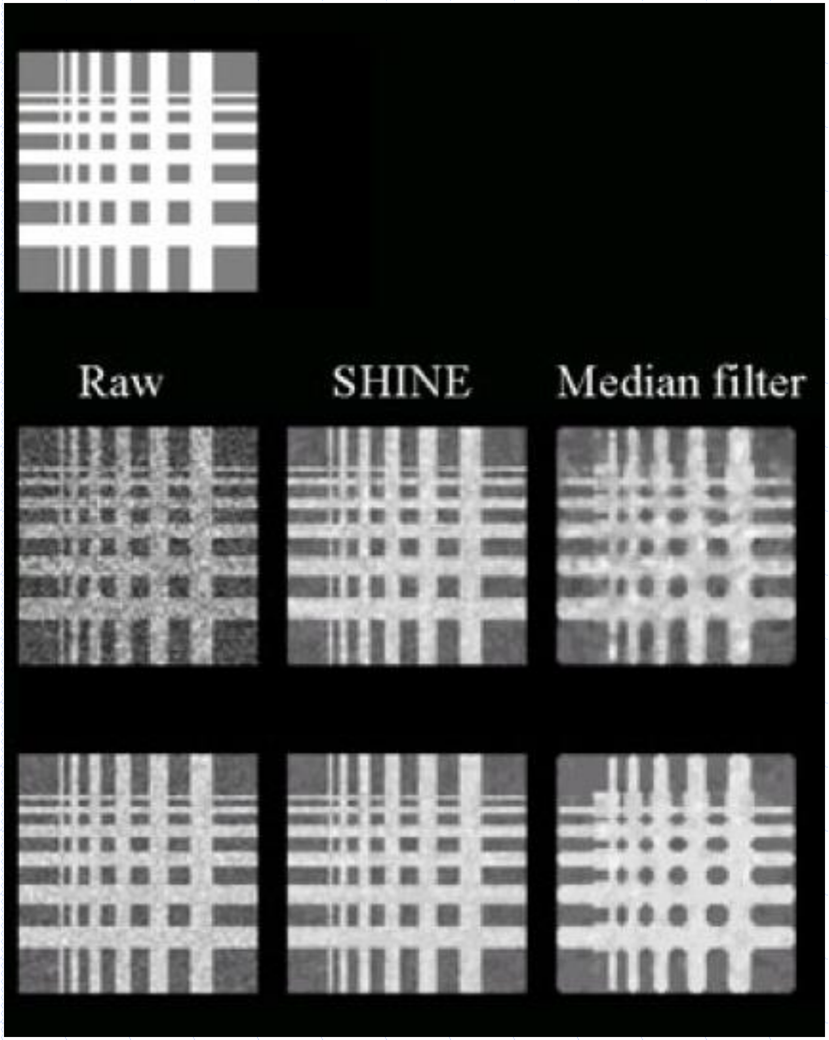
pixel n°1 n

- Reconstruction
  - bloc après bloc
  - sur les facteurs principaux

P. Hannequin & J Mas, Phys med Biol 2002; 47 - P Marano. Ann. Télécom. 1972; 27

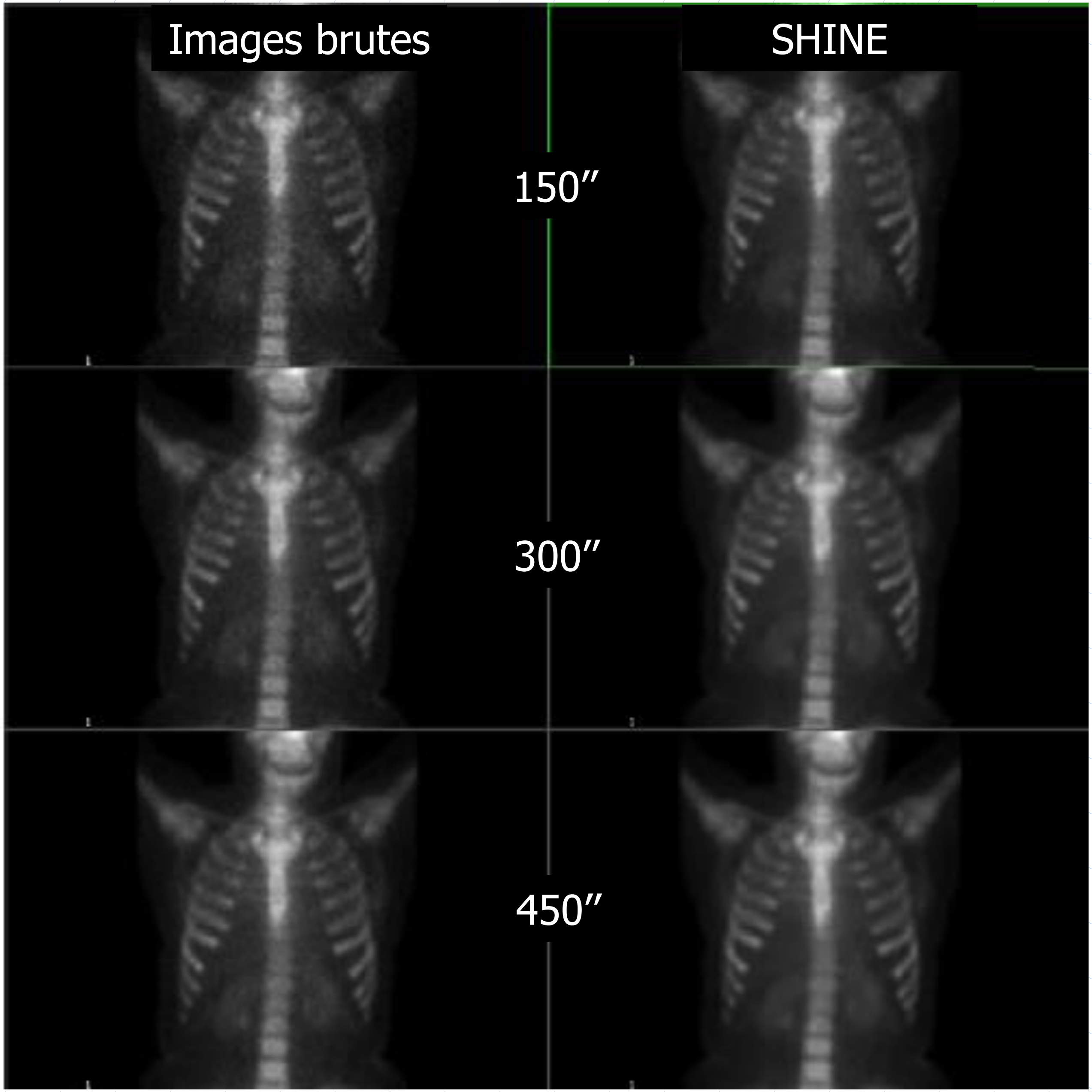
# Statistical Heuristic Image Noise Extraction




P. Hannequin & J Mas, Phys med Biol 2002; 47

# SHINE




P. Hannequin & J Mas, Phys med Biol 2002; 47

# FILTRES NON LINEAIRES

- Il s'agit toujours de comparer des a priori sur la nature du signal et du bruit à l'information de voisinage, mais de façon non linéaire.
- Ces filtres sont irréversibles.
- Non invariants dans le décalage
  - Mode opératoire différent suivant la région de l'image traitée
  - Ex : lissage sur masque adapté
- N'opérant pas par moyenne pondérée
  - Ex : filtres de nature statistique: filtre médian, SHINE
  - Ex : filtres morphologiques : ouvertures et fermetures.
- Difficultés
  - Pour paramétrer et pour contrôler l'activité de ces filtres.

# ③ SEGMENTATION

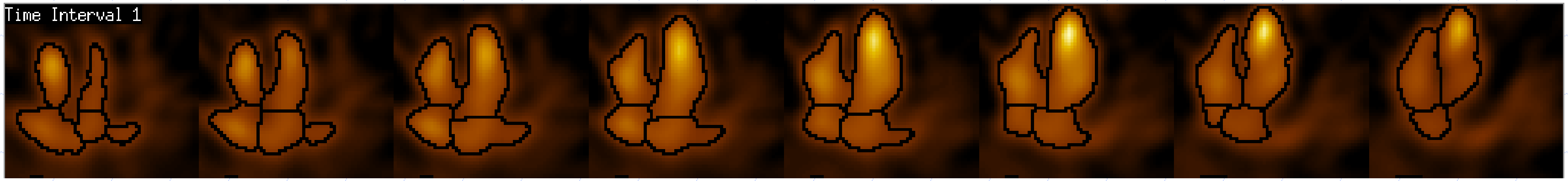
**Définition et généralités**

**Application de seuils**

**Recherche de frontières**

J.P Cocquerez et S. Philipp Edds. Analyse d'images : filtrage et segmentation", 1995. MASSON.

# Notion de segmentation




- Partition d'une image en régions d'intérêt (ROI)

- Première étape d'une analyse d'image
  - Extraction d'une mesure physique dans une ROI

- Quantification morphologique ou fonctionnelle

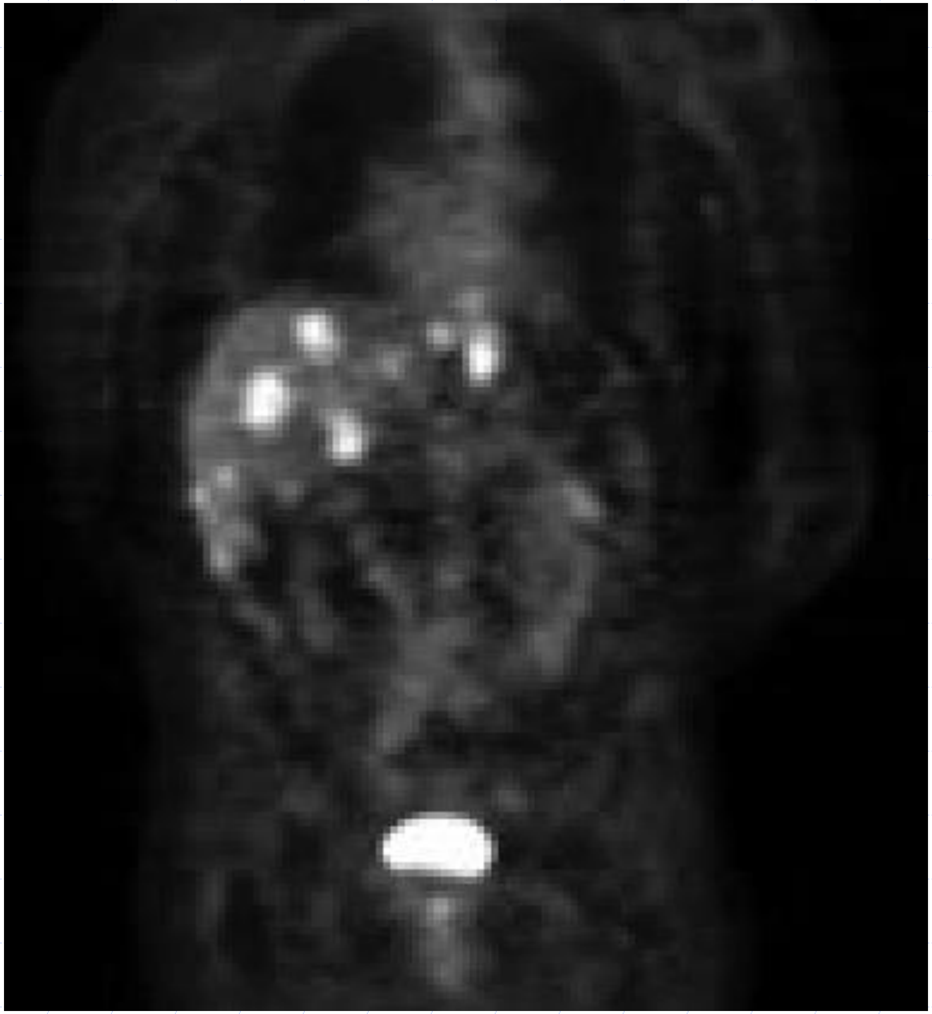
# Méthodes de segmentation

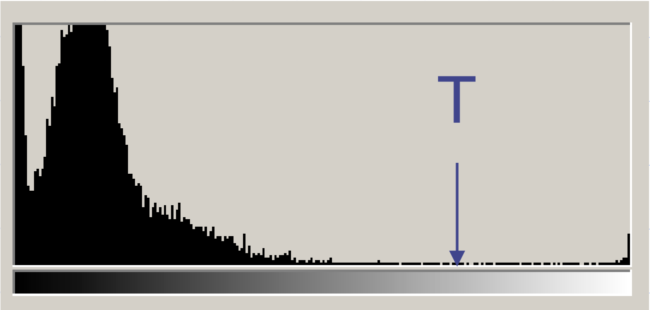
- Seuillages
- Croissance de régions
- Recherches de frontières entre objets
  - Méthodes dérivatives
  - Méthodes morphologiques (gradients, LPE)
- Autres (non traitées)
  - Champs de Markov, réseaux de neurones, regroupement de pixels, étiquetage par analogie à des modèles, modèles déformables, atlas, analyse d'une évolution temporelle (ventriculographie, scintigraphie rénale…)

# Seuillage simple

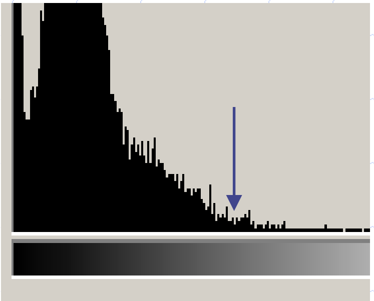
- Définition d'un seuil T sur l'image ou l'histogramme

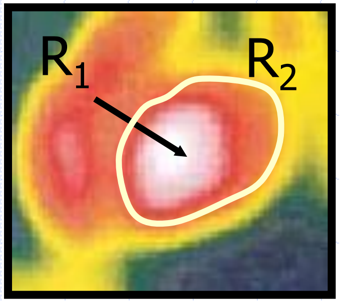
- Sélection des pixels de niveau supérieurs ou inférieurs à T





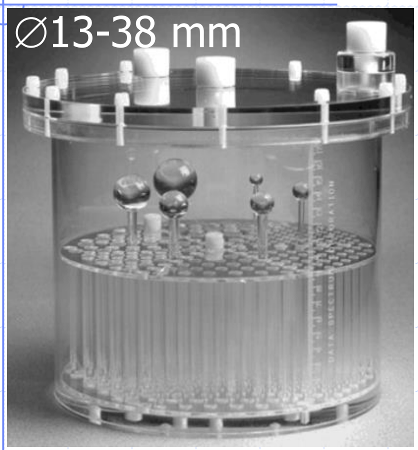
# Choix du seuil

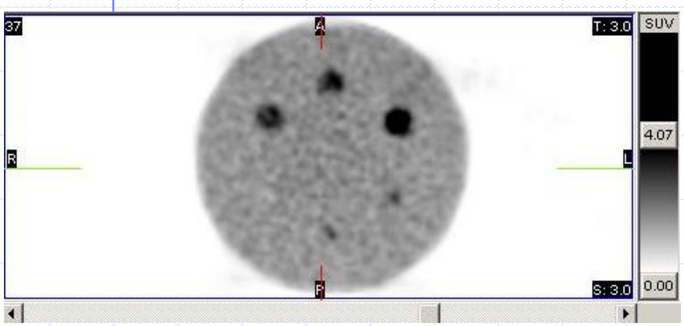


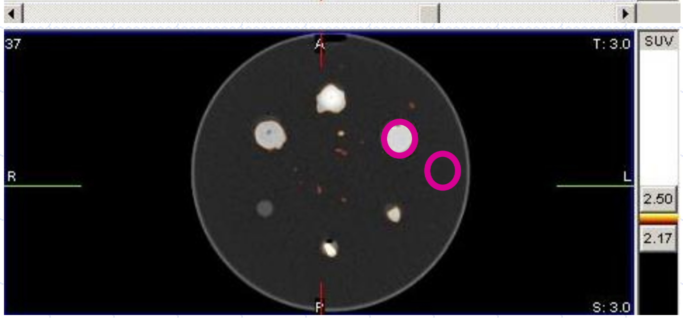


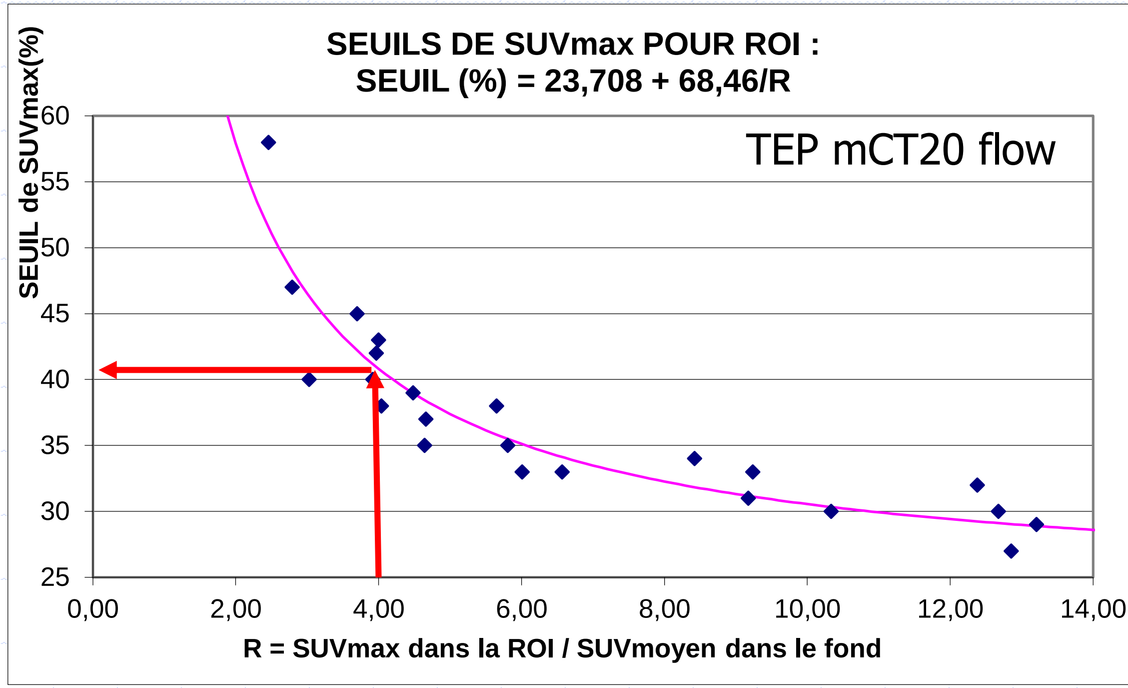

- Minimum de l'histogramme
- % d'un maximum de l'image
- Automatique:
  - Initialisation de T
  - R1={(i,j) / S(i,j)>T} et R2={(i,j) / S(i,j)≤T}
  - M1=Moyenne $_{R1}$ S(i,j) et M2=Moyenne $_{R2}$ S(i,j)
  - T = (M1+M2)/2 tant que M1 ou M2 change
- Optimisation d'une fonctionnelle
- Seuillage adaptatif en % d'un maximum

# SEUILLAGE ADAPTATIF (Daisne)








% SUV max qui conduit à une ROI sphérique de rayon exact

% SUV moyen dans le fond

→ On trace l'hyperbole $\%SUV_{max} = f(SUV_{max}/SUV_{fond})$

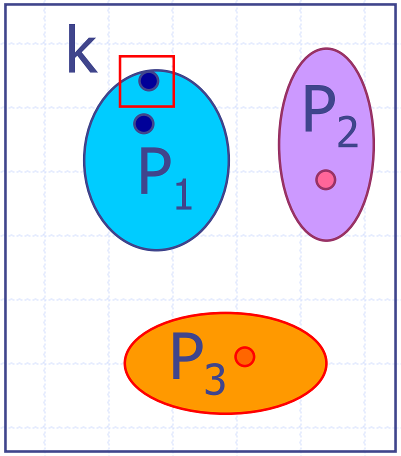
**S Vauclin, Eur J Nucl Med 2006**

YE Erdi 1997 Cancer; T Nishioka 2002; IF Ciernik 2003; AC Paulino 2005; QC Black 2004; V. Grégoire 2005; **JF Daisne 2003 Int J Radiat Oncol Biol Phys;**

# Seuillage par hystérésis

- Définition d'un seuil haut $S_h$ et d'un seuil bas $S_b$
- Seuillage haut: $R' = \{ (i,j) \,/\, S(i,j) > S_h \}$
- $R'' = \{ (i,j) \,/\, S(i,j) > S_b$
  et $(i,j)$ connexe à $(i',j') \in R' \}$
- $R = R' \cup R''$

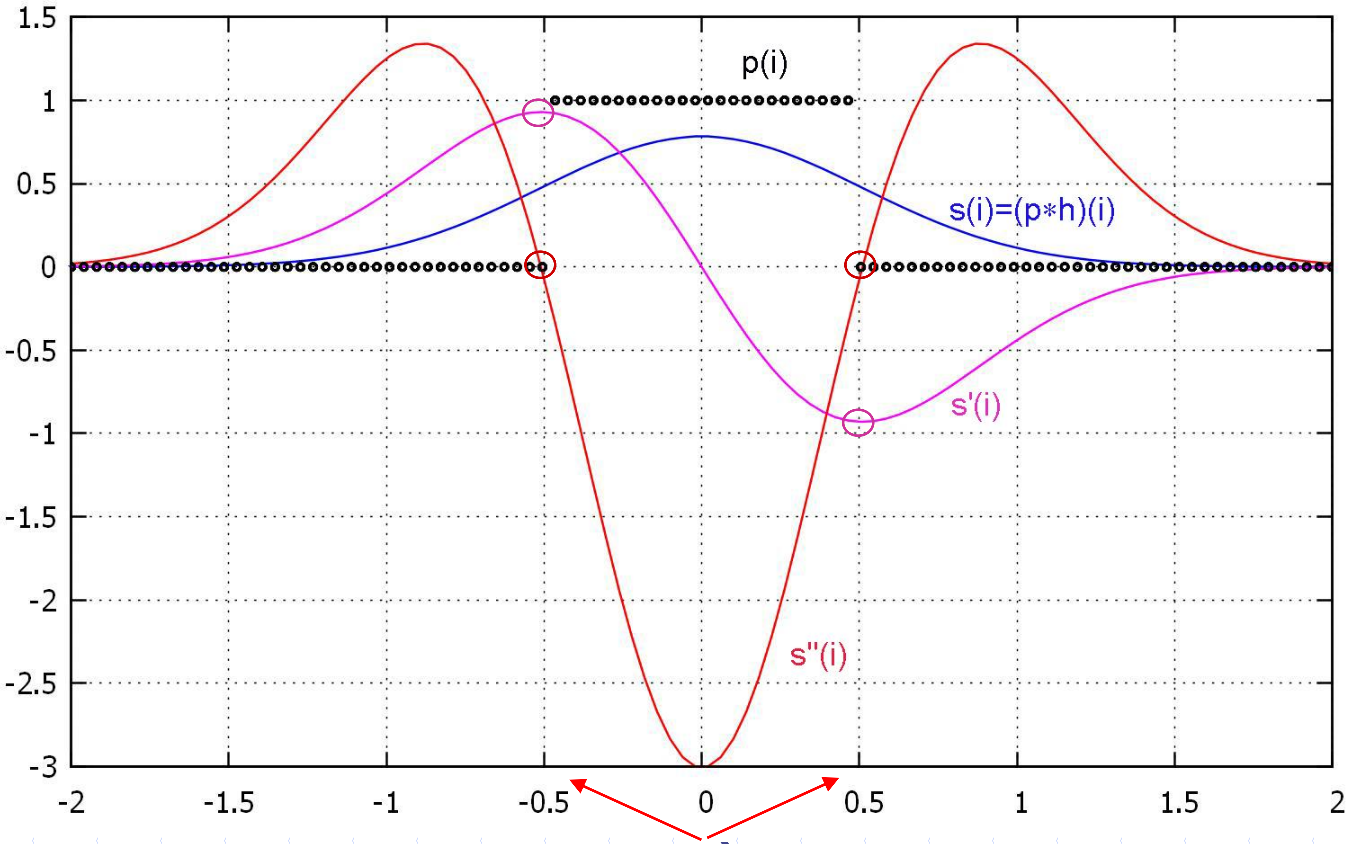
# Croissance de régions




- Initialisation: $R_i = \{P_i\}$, i=1-3
- Pour chaque région i
  - $M_i$ = Moyenne des pixels dans $R_i$
  - Pour chaque pixel k au bord de $R_i$
    - Pour chaque pixel (x,y) voisin de k
      - Si (x,y) non affecté et | S(x,y)-Mi |<$\varepsilon$
      - alors $R_i = R_i \cup \{(x,y)\}$
      - $M_i$ = moyenne des pixels dans Ri
- Si au moins un pixel affecté

PJ Slomka et al. J Nucl Med 1995; 36 (myocarde) – KJ Van Laere et al. J Nucl Med 2002;43 (cerveau)

# Méthodes dérivatives



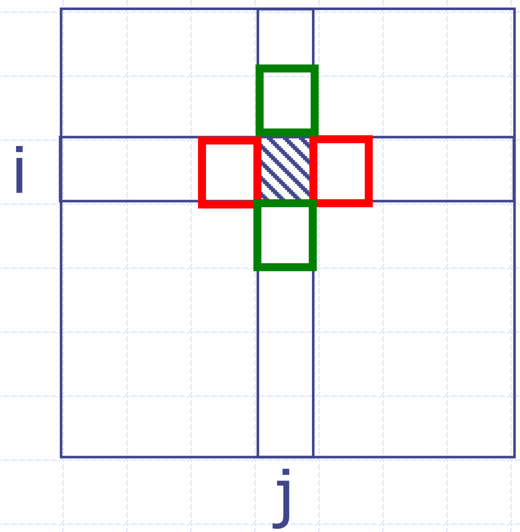

Frontières :

- Extrema du gradient (s′) ○
- Passages par zéro du Laplacien (s″) ○

# Filtres passe-haut: Gradients

$$g_h(i,j) = f(i+1,j) - f(i-1,j) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

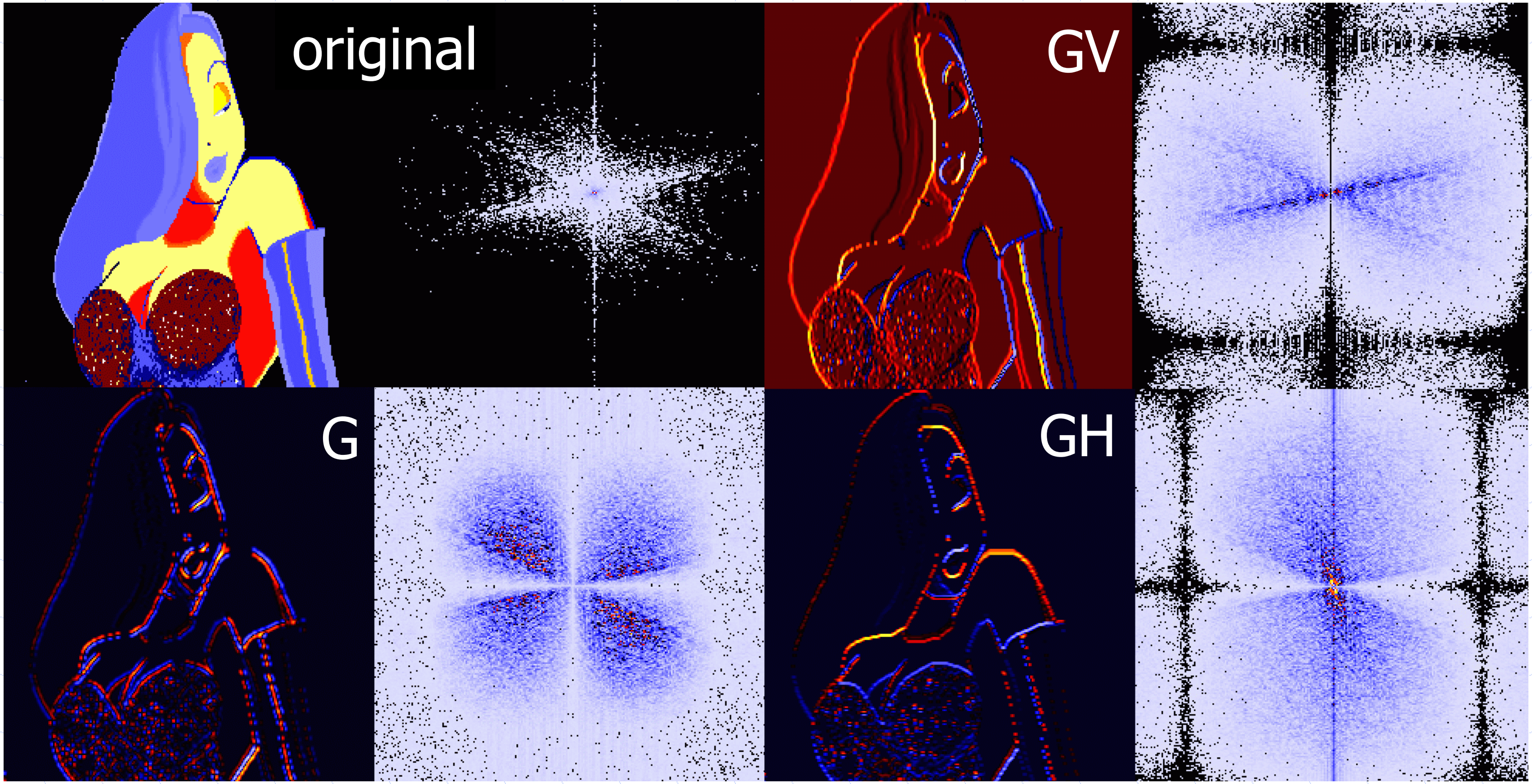
$$g_v(i,j) = f(i,j+1) - f(i,j-1) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




Exemple de généralisation 2d:

$$G_h = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad G_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Filtres passe-haut: Gradients



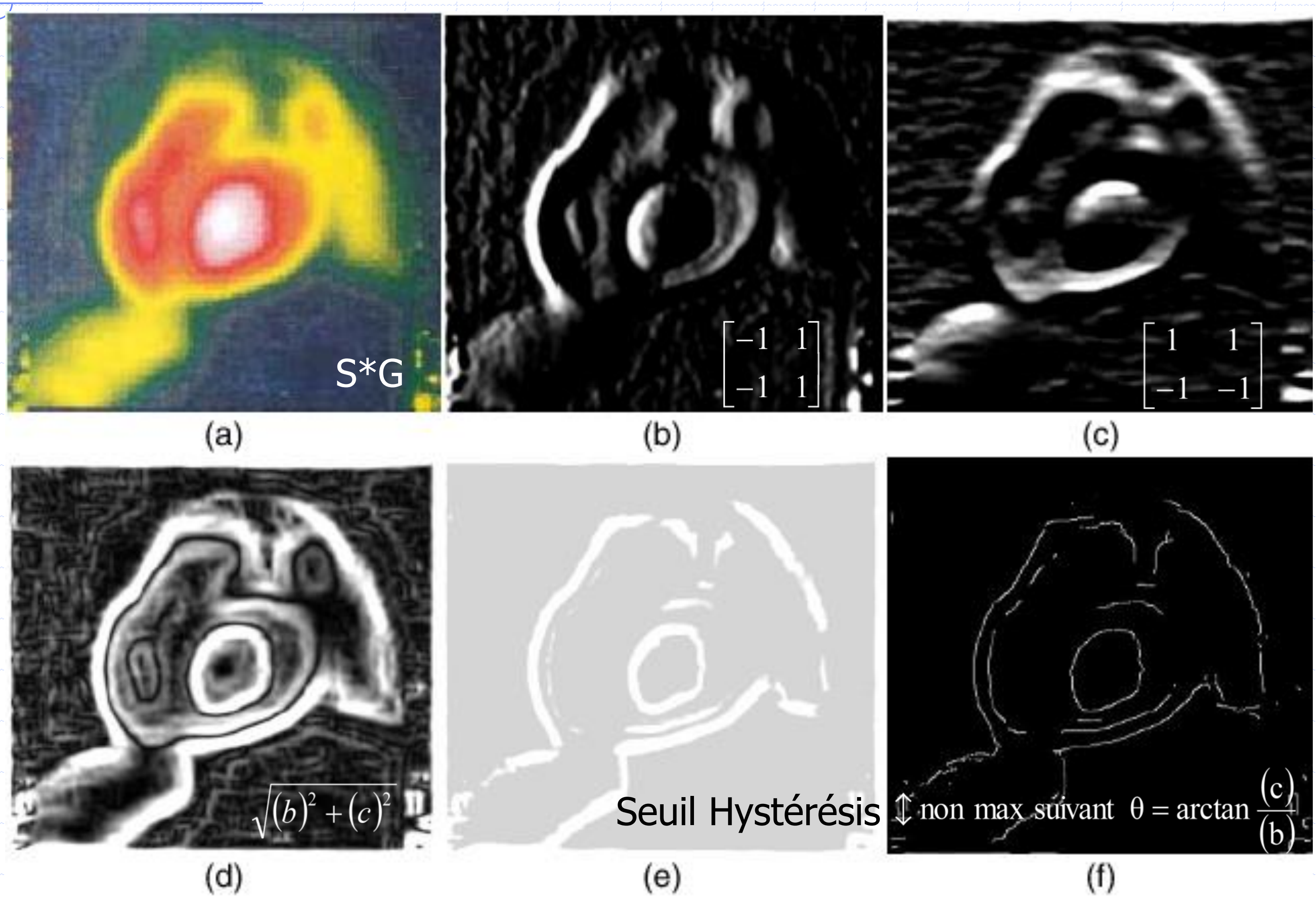

GV (GH) isole les frontières verticales (horizontales)

# Segmentation par gradient (Canny)

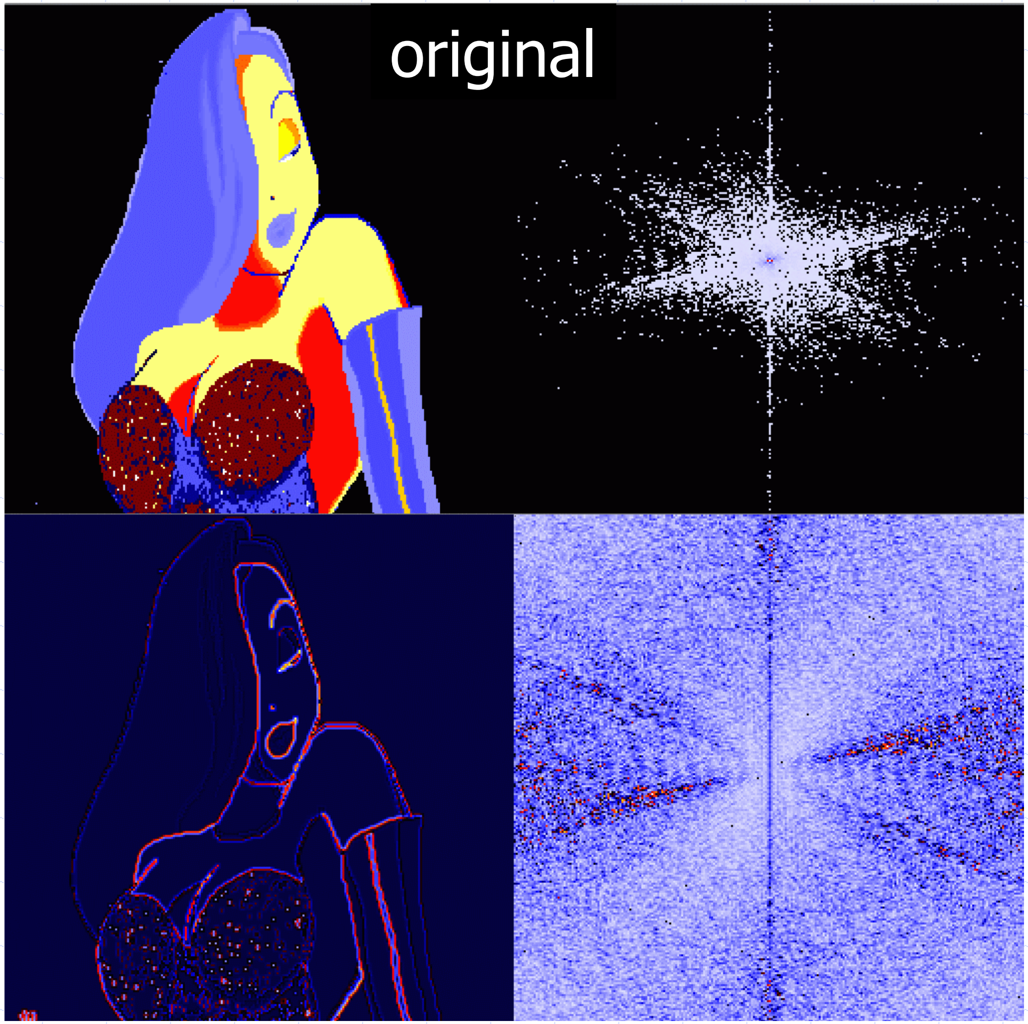
Pour optimiser la sensibilité et la localisation des frontières :

- Lissage par filtre Gaussien
- Calcul du gradient et de sa norme
- Extraction des maxima locaux dans la direction du gradient
- Seuillage par hystérésis de l'image des maxima locaux

# Segmentation par gradient (Canny)



# Filtres passe-haut: Laplacien

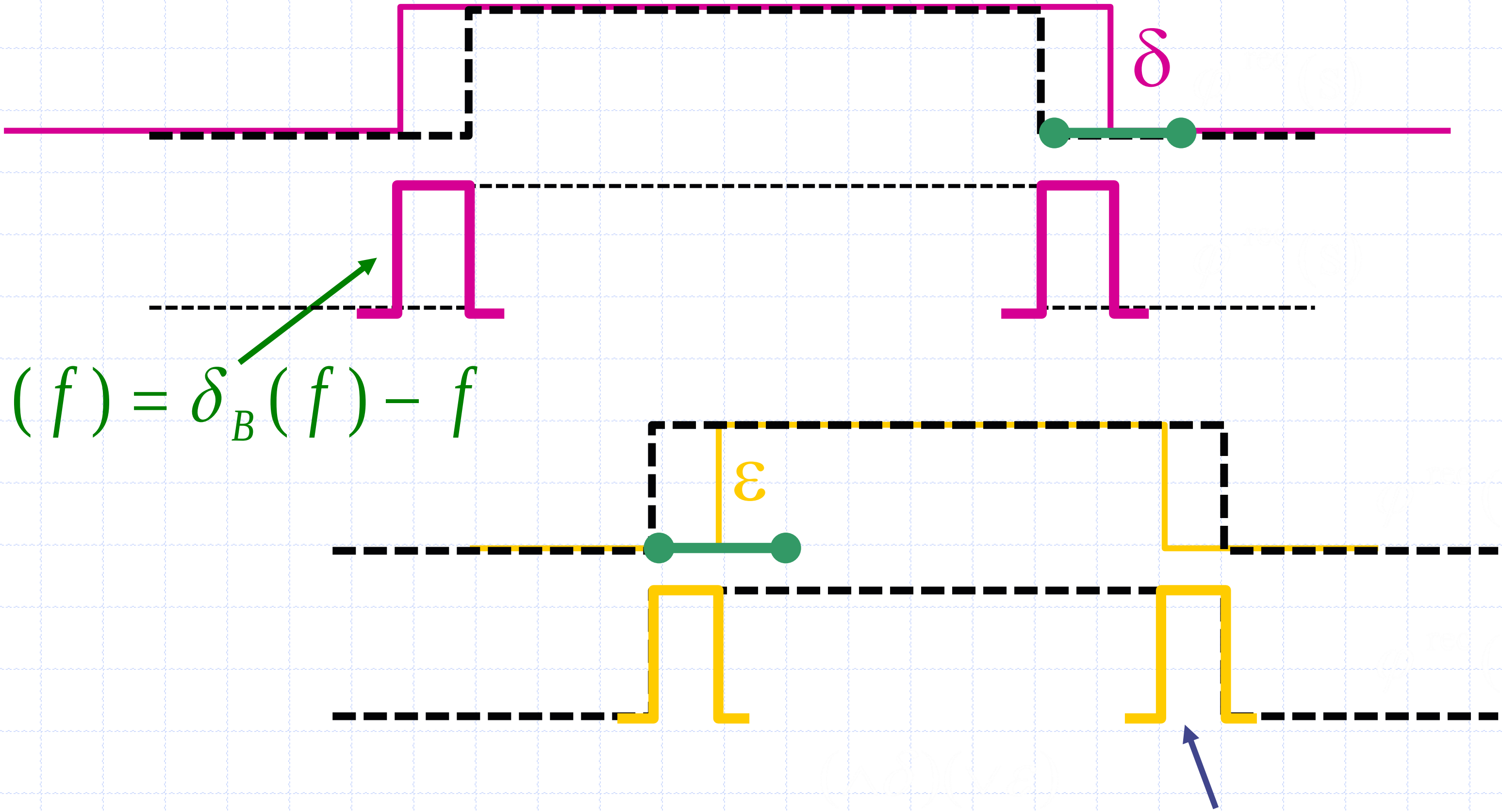



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Segmentation par Laplacien

- Calcul du Laplacien
- Création de l'image des passages par zéro affectés par la norme du gradient
- Seuillage par hystérésis de cette image

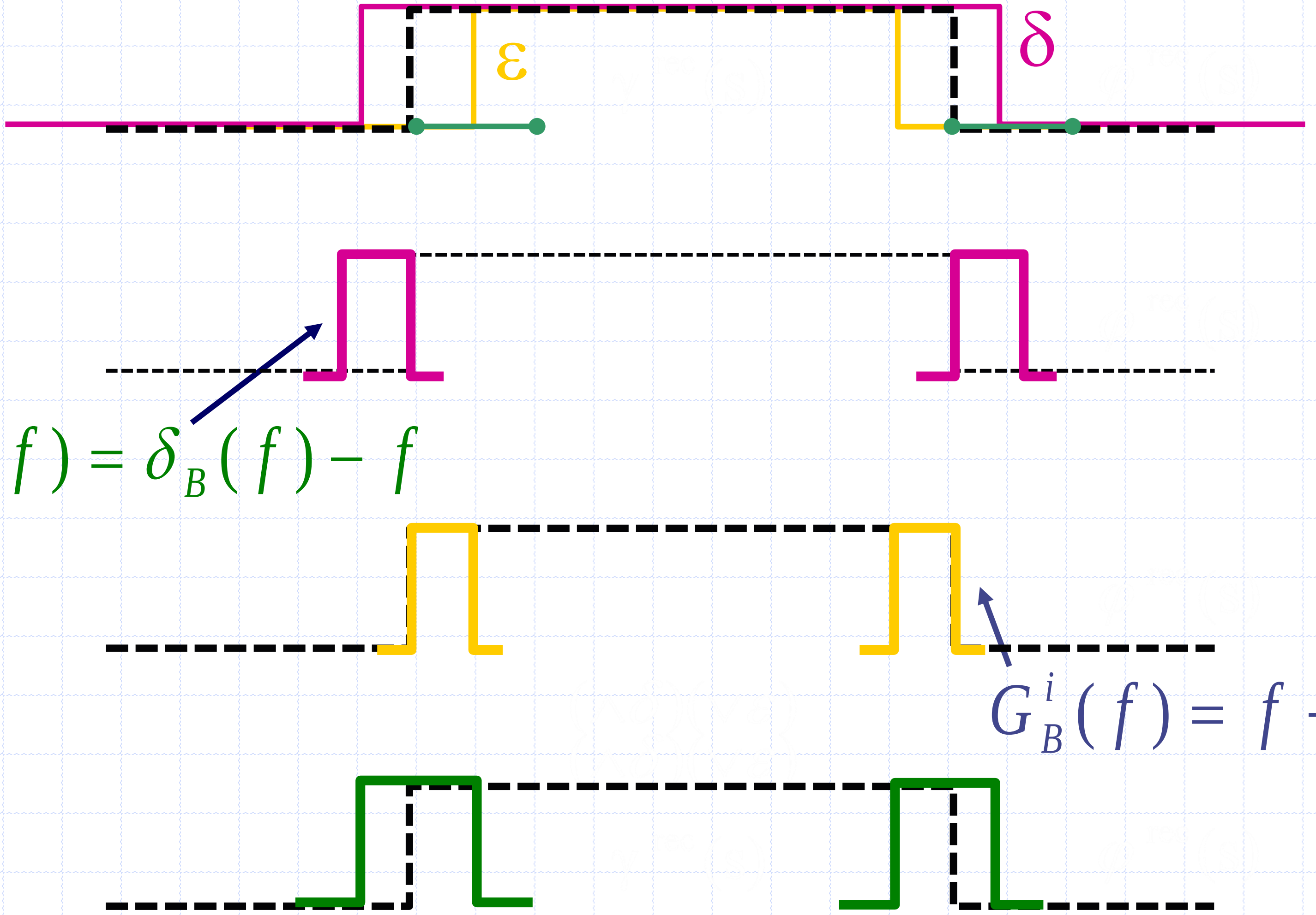
# Gradients morphologiques




$$G_B^e(f) = \delta_B(f) - f$$

$$G_B^i(f) = f - \varepsilon_B(f)$$

# Gradients morphologiques

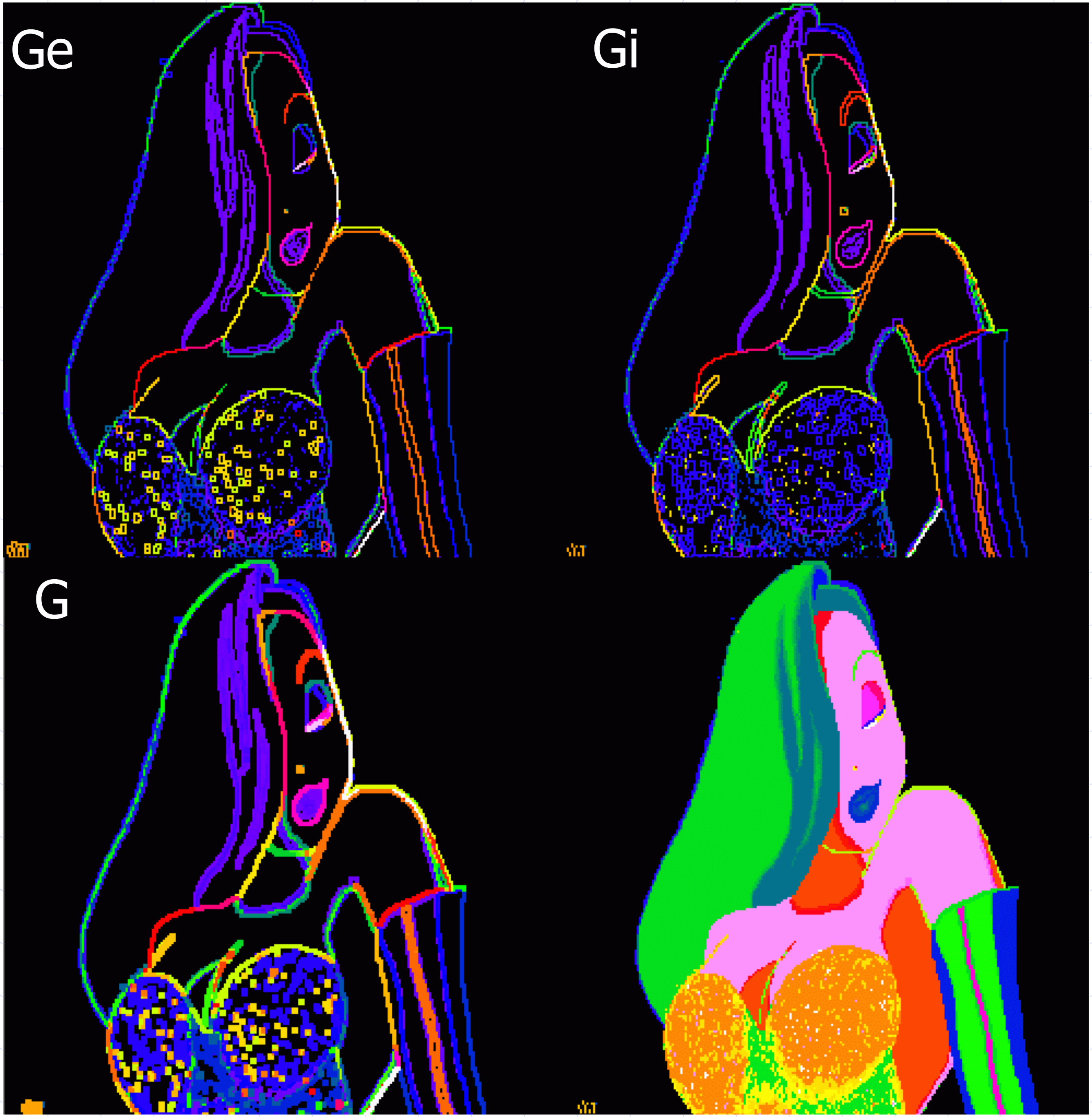



$$G_B^e(f) = \delta_B(f) - f$$

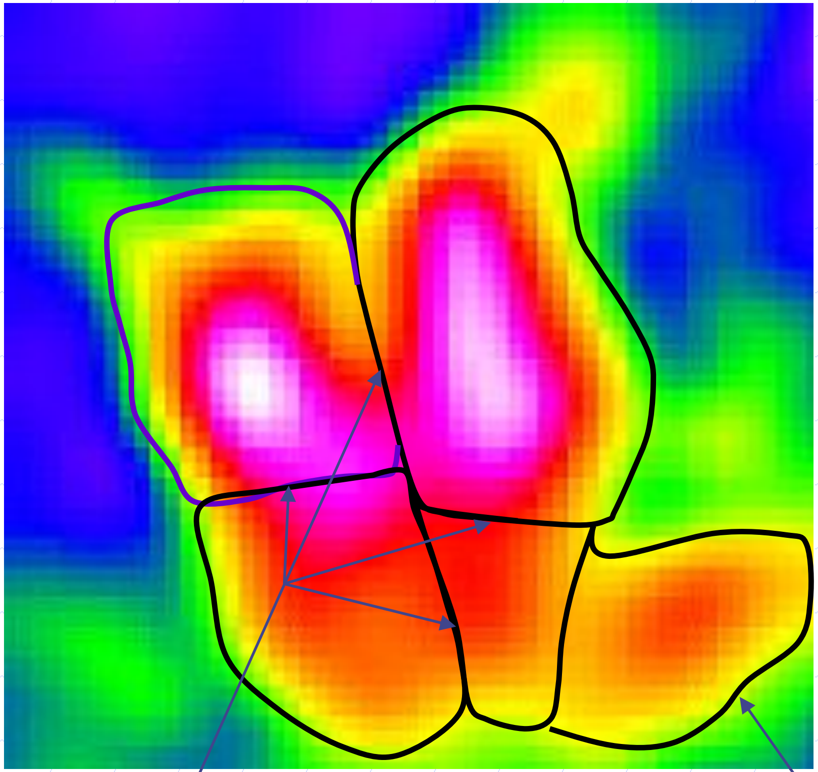
$$G_B^i(f) = f - \varepsilon_B(f)$$

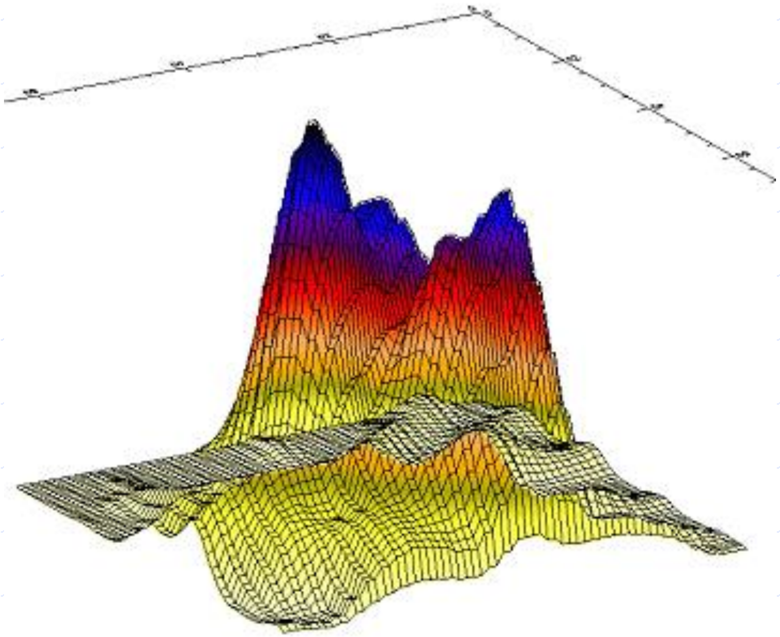
$$G_B(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$$

# Gradients morpho-logiques



# Ligne de partage des eaux

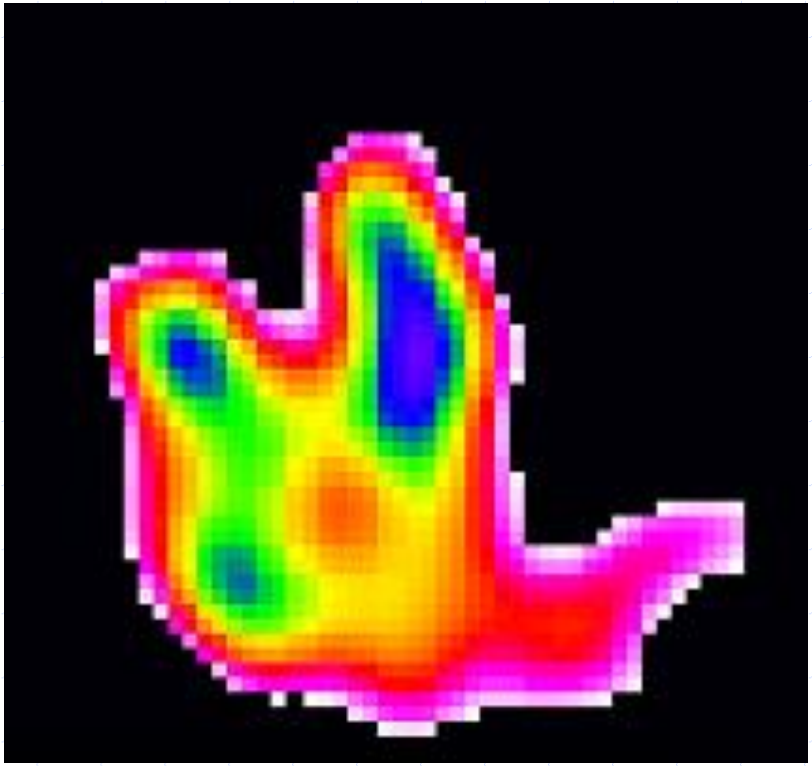


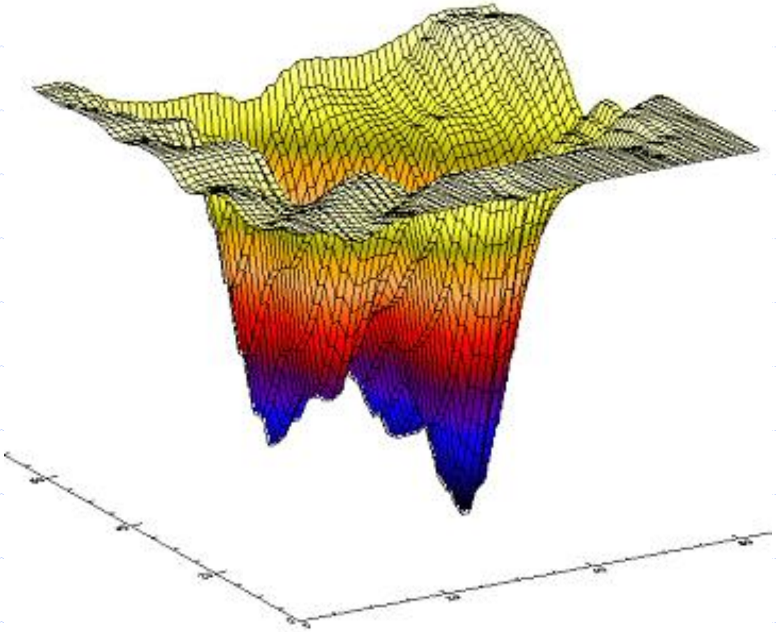


Séparation optimale en fonction de l'origine probable
du photon issue d'une cavité cardiaque, compte tenu du diffusé

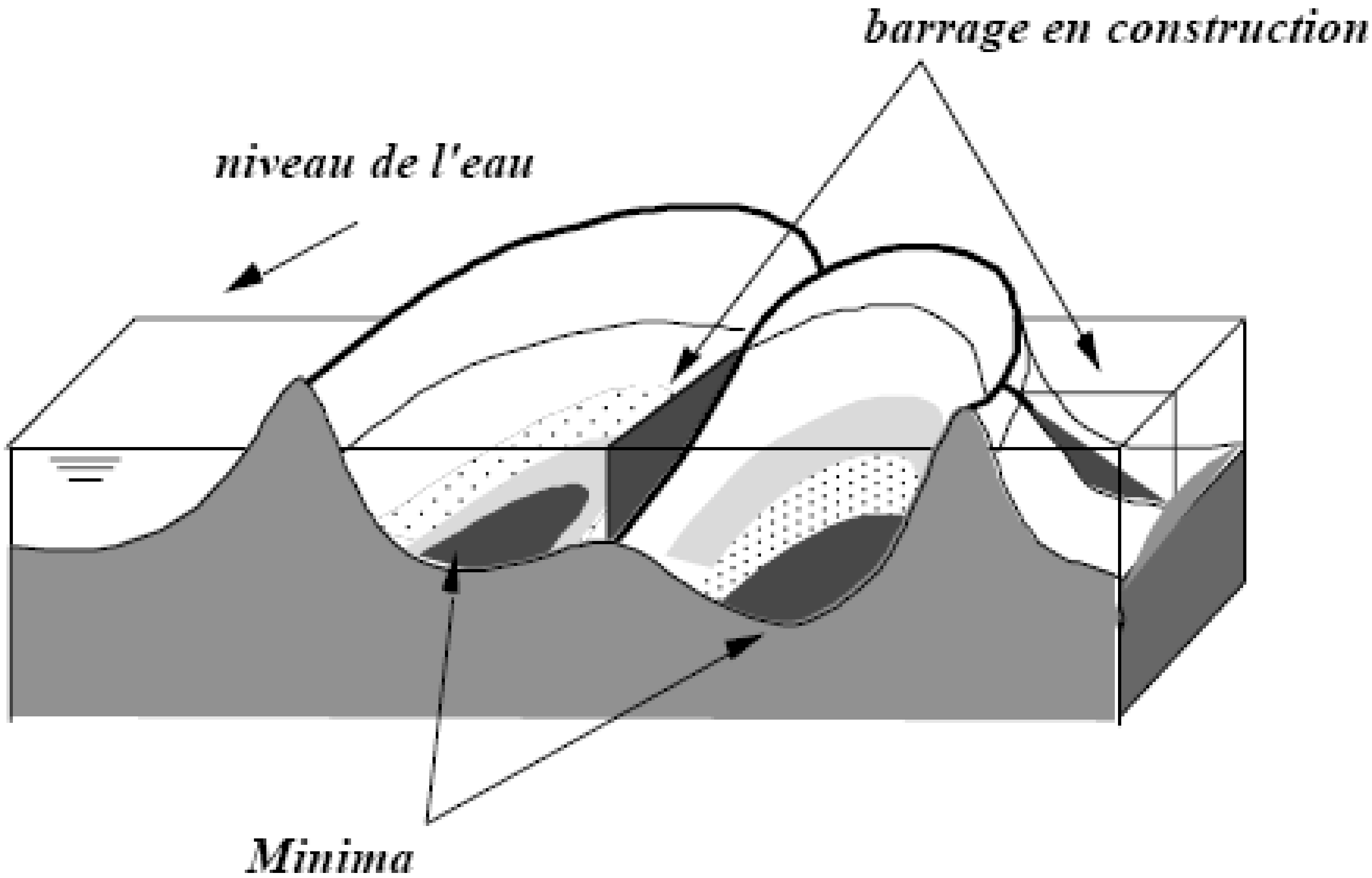
Seuillage pour isoler le fond

# Ligne de partage des eaux





# LPE par immersion

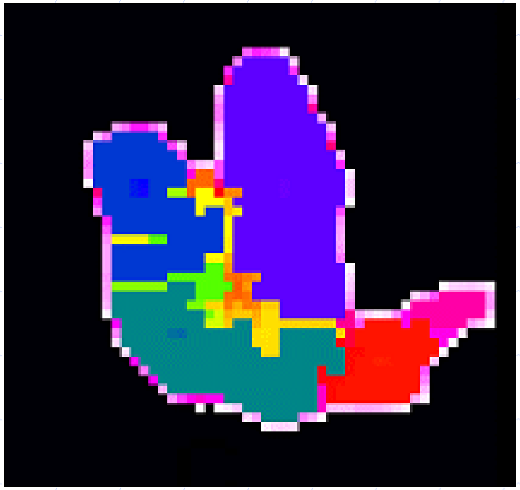


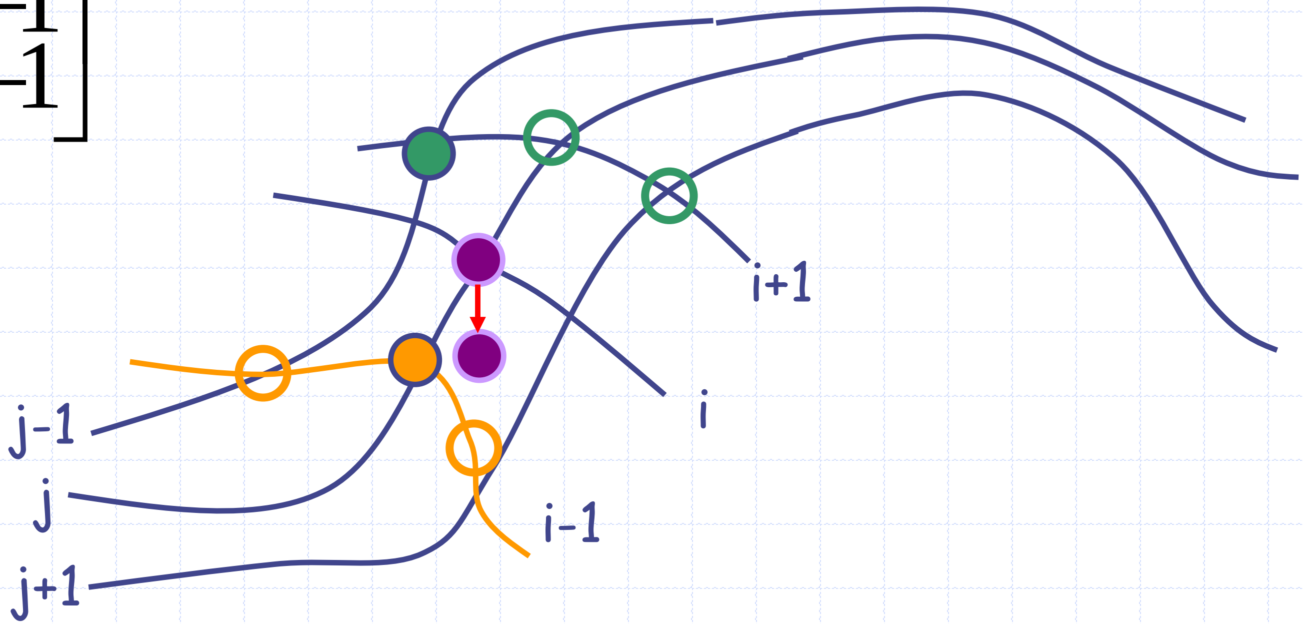

Schmitt M, Mattioli J. « Morphologie mathématique ». Paris, Masson, 1993.

# LPE par amincissement homotopique

$$\text{si} \quad f_{\max} < f(i,j) \leq f_{\min} \quad \text{alors} \quad f(i,j) = f_{\max}$$

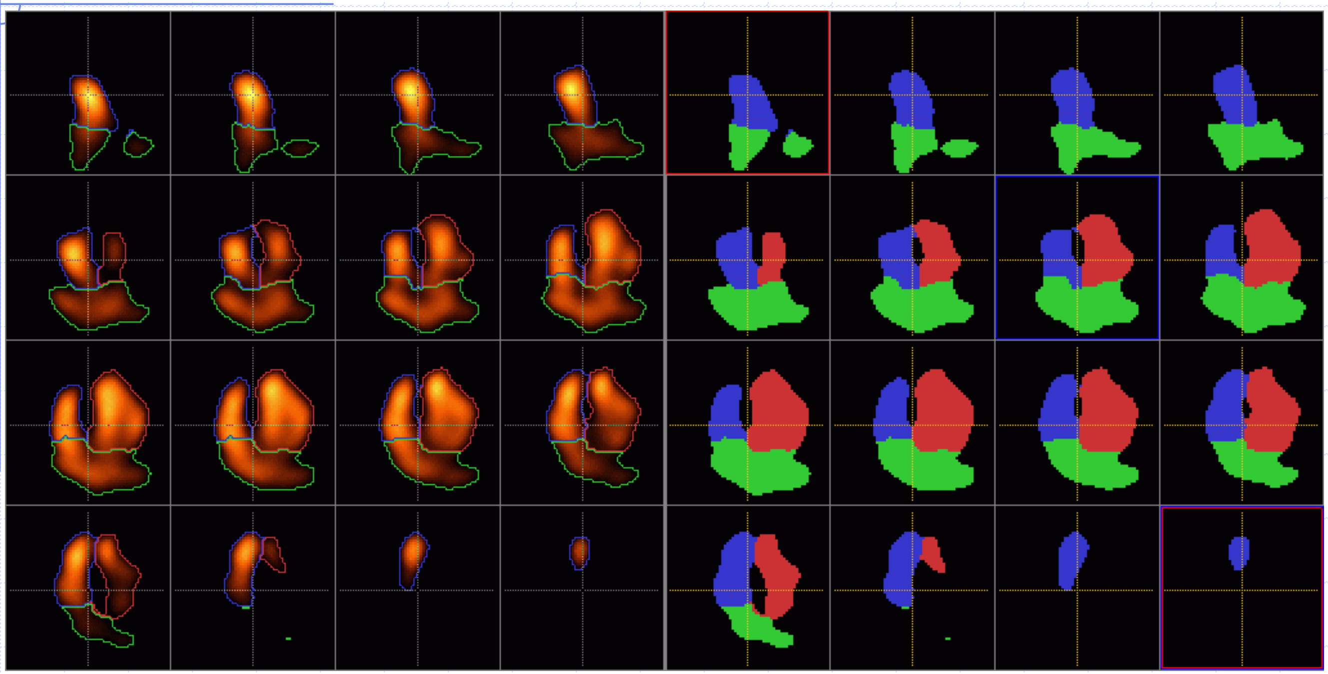
$$\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



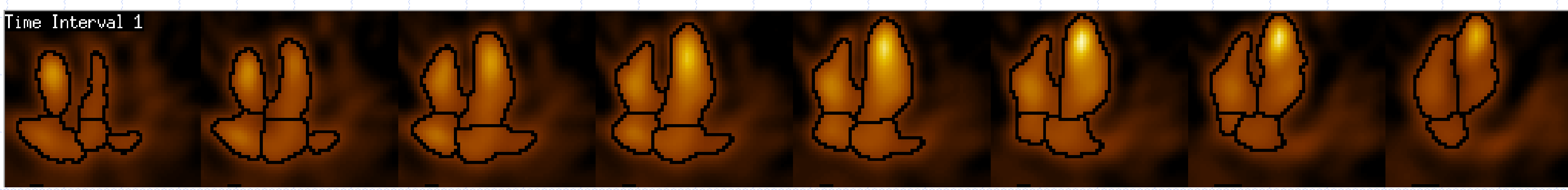



Mariano-Goulart et al.EJNM 1998; 22:1300-07 et Revue Acomen 2000;6:69-77

# Résultats



Amincissement homotopique 2D




Immersion 4D

Mariano-Goulart et al.EJNM 1998;22 et EJNM 2001;28- Daou et al. JNM 2001;42

# SEGMENTATION

- par seuillages :
  - Choix du seuil, Seuillage par hystérésis
- par croissance de régions
- à partir des dérivées du signal
  - par extrema de gradient
  - par passage par zéro du laplacien
- par gradient morphologique : $\delta$-I, I-$\varepsilon$, $\delta$-$\varepsilon$ …
- Par ligne de partage des eaux
  - immersion
  - amincissements homotopiques

# ④ RECALAGE D'IMAGES

Problématique générale

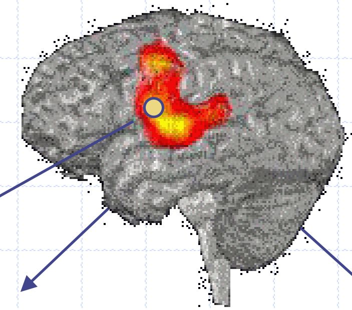
Algorithmes

Applications

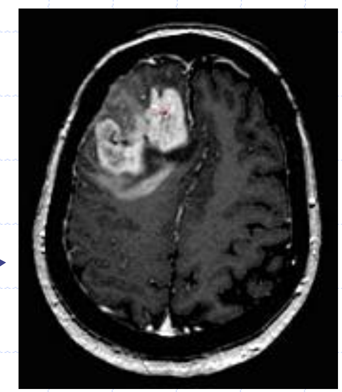
JBA MAINTZ Med Image Anal 1998;2 - O.MIGNECO Revue ACOMEN 1999;

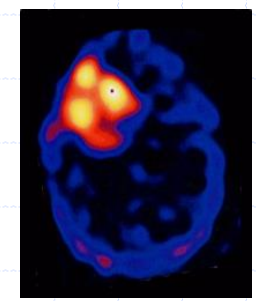
# Problème

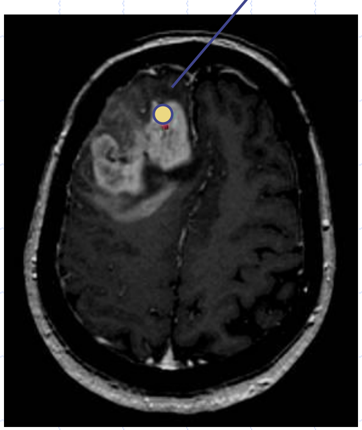
modèle

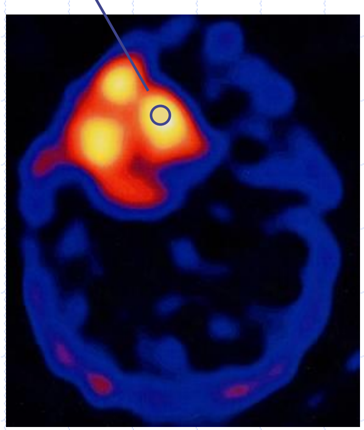



P(x,y,z)



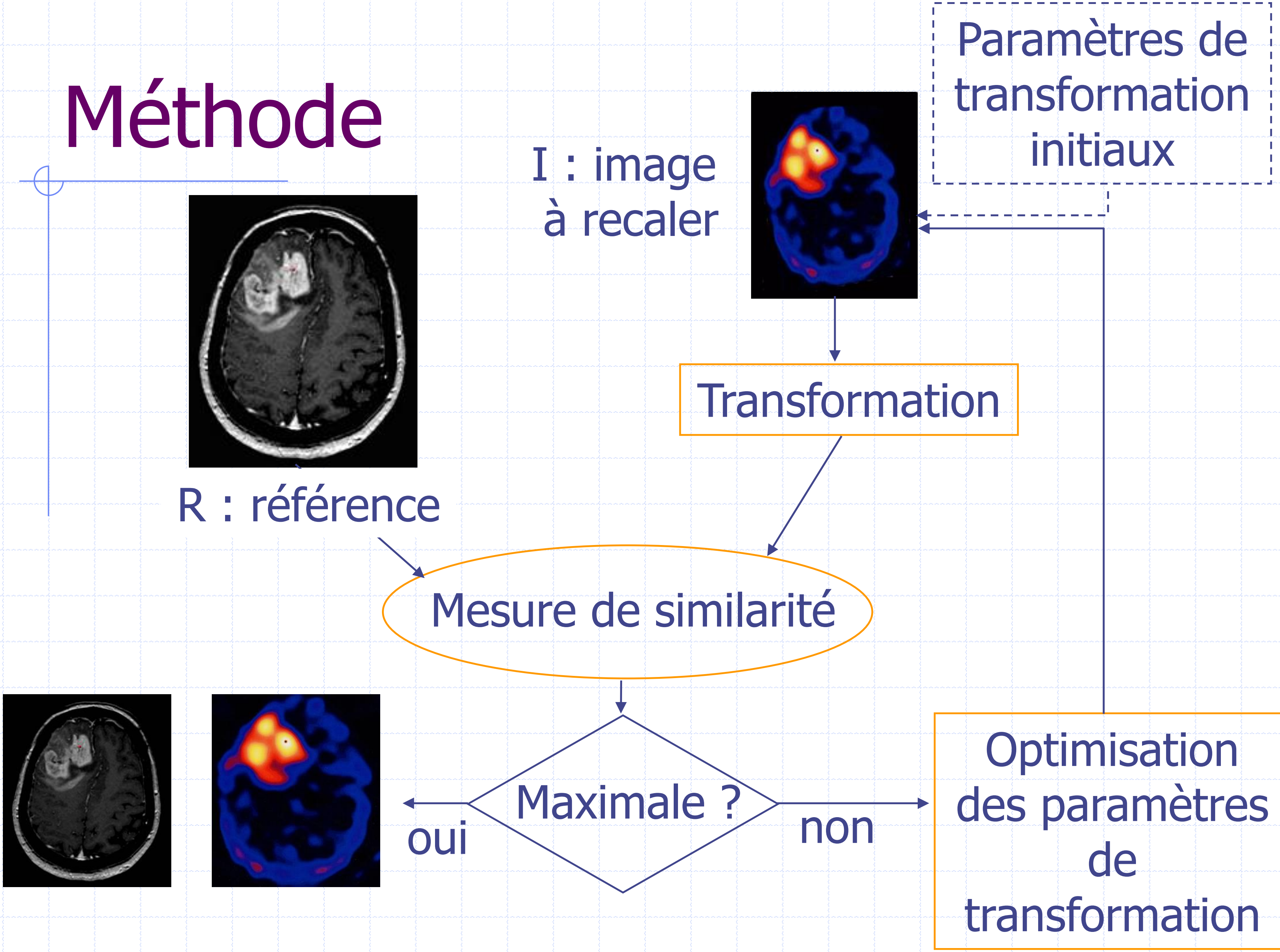




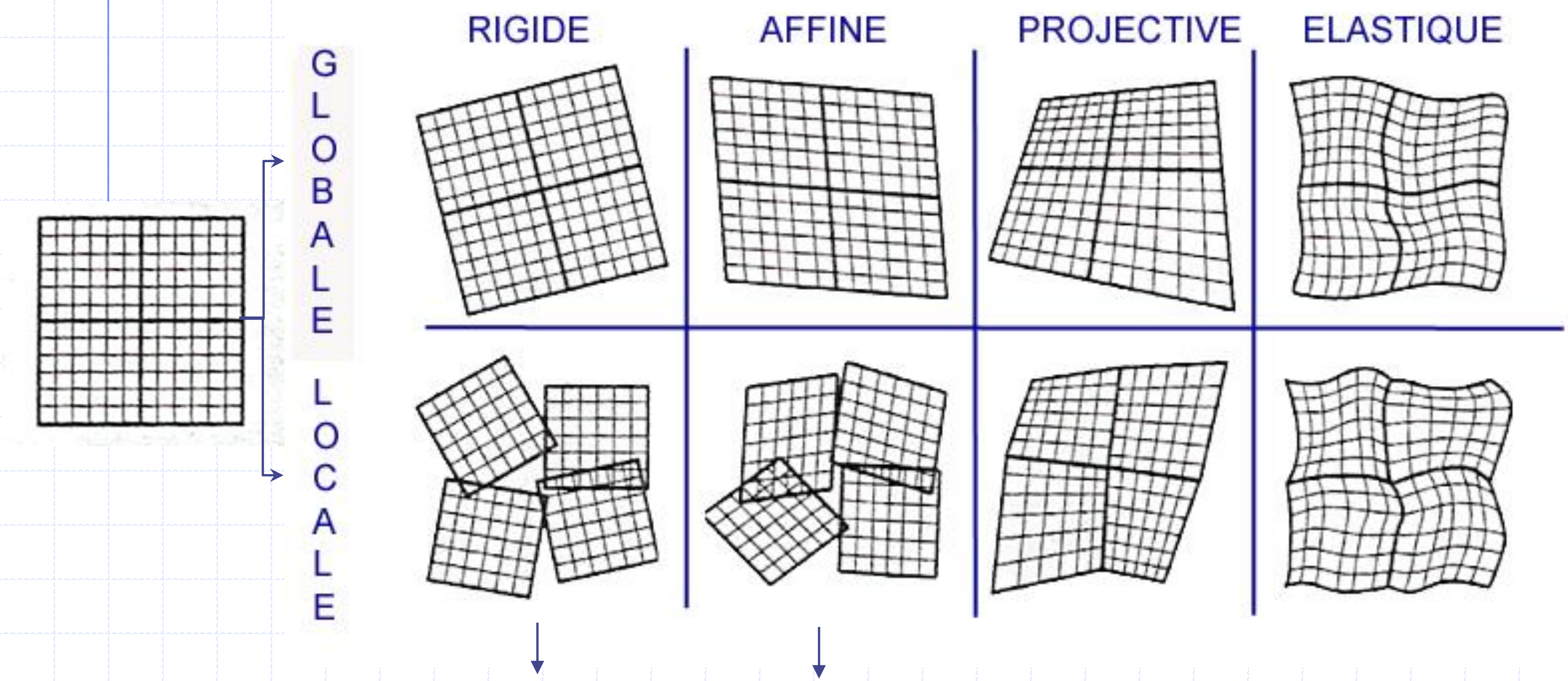


Distorsions ≠
Nature du contraste ≠
Résolution ≠, SLID ?
Bruit ≠, ± dép. signal

# Méthode


Paramètres de transformation initiaux
I : image à recaler
R : référence
Transformation
Mesure de similarité
Maximale ?
oui
non
Optimisation des paramètres de transformation

# Transformations T



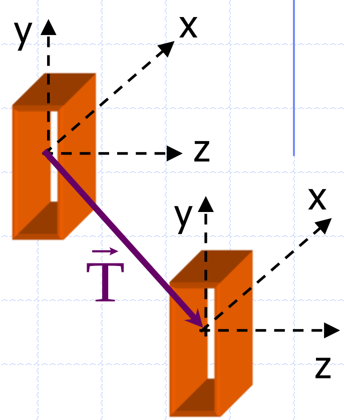

Translation (3)
rotation (3)

Translation (3)
Rotation (3)
Homothéties (3)
Gauchissement (3)

# Transformations rigides

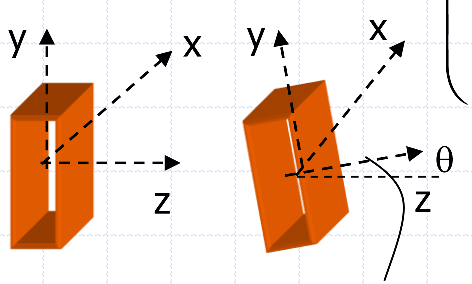
Translation

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathrm{T_x} \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{T_y} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{T_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + T_x \\ y_1 + T_y \\ z_1 + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$




Rotation

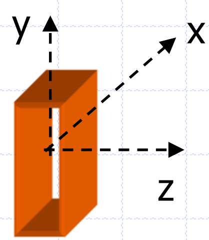
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{\mathrm{x}} & \sin\theta_{\mathrm{x}} & 0 \\ 0 & -\sin\theta_{\mathrm{x}} & \cos\theta_{\mathrm{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos\theta_{\mathrm{x}}.y_1 + \sin\theta_{\mathrm{x}}.z_1 \\ -\sin\theta_{\mathrm{x}}.y_1 + \cos\theta_{\mathrm{x}}.z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

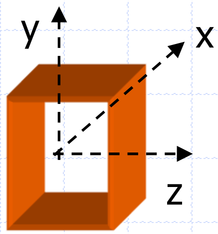


# Transformations affines

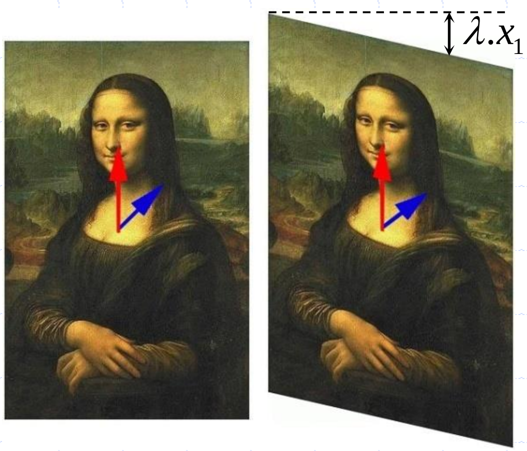
- Translation
- Rotation
- Homothétie

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{H_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{H_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{H_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x.x_1 \\ H_y.y_1 \\ H_z.z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$




- Gauchissement




$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + \lambda.x_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

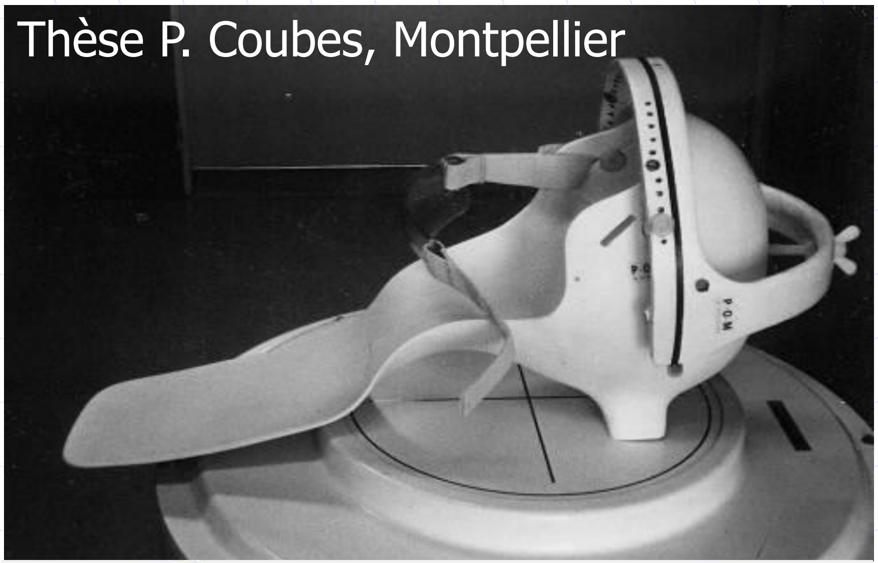
# Mesures de similarité S, sur…

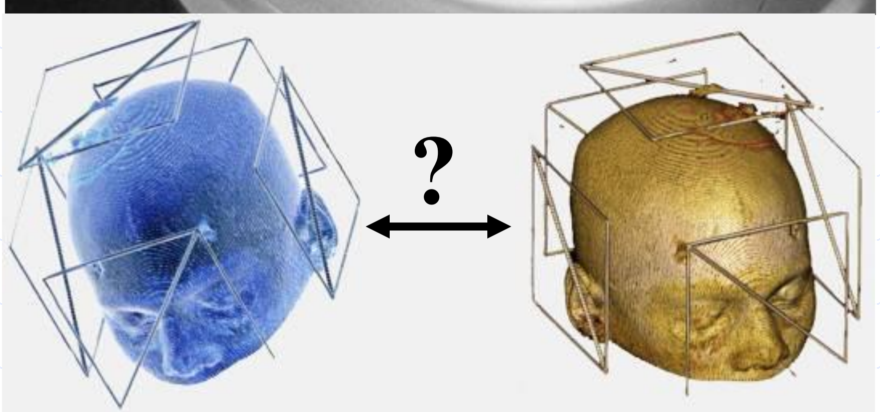
$$T = \arg\max_{T \in E} S\left[\{V^R\};\{T(V^I)\}\right]$$

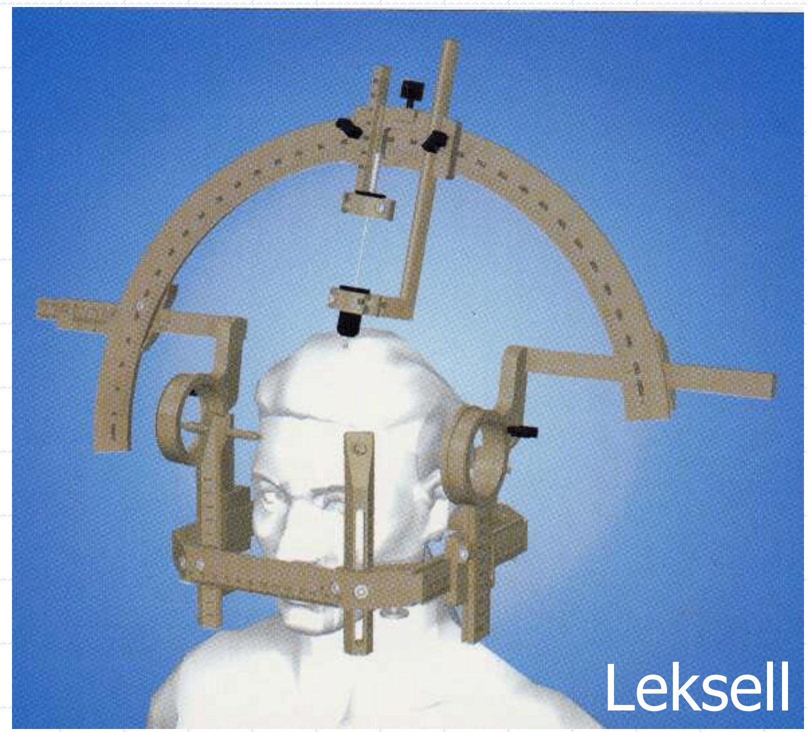
- des marqueurs :
  - artificiels externes ou frontières anatomiques
- les valeurs des voxels
  - différences, variances, corrélations,…
- Une information mutuelle…

# Marqueurs

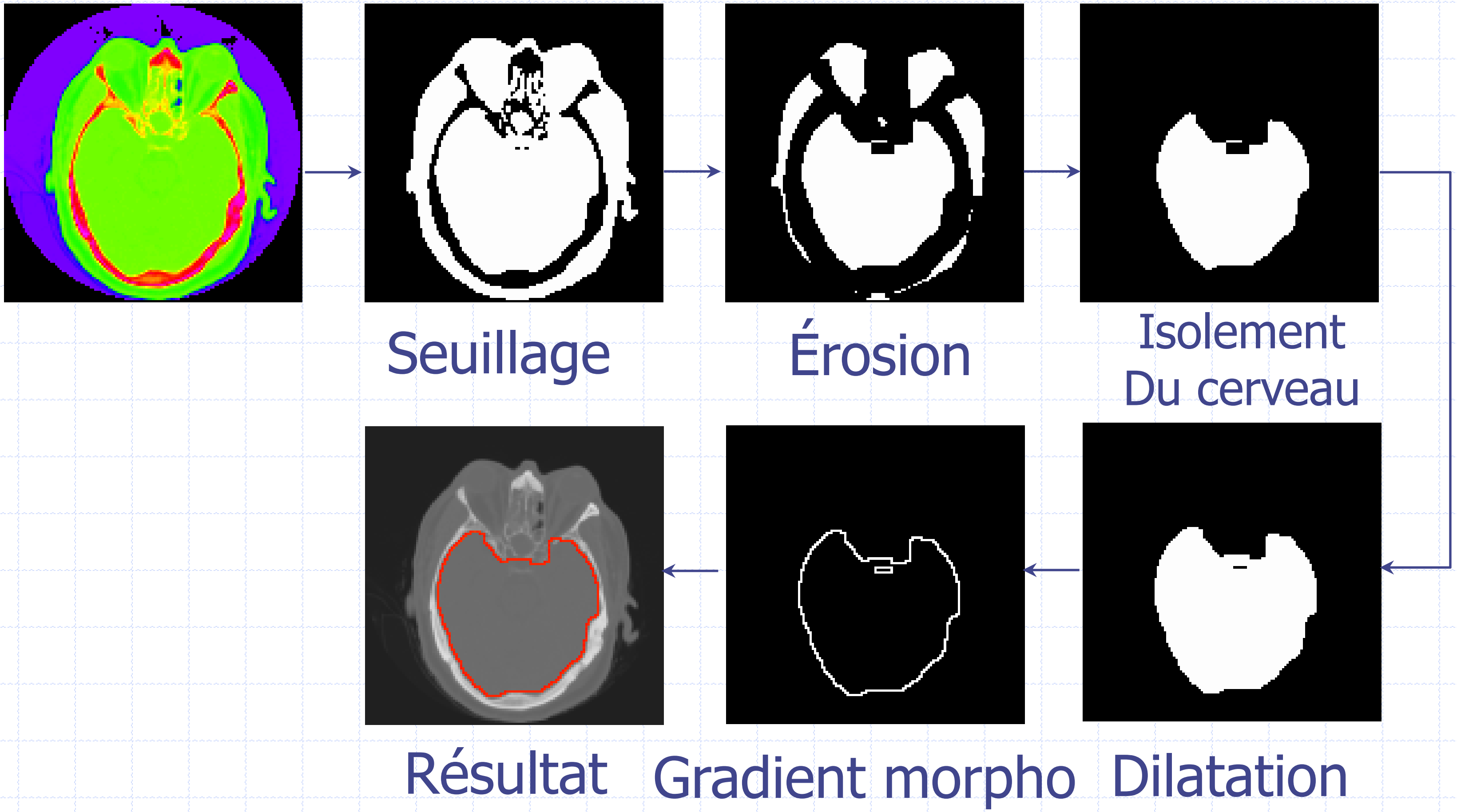
$$S\left[\{V^R\};\{T(V^I)\}\right] = -\sum_m \left\| V_m^R - T(V_m^I) \right\|$$



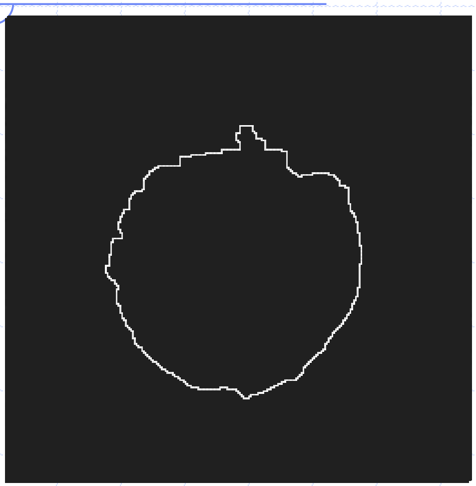



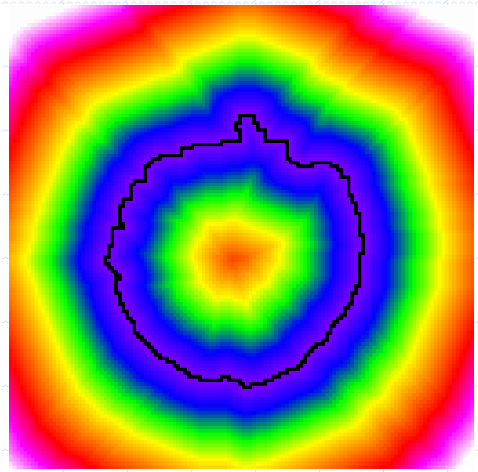
# Extraction des frontières

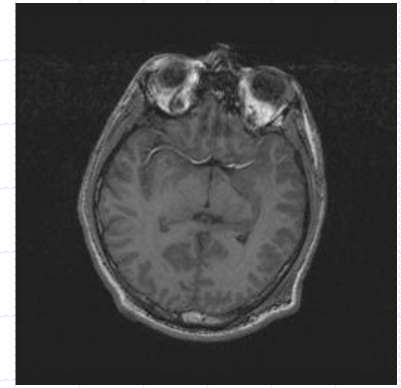



JL Bernon et al, Comput Med Imag & Graphics 2001; 25

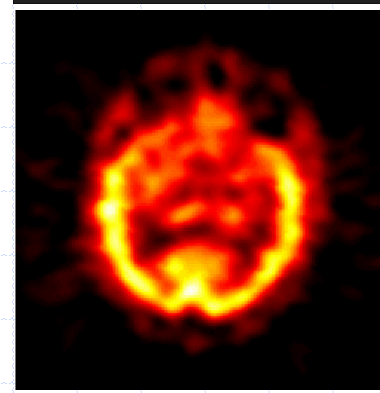
# Recalage des frontières

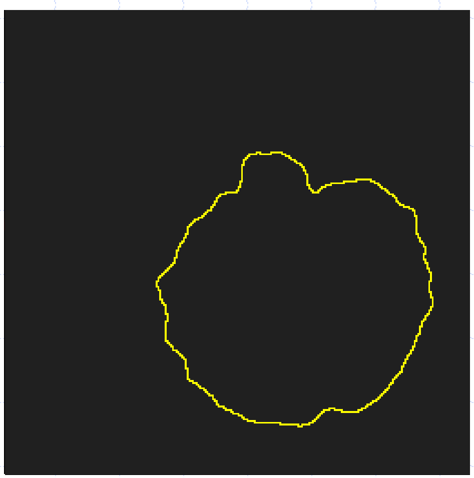


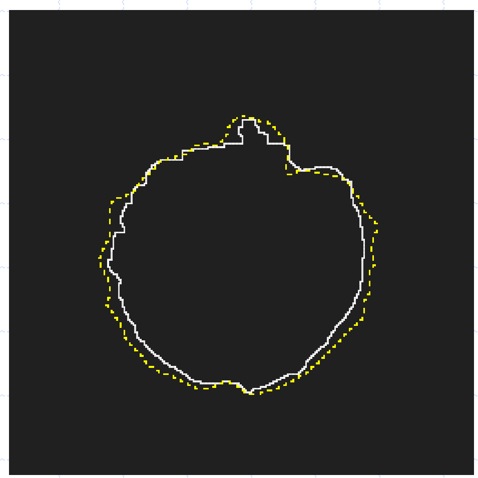


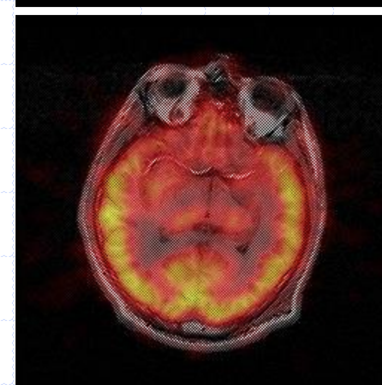


Chanfrein



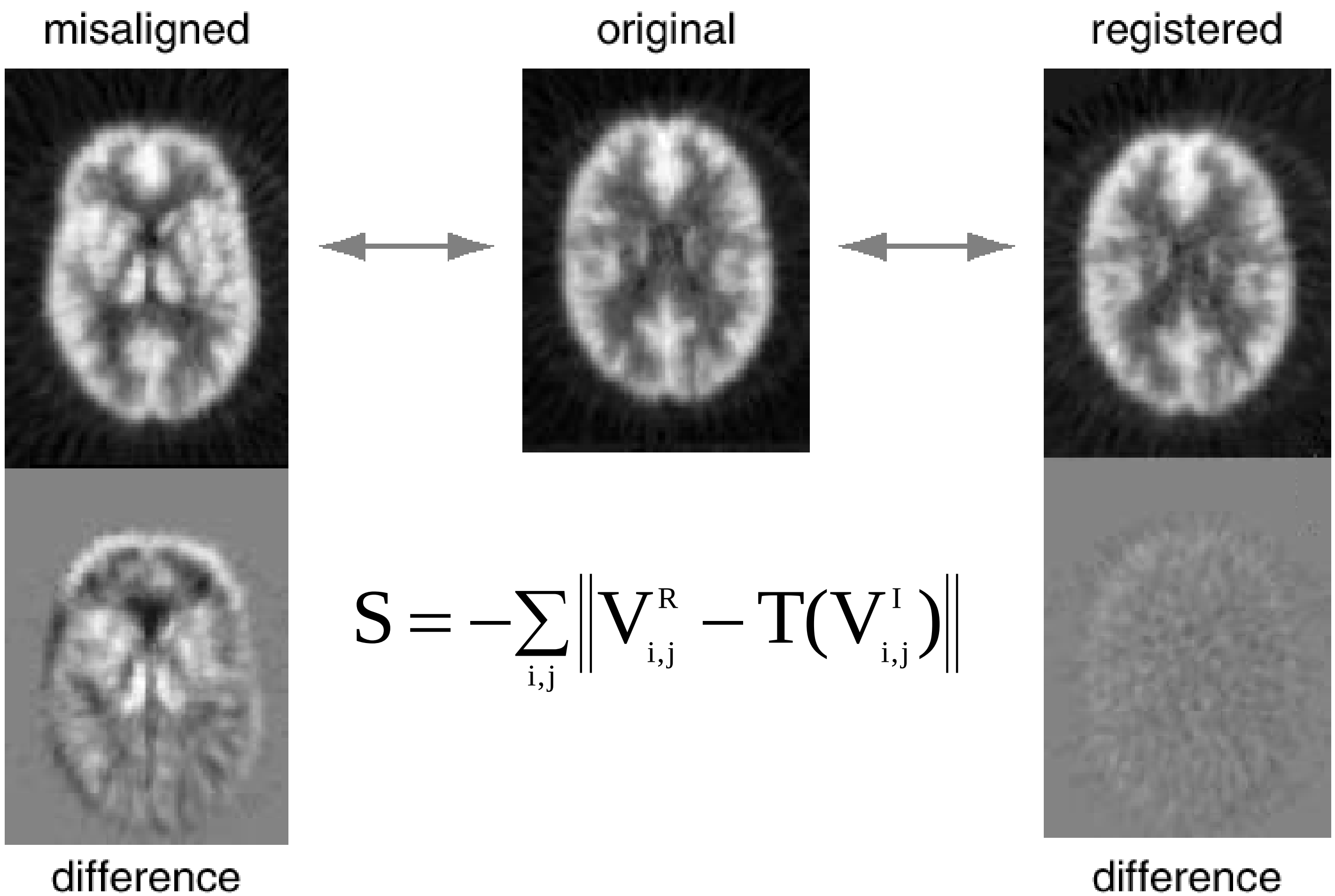






JL Bernon et al, Comput Med Imag & Graphics 2001; 25

# Différence d'intensité




$$S = -\sum_{i,j} \left\| V^{R}_{i,j} - T(V^{I}_{i,j}) \right\|$$

Alternative : différences de variances

# Inter-corrélation maximale

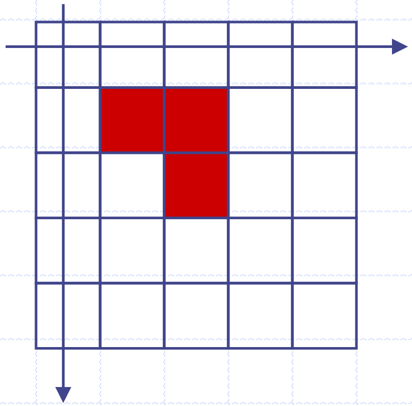
$$r=\frac{\sum_j\left(V_j^R-\overline{V^R}\right)\left(T(V_j^I)-\overline{T(V^I)}\right)}{\sqrt{\sum_j\left(V_j^R-\overline{V^R}\right)^2.\sum_j\left(T(V_j^I)-\overline{T(V^I)}\right)^2}}$$

$$r=\frac{\sum_j V_j^R.T(V_j^I)-N.\overline{V^R}.\overline{T(V^I)}}{\sigma_{V^R}.\sigma_{T(V^I)}}$$

$$\boxed{S=\sum_j V_j^R.T(V_j^I)}$$

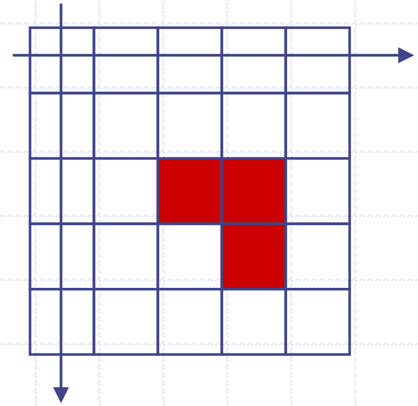
L Junck et al. J Nucl Med 1990;31

# Exemple : translation d'images



$$\vec{v}_V^R \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_H^R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{v}_V^I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_H^I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$IC_H(k) = \sum_j v_H^R(j).v_H^I(j-k)$$

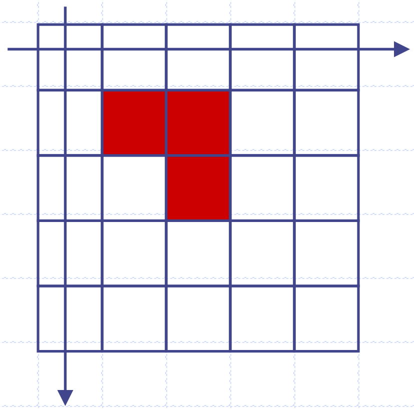
Décalage à droite de k

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ 2

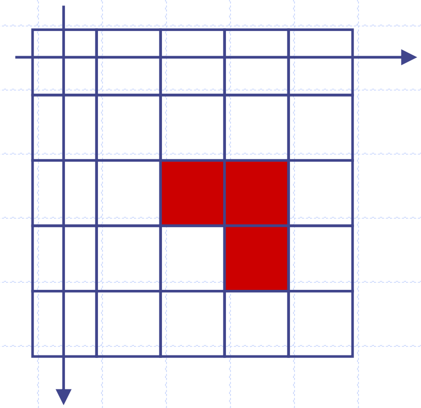
D. Mariano-Goulart et al. J Med Nucl Biophy 1992; 16

# Exemple : translation d'images



$$\vec{v}_V^R \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_H^R \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{v}_V^I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_H^I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$IC_H(k) = \sum_j v_H^R(j).v_H^I(j-k)$$

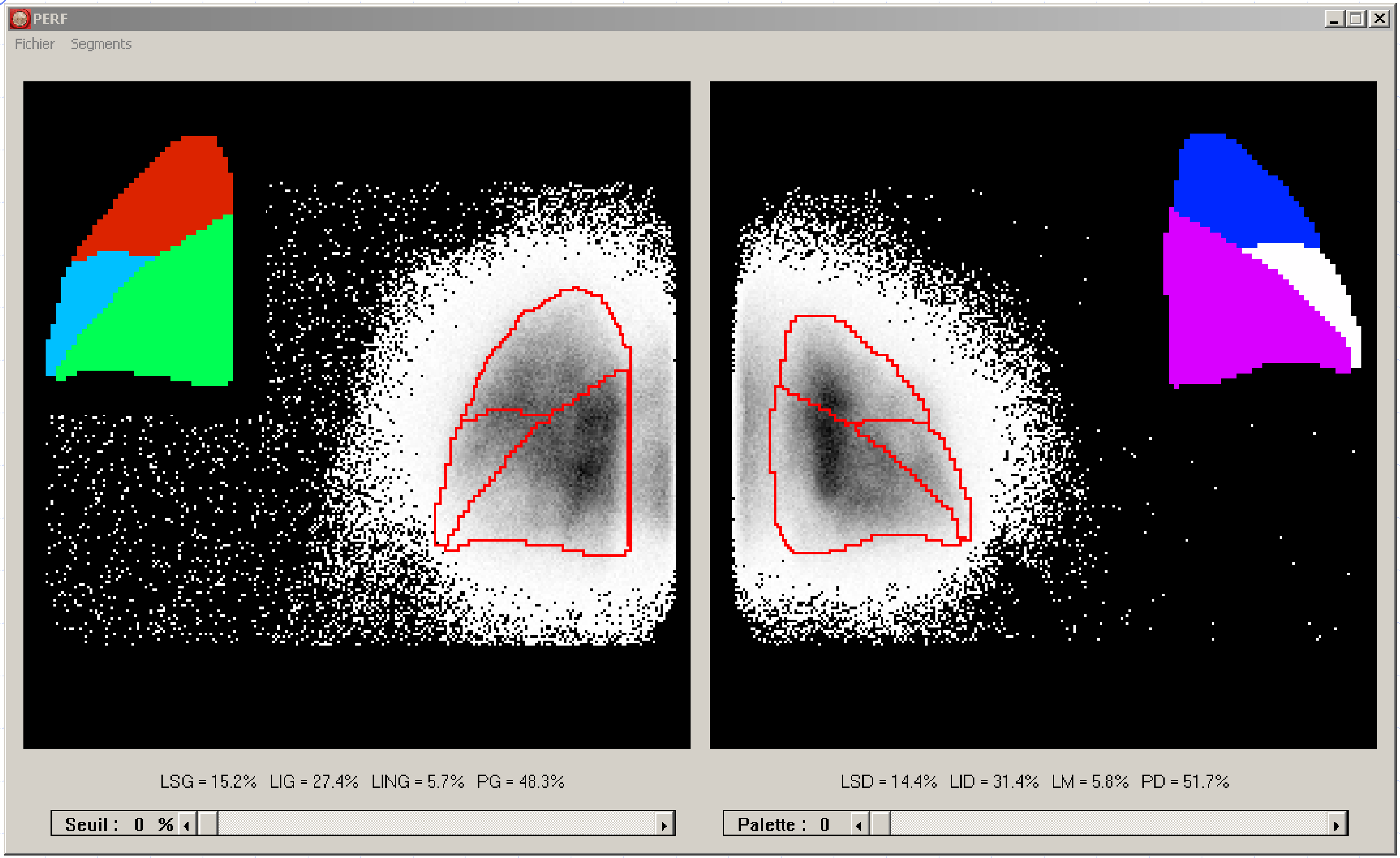
Décalage à droite de k

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & & \leftarrow k = -1 \end{matrix}$$

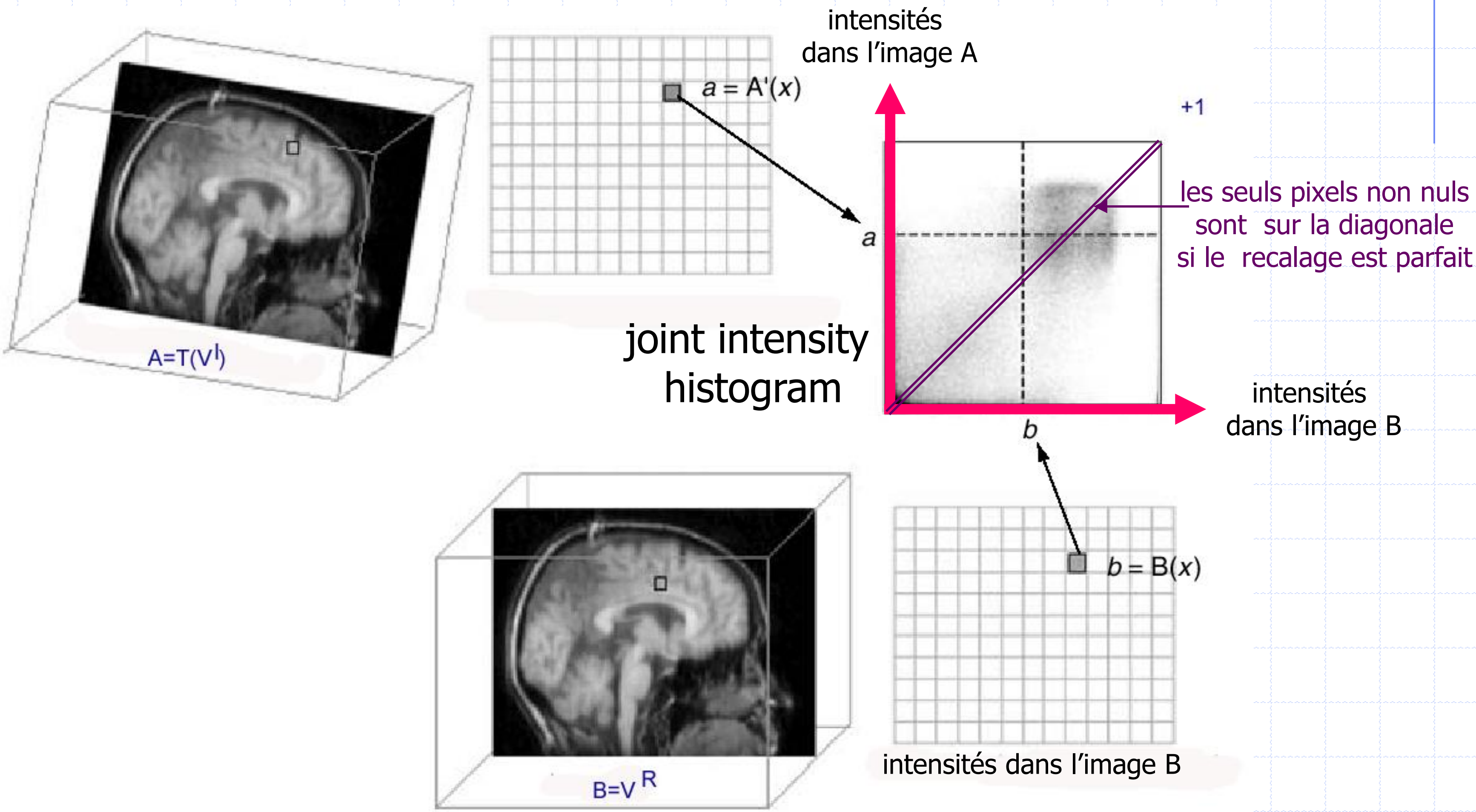
5

D. Mariano-Goulart et al. J Med Nucl Biophy 1992; 16

# Intercorrélation maximale



# Information mutuelle




DL Hill et al. Phys med Biol 2001;46

# Optimisation

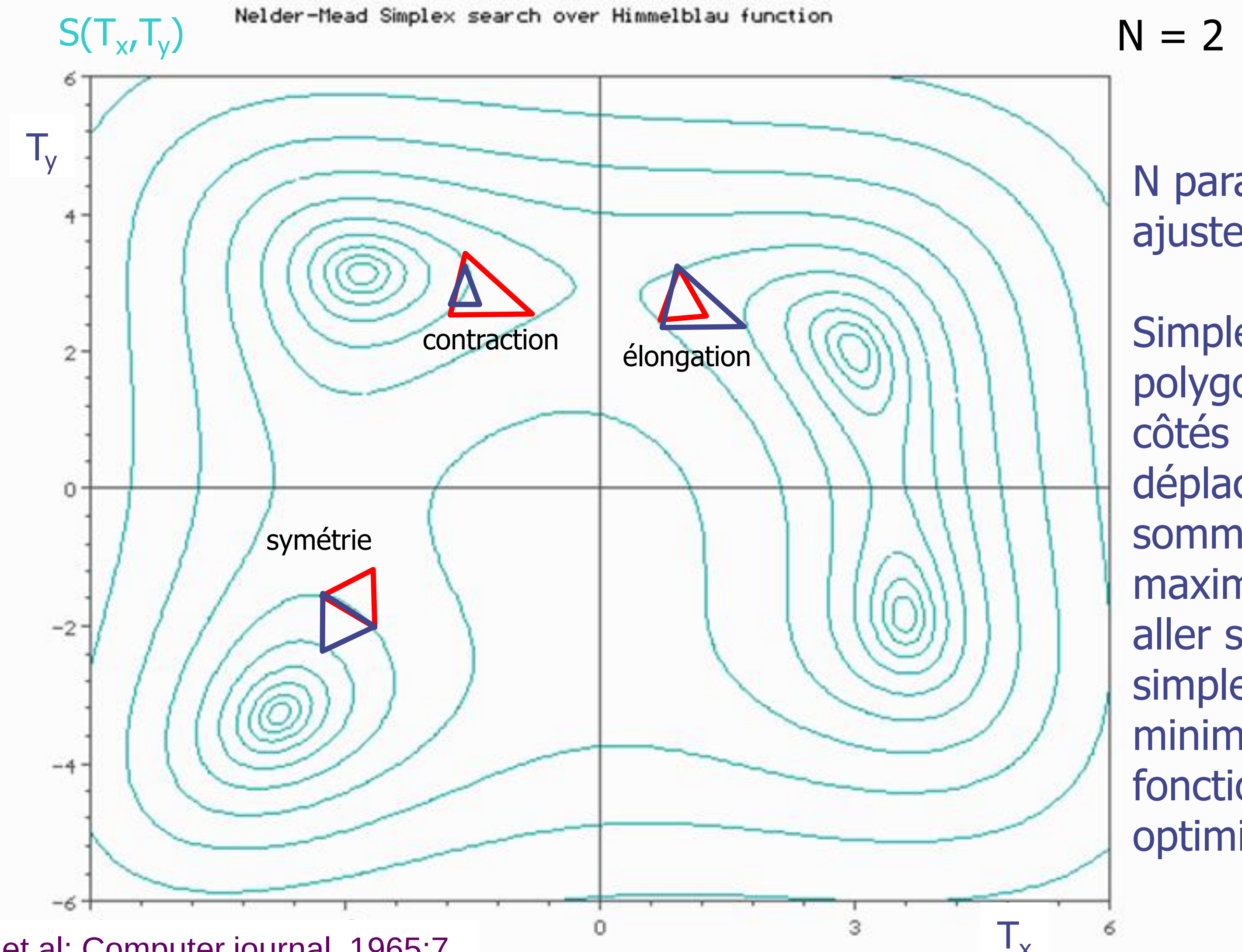
- Au moyen d'un programme capable d'optimiser la mesure de similarité en ajustant itérativement les paramètres géométriques du recalage

- Méthodes avec gradient
  - Gradient conjugué, Levenberg-Marquardt…
  - BFGS, KNITRO…

- Méthodes sans gradient
  - Powell: succession d'optimisations 1D
  - Simplex

WH Press et al. Numerical recipes in C. Cambridge University Press
Les codes de ces programmes sont disponibles gratuitement sur la toile.

# Optimisation: simplex

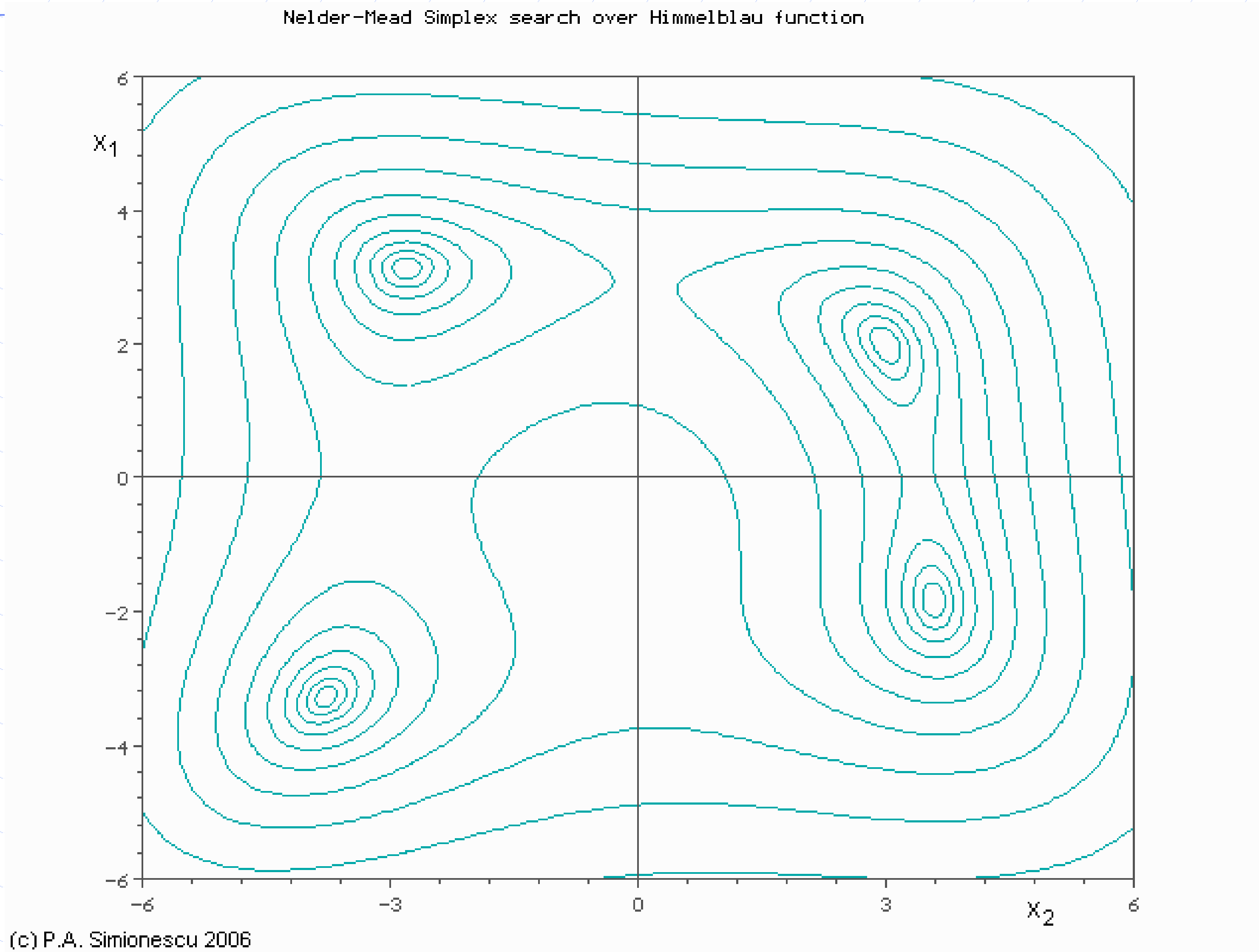



N paramètres à ajuster

Simplex = polygone à N+1 côtés dont on déplace le sommet de valeur maximale pour aller stabiliser le simplex sur un minimum de la fonction à optimiser.

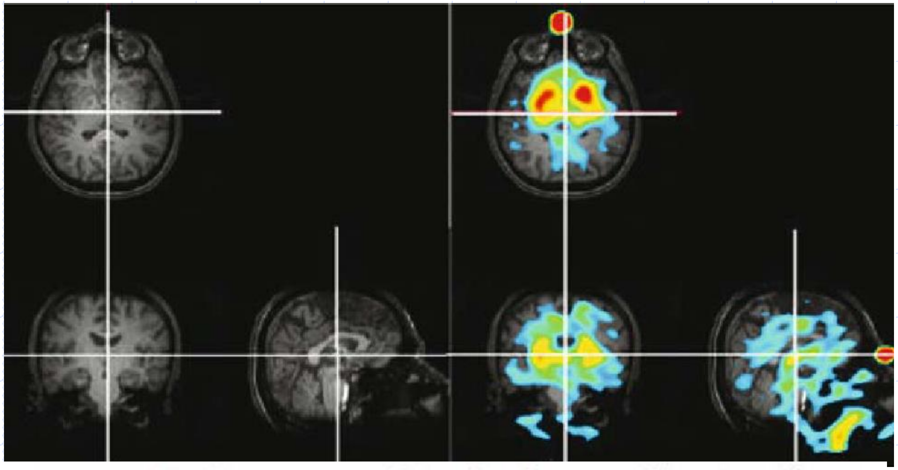
JA Nelder et al; Computer journal. 1965;7.

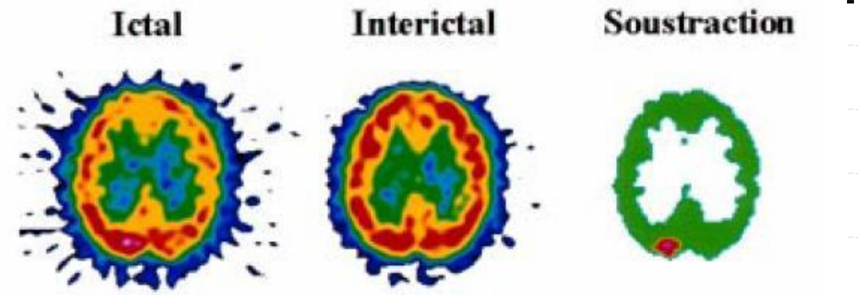
# Optimisation: simplex

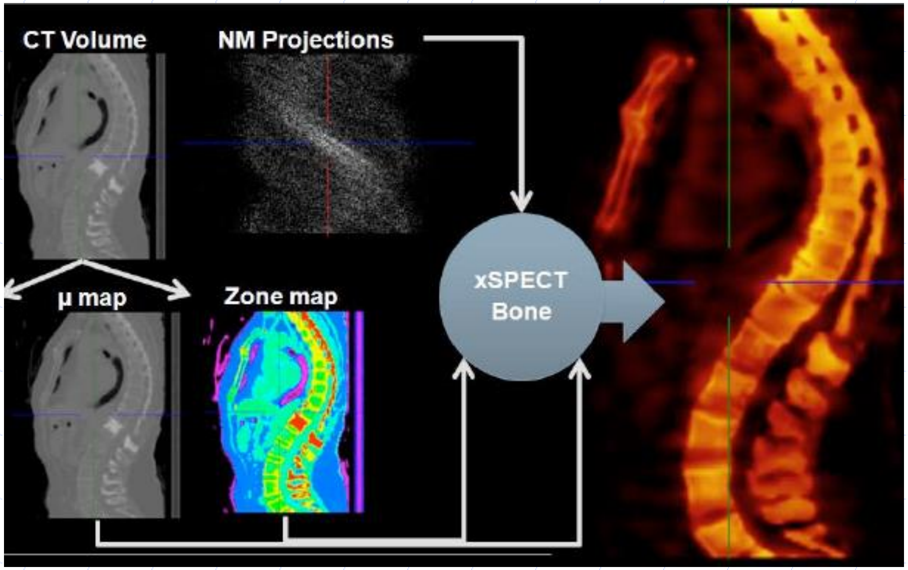


# Applications

- Morpho-fonctionnel
  - diagnostic (traceurs spé)
  - thérapeutique
- Atlas anatomique
- Comparaison de traceurs
  - neuro, cardio, pneumologie
  - parathyroïdes
- Suivi d'un patient
- SPM
- Correction d'artefacts
  - vol. partiel, atténuation
  - mouvement…
- Reconstruction multimodale
  - xSPECT-Bone®

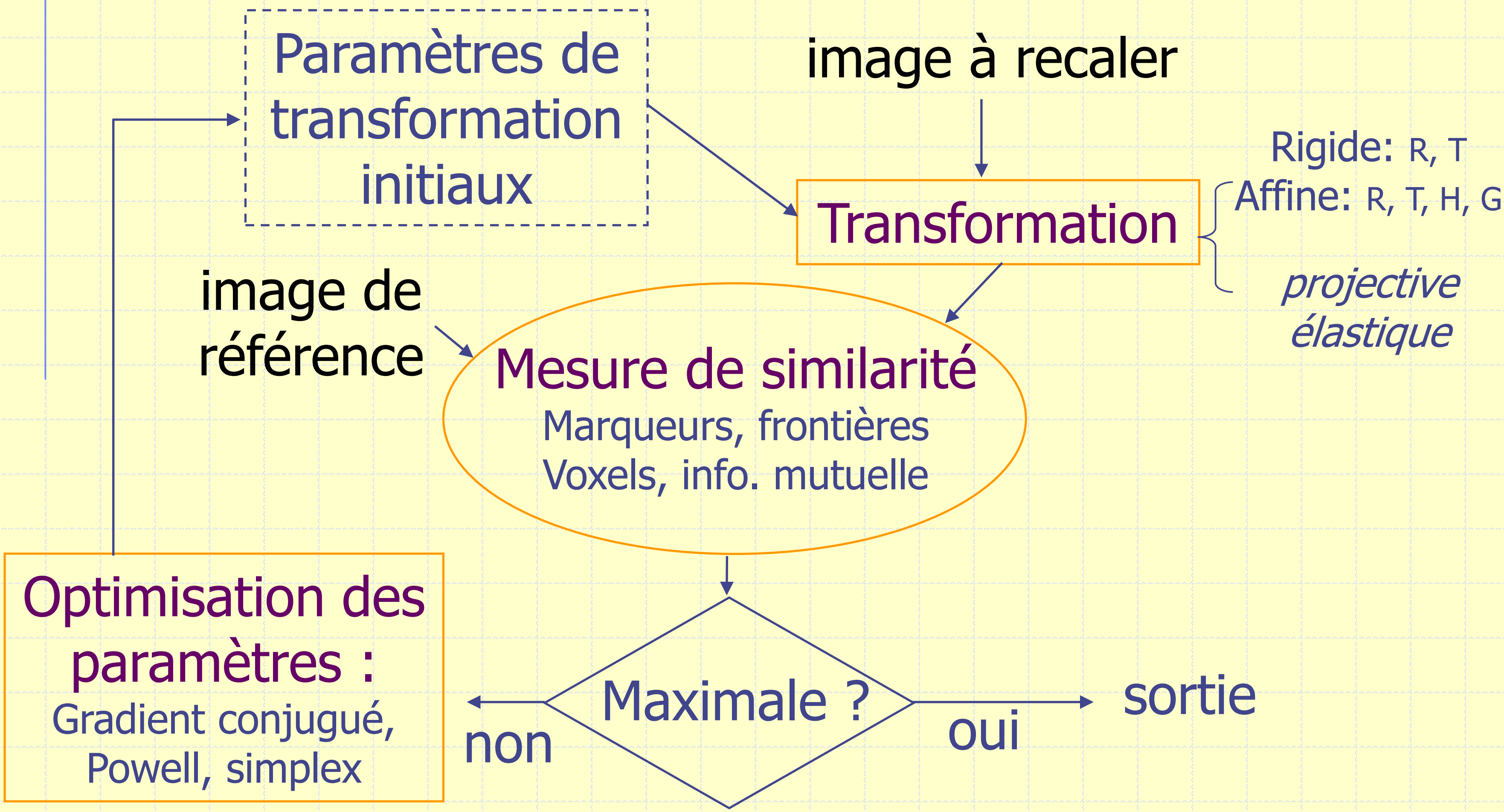





O. Mignéco. Revue de l'Acomen 1999;5

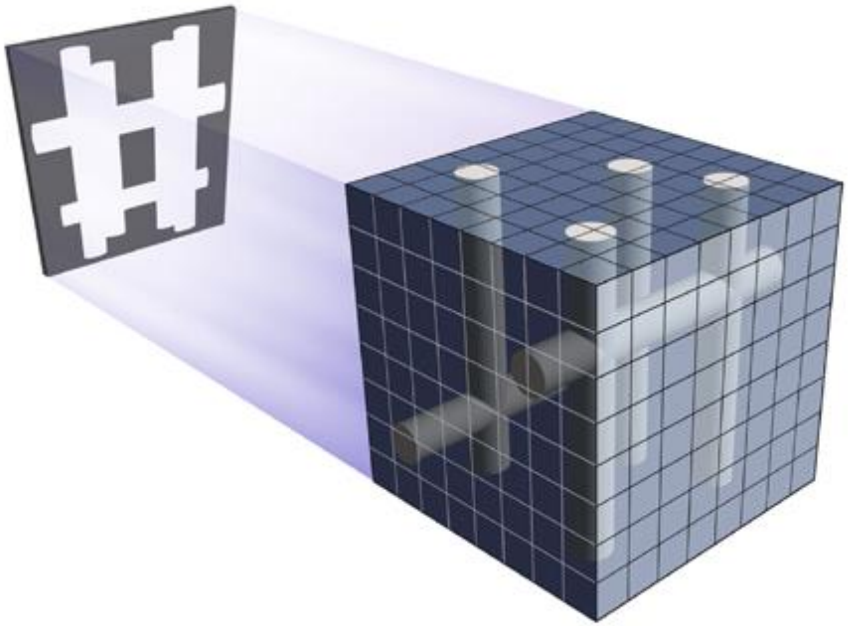
# RECALAGE


Paramètres de transformation initiaux
image à recaler
Rigide: R, T
Affine: R, T, H, G
projective
élastique
Transformation
image de référence
Mesure de similarité
Marqueurs, frontières
Voxels, info. mutuelle
Optimisation des paramètres :
Gradient conjugué, Powell, simplex
Maximale ?
non
oui
sortie

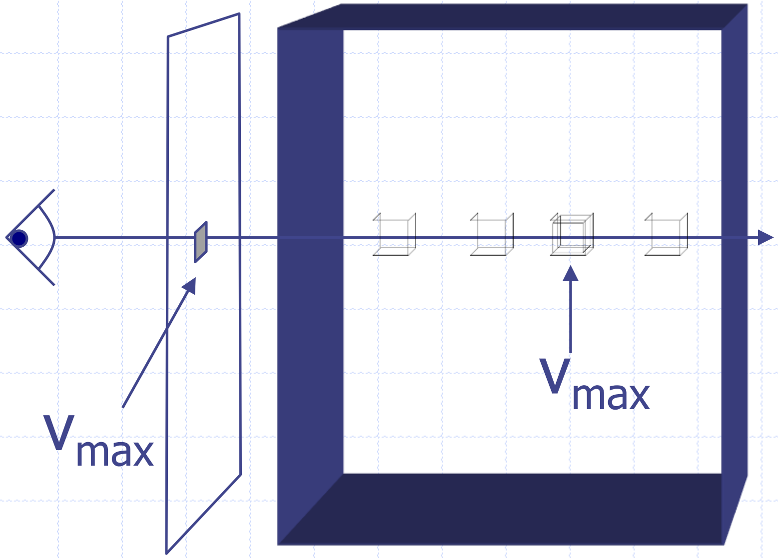
# ⑤ RENDU DE VOLUME & DE SURFACE 3D

**MIP et rendu de volume**
**Rendu de surface**

# MIP : Maximum Intensity Projection



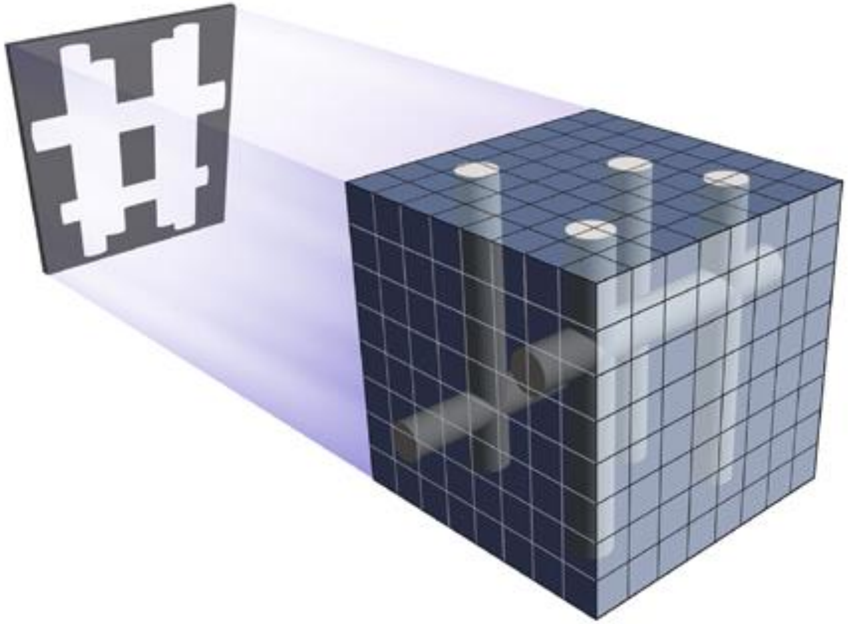
MIP



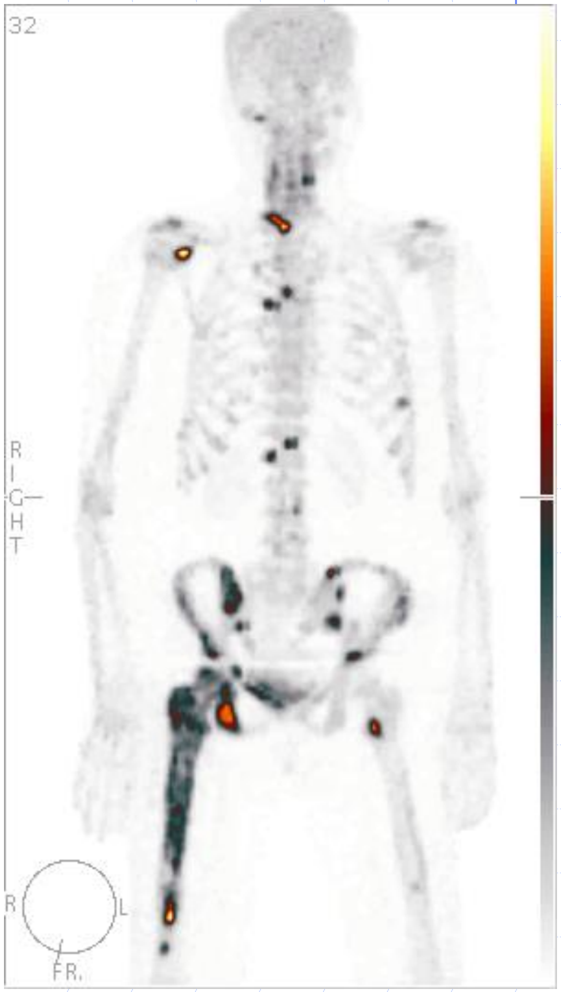

Perte de l'information non maximale suivant une direction de projection

E.K. Fishman et al. RadioGraphics 2006 : http://radiographics.rsnajnls.org/cgi/content/full/26/3/905

# MIP

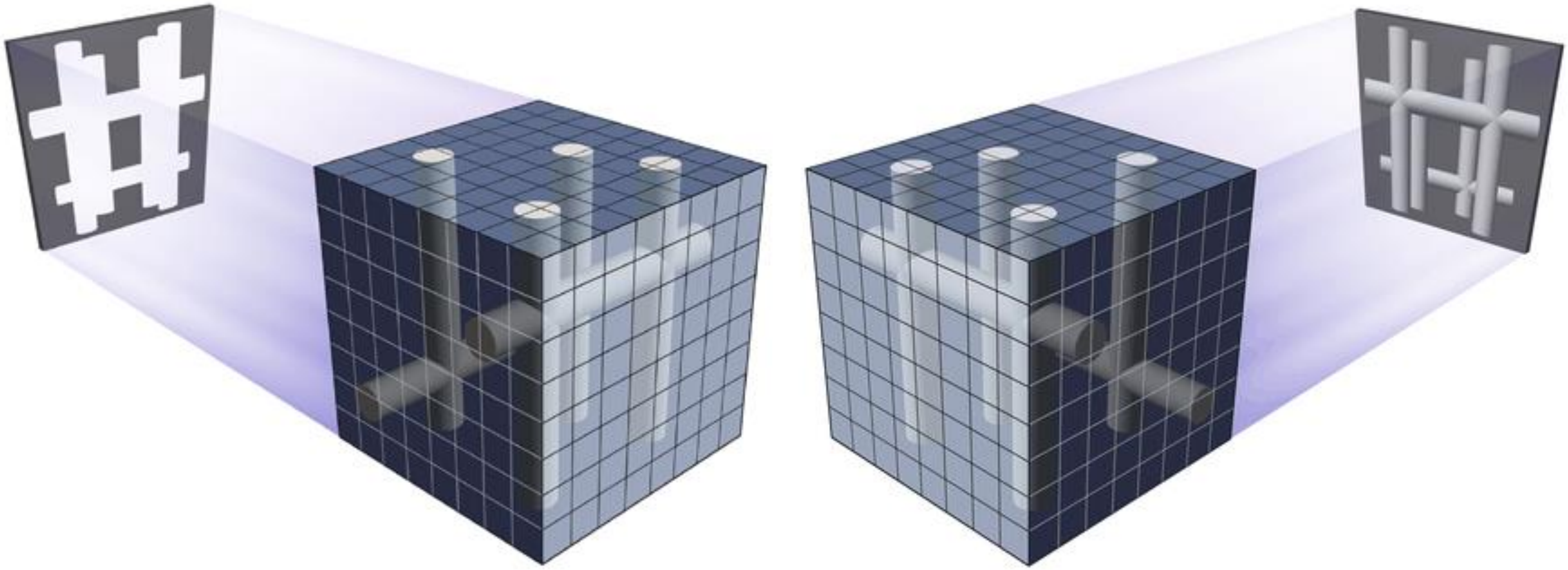


MIP




E.K. Fishman et al. RadioGraphics 2006 : http://radiographics.rsnajnls.org/cgi/content/full/26/3/905

# MIP ≠ Rendu de volume



**MIP:**
seul le maximum
d'un rayon est projeté

**RENDU DE VOLUME :**
Tous les pixels pondérés d'un rayon
(transparence, brillance…) sont projetés

E.K. Fishman et al. RadioGraphics 2006 : http://radiographics.rsnajnls.org/cgi/content/full/26/3/905

# Rendu de volume

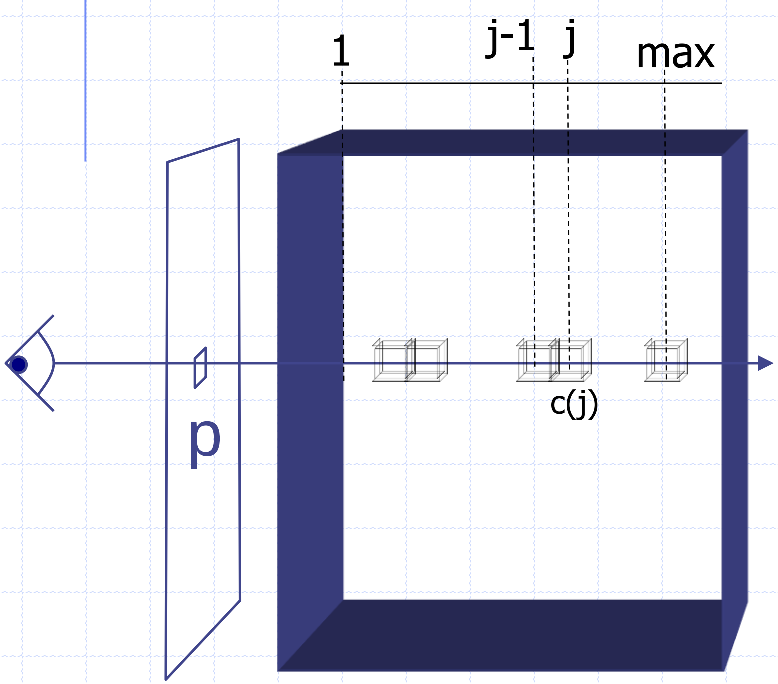
$$C(p) = \sum_{j=1}^{max} c(j) \, . \, \mathrm{Contribution}(j)$$

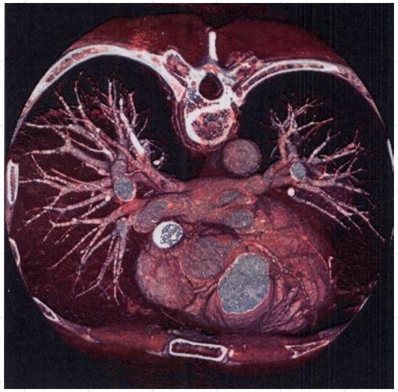
$$\mathrm{Contribution}\,(j) = \alpha(j)\; P(L,\, j) \prod_{k=0}^{j-1} [1 - \alpha(v_k)]$$

Opacité: $\alpha(j) \in [0,1]$

Brillance

Transparence d'aval



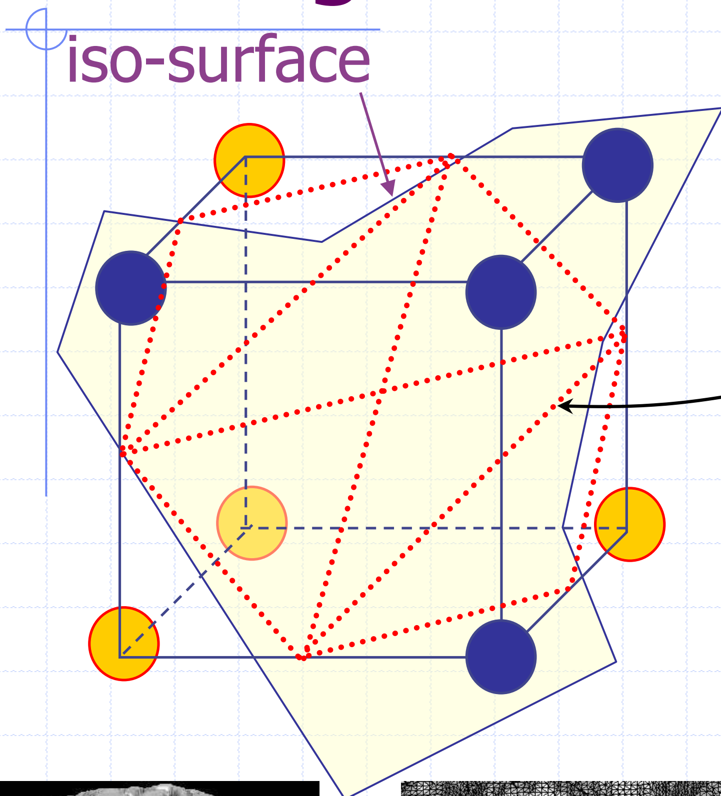
M. Boehm, thèse Mines Paris, 2004

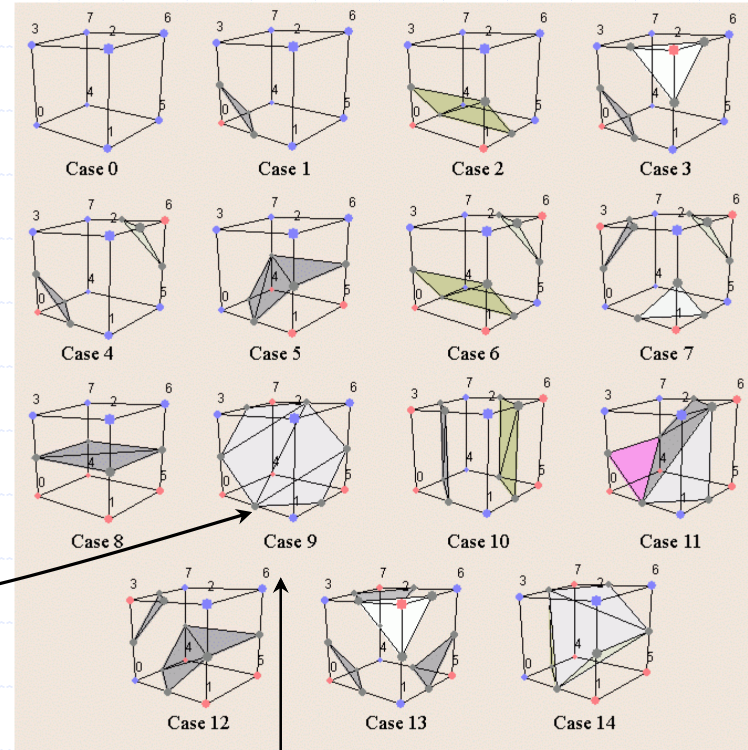
# Rendu de surface

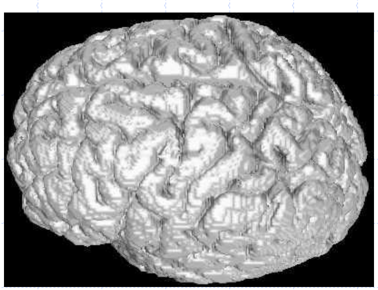
Il s'agit de projeter sur un plan
La surface opaque d'un espace 3D:
cerveau, os, poumon, vasculaire…

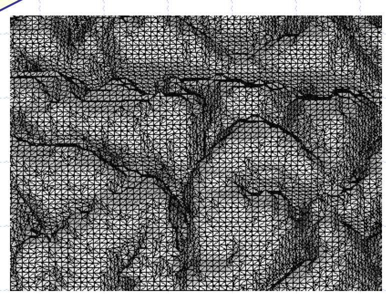
- extraction d'isosurfaces (marching cubes )
- lancé de rayons (ray casting)
- volume splatting
- shear wrap
- Texture mapping (GPU) …

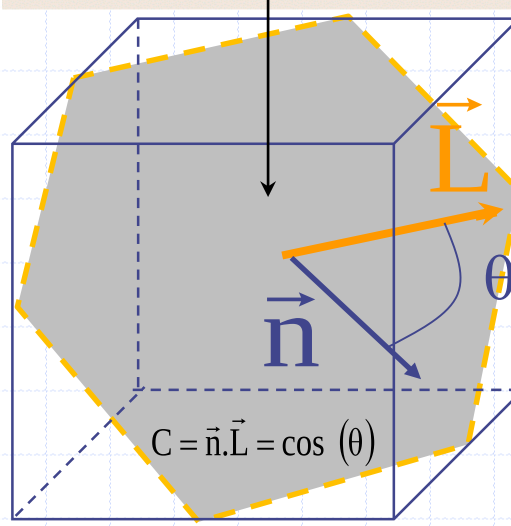
# Marching cubes

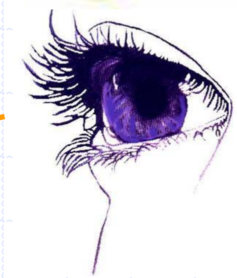






W. Lorensen,HE. Cline. SIGGRAPH 87 Proceedings, 21(4) July 1987, p. 163-170 - http://fr.wikipedia.org/wiki/Marching_cubes

# VISUALISATION 3D

- Algorithme de construction d'une image MIP
  - Masque d'éventuelles hyperfixations
  - Utile pour une vue d'ensemble à condition de générer des projections sur 360°.
- Notions de MIP, rendu de volume et rendu de surface
- MIP utile surtout dans l'analyse de la surface de certains organes :
  - cerveau, poumon, reins, squelette

# 10 NOTIONS A MAITRISER :

1. LMH = $D_{min}$ = $1/f_{max}$ = Pouvoir Séparateur $\propto$ distance
2. Shannon : Dimension du pixel = LMH/2
3. EVP: CR < 100% si dimension de l'objet < 2.LMH
4. Convolution $\equiv$ Passe-bas :
   - Moyenne pondérée dans un voisinage
   - x des fréquences par les valeurs d'une Gaussienne
5. Déconvolution de Metz ou dans l'opérateur de Radon
6. Radioactivité $\equiv$ Poisson $\Rightarrow$ S/B = $\sqrt{C}$
7. Filtres linéaires et non linéaires
8. Recalage affine : T,R,H,G $\rightarrow$ Similarité $\rightarrow$ Optimisation
9. Segmentation: Seuils adaptatifs, Gradient,Laplacien, LPE
10. Visualisation: MIP, rendus de volume et de surface

# QUELQUES REFERENCES


- Bases physiques de l'imagerie médicale.

  A. Desgrez & I. Idy-Peretti. 1992, Masson

- Précis d'analyse d'images.

  M. Coster & JL. Chermant, 1989, Presses du CNRS.

- Morphologie mathématique

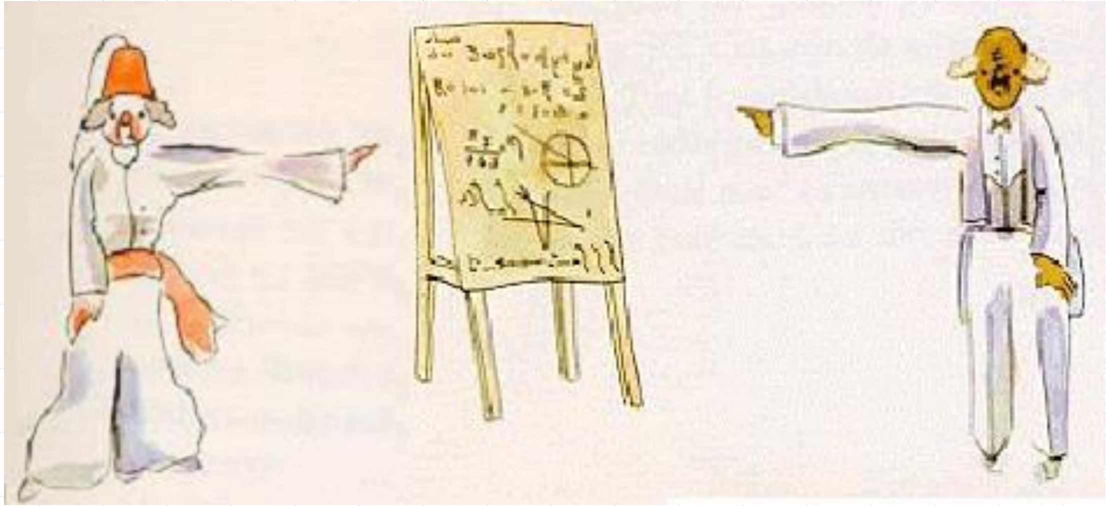
  M. Schmidt & J. Mattioli. 1994, Masson.

  I. Bloch lien http://perso.telecom-paristech.fr/~bloch/ANIM/morpho.pdf

- Introduction au traitement numérique des images. D. Mariano-Goulart.
- Reconstruction tomographique en imagerie médicale. D. Mariano-Goulart.

  2015, Encyclopédie médico-chirurgicale

  Radiologie et imagerie médicale - principes et technique - radioprotection



# Merci pour votre attention…

http:\\scinti.edu.umontpellier.fr
d-mariano_goulart@chu-montpellier.fr