UE 7 : PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE

UE 7: PHYSIQUE & BIOPHYSIQUE

RESPONSABLES: Pr C WISNIEWSKI et D MARIANO-GOULART

Cours	35 (56%)	Compréhension
ED	28 (44%)	Manipulation ↑
Tutorat	14 x 2h	Entrainement

4 blocs fondamentaux en Physique

Notions essentielles à toute poursuite d'études en santé, sciences physiques ou sciences pour l'ingénieur

12 heures de CM / 8 heures d'ED
Ondes et matière
D Mariano-Goulart

Mécanique des fluides | Transfert de chaleur | Transfert de matière

10 heures de CM / 8 heures d'ED
C Wisniewski,T Ruiz & PO Kotzki

3 heures de CM / 2 heures d'ED
C Wisniewski

10 heures de CM / 10 heures d'ED
PO Kotzki, V Boudousq

PASS

UE 7 : PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE

UE 7: EQUIPE PEDAGOGIQUE

	Prénom	Nom	Courriel	Responsable	Faculté (UFR)
ENSEIGNANTS DE COURS MAGISTRAUX (et d'ED pour *)	Christelle	WISNIEWSKI*	christelle.wisniewski@umontpellier.fr	UE 7, CM « Fluides, Chaleur »	Pharmacie
	Denis	MARIANO-GOULART	denis.mariano-goulart@umontpellier.fr	UE 7, CM « Ondes & Matière »	Médecine
	Thierry	RUIZ*	thierry.ruiz@umontpellier.fr	CM «Fluides»	Pharmacie
	Pierre-Olivier	KOTZKI	Pierre-Olivier.Kotzki@icm.unicancer.fr	CM «Fluides, Transfert Matière»	Médecine
	Vincent	BOUDOUSQ	vincent.boudousq@umontpellier.fr	CM «Transfert Matière»	Médecine
ENSEIGNANTS D'ENSEIGNEMENTS DIRIGES	Laurent	VACHOUD	laurent.vachoud@umontpellier.fr	Tutorat Montpellier (Pharmacie)	Pharmacie
	Catherine	LOZZA	catherine.lozza@umontpellier.fr	Tutorat Nîmes	Médecine
	Carine	BECAMEL	carine.becamel@umontpellier.fr	Tutorat Montpellier (Médecine)	Médecine
	Lidwine	GROSMAIRE	lidwine.grosmaire@umontpellier.fr		Pharmacie
	Maxime	LOUET	maxime.louet@umontpellier.fr		Pharmacie
	Laurent	MAIMOUN	laurent.maimoun@umontpellier.fr		Médecine
	Eric	RONDET	eric.rondet@umontpellier.fr		Pharmacie
	Julien	DUBOIS	Julien.dubois@umontpellier.fr		Pharmacie

PASS

http://scinti.edu.umontpellier.fr/enseignements/cours/

UE 7 : PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE

EN GUISE D'INTRODUCTION…

Prête au vrai maintenant une **oreille attentive**,
Quod super est, vacuas auris animumque sagacem
Nette de tout souci, **aiguise ton esprit**,
semotum a curis adhibe veram ad rationem,
Et mes dons, apprêtés avec un soin fidèle,
ne mea dona tibi studio disposta fideli,
Garde d'en faire fi avant d'y rien comprendre,
intellecta prius quam sint, contempta relinquas.
Car je vais t'exposer les hautes lois du ciel
nam tibi de summa caeli ratione deumque
Et des dieux, dévoiler **d'où procèdent les choses**,
disserere incipiam et rerum primordia pandam.

De la nature des choses, Chant 1, vers 50-55
Traduction d'Olivier Sers, Belles lettres, Paris, 2012.

Lucrèce
(1° siècle avant JC)

Modélisation mathématique la plus simple possible des mécanismes de la nature telle qu'elle est observée expérimentalement

PASS

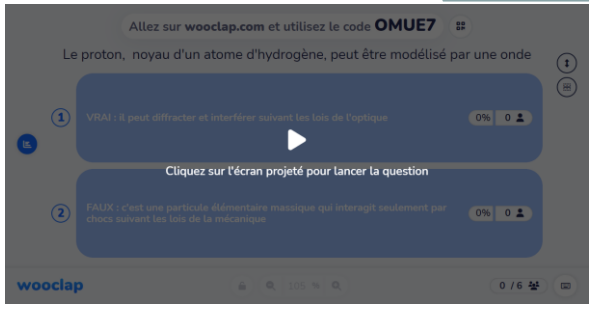
UE 7 : PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE

QR code à flasher SVP

PASS

UE 7 : PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE

A VOTRE AVIS…



UE 7 : PHYSIQUE ET BIOPHYSIQUE

MODELE: ONDE ou PARTICULE ?

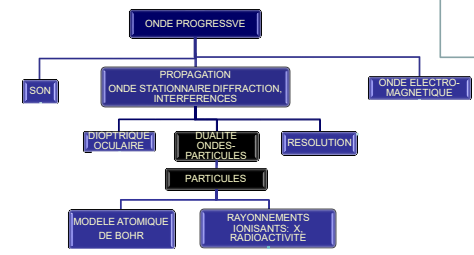
ATOME / DISCONTINU

PASS

ONDE / CONTINU

ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

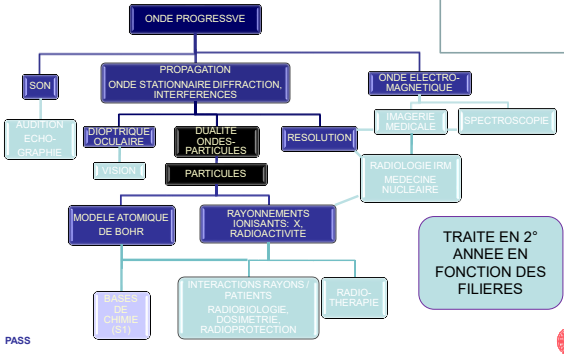
ONDES ET MATIERE: PROGRAMME



PASS

ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

ONDES ET MATIERE: OBJECTIFS

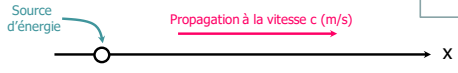


PASS

ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

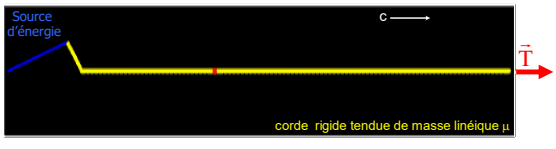
ONDE PROGRESSIVE: DEFINITION

Propagation d'une perturbation des caractéristiques physiques du milieu



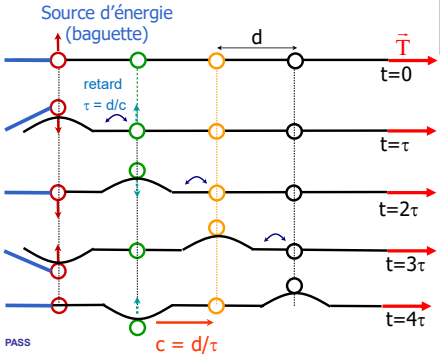
modification locale de position, pression, température, champ électrique, magnétique,…

Exemple : propagation d'une modification périodique de la position verticale d'une corde



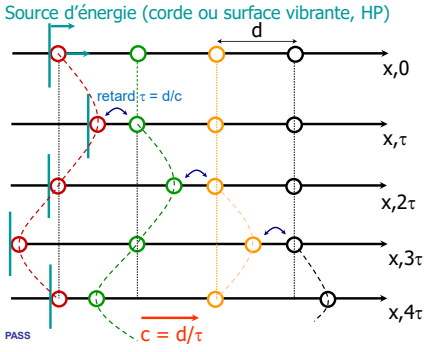
PASS

ONDE PROGRESSIVE: CORDE VIBRANTE



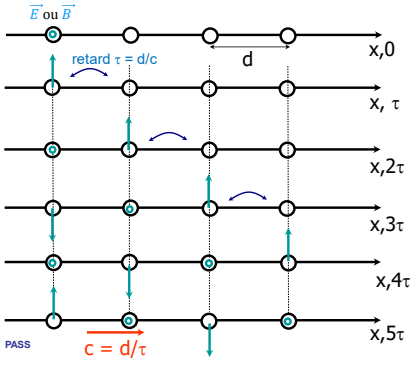
Onde progressive scalaire de vibration transversale

ONDE PROGRESSIVE: SON



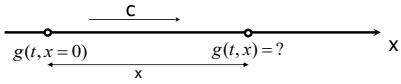
Son
=
Onde progressive scalaire de vibration ou de surpression longitudinale

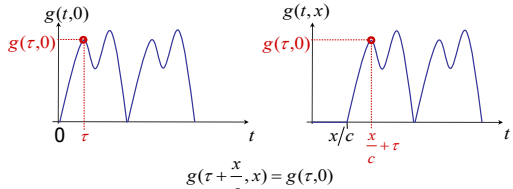
ONDE PROGRESSIVE: LUMIERE



Lumière
=
champ électromagnétique
=
Onde progressive vectorielle transversale

ONDE PROGRESSIVE: MODELISATION



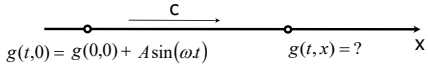


$$g(\tau+\frac{x}{c},x)=g(\tau,0)$$

$$\boxed{g(t,x)=g(t-\frac{x}{c},0)}$$

PASS

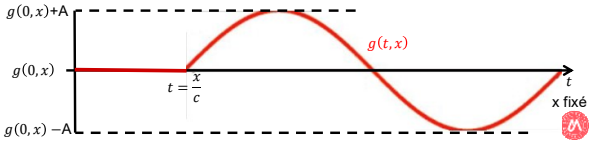
ONDE PROGRESSIVE SINUSOIDALE



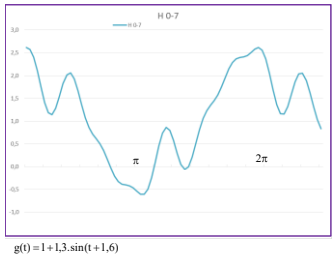
$$\boxed{g(t,x)=g(0,x)+A\sin\left[\omega.\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]}$$

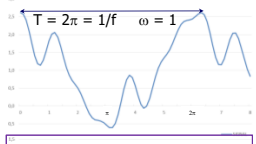
grandeur physique avant la perturbation

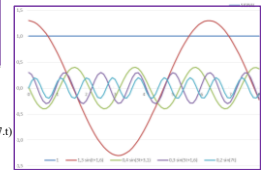
perturbation retardée de x/c



DECOMPOSITION EN OPS







$g(t)=1+1{,}3.\sin(t+1{,}6)$

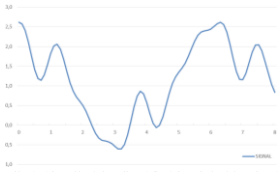
$g(t)=1+1{,}3.\sin(t+1{,}6)+0{,}4.\sin(3.t+3{,}1)$

$g(t)=1+1{,}3.\sin(t+1{,}6)+0{,}4.\sin(3.t+3{,}1)+0{,}3.\sin(5.t+1{,}6)$

$g(t)=1+1{,}3.\sin(t+1{,}6)+0{,}4.\sin(3.t+3{,}1)+0{,}3.\sin(5.t+1{,}6)+0{,}2.\sin(7.t)$

PASS

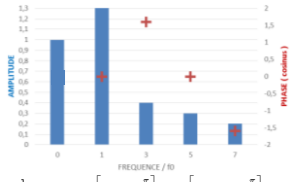
DECOMPOSITION EN OPS



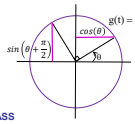
$g(t) = 1 + 1{,}3.\cos(t) + 0{,}4.\cos(3.t + 1{,}6) + 0{,}3.\cos(5.t) + 0{,}2.\cos(7.t - 1{,}6)$

$g(t) = 1 + 1{,}3.\sin(t + 1{,}6) + 0{,}4.\sin(3.t + 3{,}1) + 0{,}3.\sin(5.t + 1{,}6) + 0{,}2.\sin(7.t)$

SPECTRE ou TF



rappel : $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$



$$g(t) = A_0 + A_1 \cos[\omega t + \varphi_1] + A_2 \cos[(2\omega)t + \varphi_2] + \ldots = A_0 + A_1 \sin\left[\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right] + A_2 \sin\left[(2\omega)t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right] + \ldots$$

$$\boxed{g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\omega)t + \varphi_n] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left[(n\omega)t + \varphi_n + \frac{\pi}{2}\right]}$$

PASS

SERIE DE FOURIER : CAS GENERAL

Pour toute fonction g(t) intégrable de période $T=2\pi/\omega$:

$$\boxed{g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\omega)t + \varphi_n]}$$

J FOURIER 1768-1830

Les composantes de cette somme sont les harmoniques de fréquence $f_n = n.f = n.\omega/(2\pi)$

Onde portant une fréquence unique: sinusoïdale = pure = monochromatique = radiation
Onde caractérisée par une somme d'harmoniques : onde complexe = polychromatique

Pour les plus curieux *(ces formules ne sont pas à apprendre par cœur)*, on montre que les coefficients A_n et φ_n se calculent suivant :

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ sauf } A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$tg\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

avec

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t).\cos(n\omega t).dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t).\sin(n\omega t).dt$$

PASS

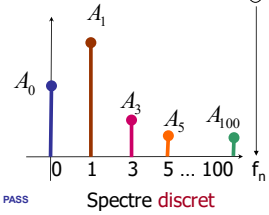
SPECTRE D'UNE ONDE COMPLEXE

$$g(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos[(n\omega)t + \varphi_n]$$

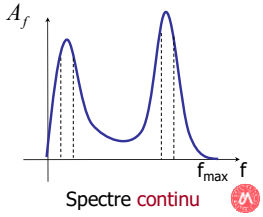
amplitude de l'harmonique

harmonique n de fréquence f_n

$f_n = n.\omega/2\pi = n.f$



Spectre discret



Spectre continu

PASS

CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

$$g(t,x) = A.\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

- Célérité c,
  dans ce cas, propagation dans la direction x positifs
- Amplitude = A (même unité que la grandeur g)
- Pulsation propre : ω en rad/s
- Fréquence f en Hertz (Hz = s^{-1}) : $\omega = 2\pi f$

  ω ou f déterminent la nature de l'onde et ses modes d'interaction avec l'environnement…

CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

$$g(t,x) = A.\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

- Périodes
  - Par rapport au temps : $T = 1/f = 2\pi/\omega$ en s
    - Pour x fixé, g(t,x) = g(t+T,x)
  - Par rapport à l'espace : longueur d'onde

$$A.\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A.\sin\left[\omega\left(t - T - \frac{x}{c}\right)\right] = A.\sin\left[\omega\left(t - \frac{c.T + x}{c}\right)\right]$$

pour t fixé, $g(t,x) = g(t, x + c.T) = g(t, x + \lambda)$

- $\lambda = cT = c/f = 2\pi\, c/\omega$
- λ est la distance parcourue par l'onde en T secondes.

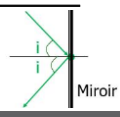
CARACTERISTIQUES D'UNE RADIATION

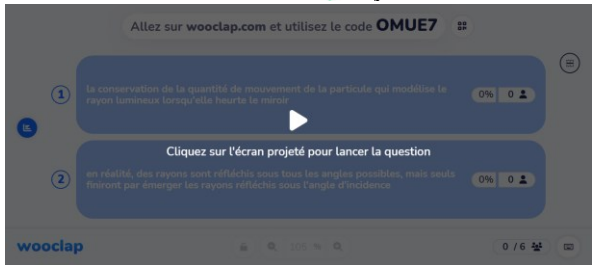
$$g(t,x) = A.\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = A.\sin[\omega\, t - \varphi]$$
$$g'(t,x) = A.\sin[\omega'\, t - \varphi']$$

- Phase : $\phi = \omega x/c = 2\pi f x/c = 2\pi x/\lambda$
- Surfaces d'onde : surfaces connexes (sphères, plans) contenant l'ensemble des points de même phase
- Vecteur d'onde $\vec{k}$: vecteur perpendiculaire aux surfaces d'ondes de norme $\|\vec{k}\| \stackrel{\text{def}}{=} k = \frac{\omega}{c} = \frac{\varphi}{x}$ soit $g(t,x) = A.\sin(\omega t - kx)$
- Deux ondes g et g' sont cohérentes si :
  - $\lambda = \lambda'$ (donc f=f' et $\omega = \omega'$)
  - leur différence de phase $\phi - \phi'$ est constante dans le temps

A VOTRE AVIS…

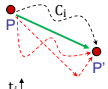
Vous avez appris en lycée qu'un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence, mais qu'est-ce qui oblige un rayon incident à suivre cette loi ?





PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

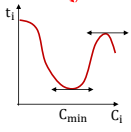
Quelle est la trajectoire suivie par un rayon lumineux émis en P et reçu en P' ?



C_i de longueur $x_i \Rightarrow$ retard en P'de $t_i = \frac{x_i}{c}$

et déphasage de $\frac{\omega x_i}{c} = \frac{2\pi x_i}{\lambda} = \omega t_i$ avec $\omega \approx 10^{14}$rad/s

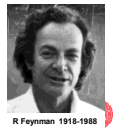
En P', tous ces rayons se superposent :



$$\mathbf{A} = A.\sum_{\text{chemins i}} \sin\left[\omega.\left(t - \frac{x_i}{c}\right)\right] = A.\sum_{\text{chemins i}} \sin[\omega.t - \omega.t_i]$$

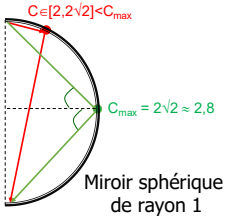
Si t_i n'est pas extrémal*, $\omega.t_i$ change très vite avec t_i, de C_i à C_{i+1}.
Les sinus prennent toutes les valeurs entre -1 et 1 et les contributions de ces rayons se détruisent mutuellement (par interférences).

Principe de Moindre Action: Un rayon lumineux (une onde) suit la trajectoire C_{min} parcourue en un temps extrémal* (donc une droite dans le vide).

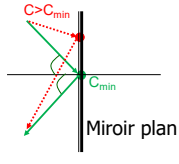

R Feynman 1918-1988

Exception si ω (ou f) << 1 (soit λ >> x_i): cf. diffraction
*Minimum le plus souvent, mais maximum est possible,

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION : EXEMPLES



Cf. Annexe 4 pour un calcul détaillé.



Cf. suite du cours sur la réflexion des rayons lumineux.

Suggestion de lecture pour l'été: R. Feynman, « lumière et matière, une étrange histoire », Points Sciences

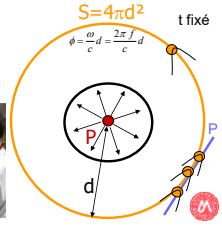
ONDE SPHERIQUE ET LOI EN 1/d²

Une source ponctuelle émettant de façon isotrope produit une onde sphérique.

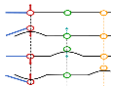
A une distance d de la source, la puissance émise P se répartit uniformément sur la surface d'une sphère de rayon d :

$$I(Wm^{-2}) = \frac{P}{4\pi}\frac{1}{d^2}$$

La puissance surfacique reçue à la distance d varie donc comme 1/d²

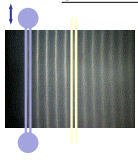


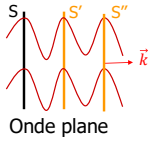
PRINCIPE DE HUYGENS-FRESNEL



Tout point atteint par une onde issue d'une source se comporte comme une nouvelle source ponctuelle isotrope

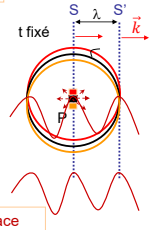
Cas d'une onde plane (S = plan) :





Onde plane

t fixé



Principe de Huygens-Fresnel : chaque point d'une surface d'onde S agit comme une source ponctuelle émettant en phase

La surface d'onde se déplace dans la direction de propagation de l'onde en conservant sa forme plane.
Le vecteur d'onde conserve sa direction, son sens et sa norme.

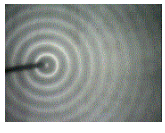
PRINCIPE DE HUYGENS-FRESNEL

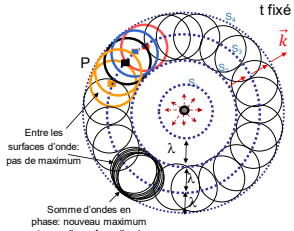
Principe de Huygens-Fresnel : chaque point d'une surface d'onde S agit comme une source ponctuelle émettant en phase

Cas d'une onde sphérique (S = sphère) :

C Huygens
1629-1695

A Fresnel
1788-1827



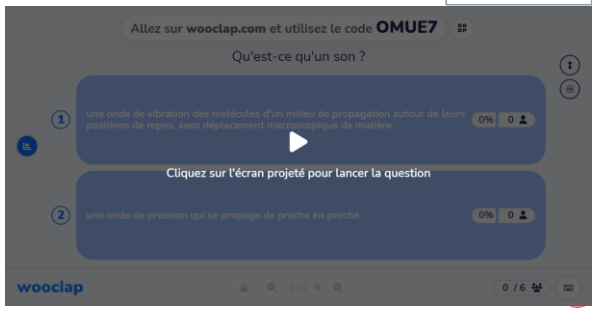


La surface d'onde se déplace dans la direction de propagation de l'onde en conservant sa forme sphérique,
Le vecteur d'onde conserve sa direction, son sens et sa norme.

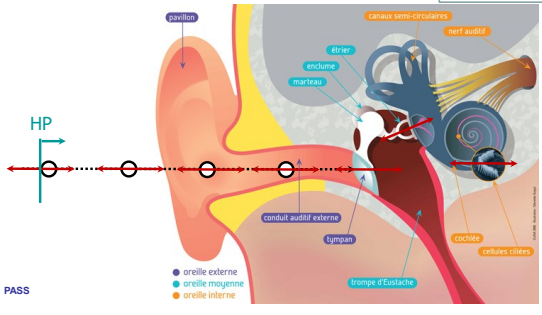
OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 1

- Savoir définir : onde progressive, onde pure, onde complexe, harmoniques, spectres et ondes cohérentes.
- Savoir manipuler les caractéristiques d'une onde : ω, f, T, λ, ϕ, S_{onde}, $\vec{k}$
- Savoir modéliser une onde pure :
  - $g(t,x) = A.\sin[2\pi.f(t-x/c)]$
  - Savoir manipuler ce modèle
- Savoir utiliser le principe d'Huygens-Fresnel
- Savoir exploiter la loi en $1/d^2$ à des fins de radioprotection

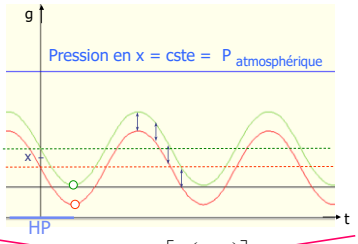
A VOTRE AVIS…



L'ONDE SONORE



SON = ONDE DE PRESSION

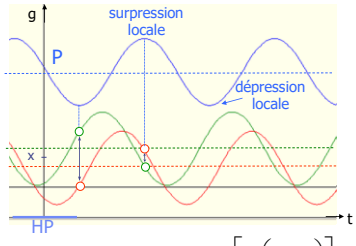


$$\cancel{c >> x \Rightarrow g(t,x) = x + A\sin\left[\omega.\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \approx x + A\sin[\omega.t]}$$

Hypothèse c >> x,
$\Rightarrow$ retard = x/c $\rightarrow$ 0
$\Downarrow$
vibrations en phase,
écarts conservés,
densité constante,
pression constante.

Or dans l'air,
c ≈ 343 m/s
$\Downarrow$
c ≈ x
l'hypothèse c >> x
est fausse

SON = ONDE DE PRESSION



$$c \approx x \Rightarrow g(t,x) = x + A\sin\left[\omega.\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

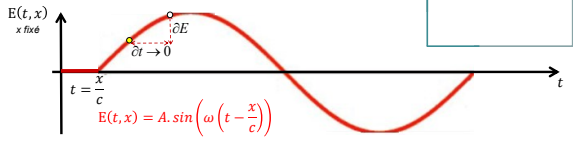
déphasage des ondes
de vibration au
voisinage d'un lieu x
$\Downarrow$
onde de surpression
acoustique P qui s'ajoute
à la pression ambiante.

Ordres de grandeur

dans l'air : $P_a = 10^5$ Pa
P = 20 µPa – 20 Pa
P << P_a

dans l'eau: P < kPa

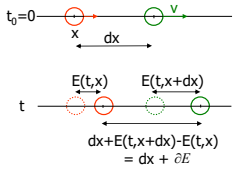
Rappel: la dérivation



$$\frac{\partial E}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} E'(t)_{\text{x constant}} = \frac{\partial}{\partial t}\left[A.\sin\left(\omega.(t - \frac{x}{c})\right)\right] = \omega.A.\cos\left(\omega.(t - \frac{x}{c})\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} \stackrel{\text{def}}{=} E'(x)_{\text{t constant}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A.\sin\left(\omega.(t - \frac{x}{c})\right)\right] = -\frac{\omega}{c}.A.\cos\left(\omega.(t - \frac{x}{c})\right)$$

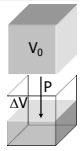
SON = ONDE DE PRESSION



Compressibilité

$$\chi = -\frac{1}{P}\frac{\Delta V}{V_0}$$

en Pa^{-1}, exprimant la diminution relative de distance (ou de volume) par Pascal de surpression apporté



$$P = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial x}\left[A.\sin\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right)\right] = \frac{A.\omega}{\chi.c}.\cos\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right)$$

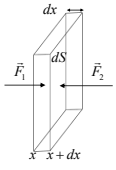
$$v = \frac{\partial}{\partial t}\left[A.\sin\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right)\right] = A.\omega.\cos\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right) \quad \text{vitesse de vibration}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{\chi.c}.v = Z.v}$$

Z = L'impédance acoustique du milieu (kg.m^{-2}s^{-1})
La pression est une OPS déphasée (de 90°) par rapport à la position E

IMPEDANCE ET CELERITE

On applique la relation fondamentale de la dynamique à une tranche de milieu de propagation de masse volumique ρ, de surface dS et d'épaisseur dx.



$$m.\frac{dv}{dt} = F_1 - F_2 = [P(x) - P(x+dx)].dS = -\frac{\partial P}{\partial x}.dx.dS$$

$$P = Z.v = Z.A.\omega.\cos\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Z.A.\omega^2}{c}\sin\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right)$$

$$\Rightarrow m.\frac{dv}{dt} = -\frac{ZA\omega^2}{c}\sin\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right).dx.dS$$

mais $v = A.\omega.\cos\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -A.\omega^2.\sin\left(\omega.(t-\frac{x}{c})\right)$, donc

$$m = \rho.dS.dx = \frac{Z}{c}dx.dS \Rightarrow \boxed{Z = \rho.c}$$

Conséquence: $Z = \rho.c = \frac{1}{\chi.c} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\chi.\rho}}$

Loi de Laplace
1749-1827

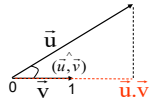
pour de l'air à 20°C et 1 atm: ρ = 1,204 kg/m^3 et χ = 7,04 10^{-6} Pa^{-1}
$\Rightarrow$ c = 1/√(χ.ρ) = 343 m/s et Z = ρ.c = 413 kg.m^{-2}.s^{-1}

RAPPELS MATHÉMATIQUES

- PRODUIT SCALAIRE

$$(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Propriété: si $\|\vec{v}\| = 1$, alors $\vec{u}.\vec{v}$ est la longueur de la projection de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$

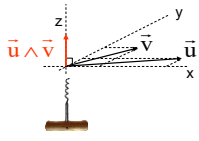


- PRODUIT VECTORIEL

$$(\vec{u},\vec{v}) \rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \text{PLAN}(\vec{u},\vec{v})$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ direct}$$



RAPPELS ELECTRO ET MAGNETOSTATIQUE

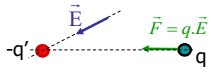
Champs statiques (créés par des distributions de charges ou de courants électriques constants dans le temps). Exemples :

- Charge ponctuelle permanente $\Rightarrow \vec{E}$

$$\|\vec{E}(r)\| = \frac{q'}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2} \quad V = \frac{q'}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \quad E_p = q.V = \frac{q.q'}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}$$

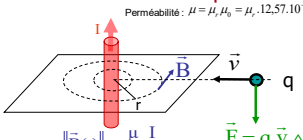
$$\|\vec{F}(r)\| = q.\frac{q'}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$$

Permittivité: $\varepsilon = \varepsilon_r.\varepsilon_0 = \varepsilon_r.8{,}85.10^{-12} F.m^{-1}$



- Circuit de courant permanent $\Rightarrow \vec{B}$

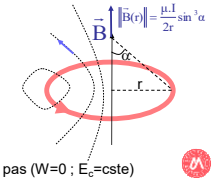
Perméabilité : $\mu = \mu_r.\mu_0 = \mu_r.12{,}57.10^{-7} H.m^{-1}$



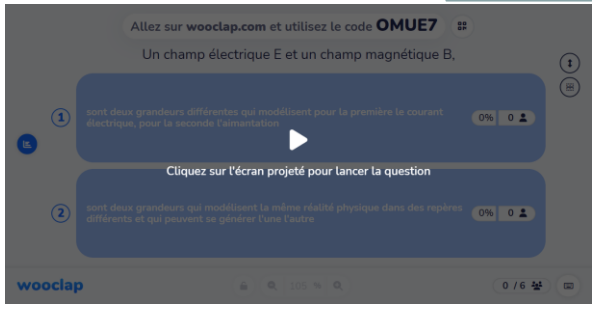
$$\|\vec{B}(r)\| = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}$$

$$\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Nb. Cette force ne travaille pas (W=0 ; E_c=cste)

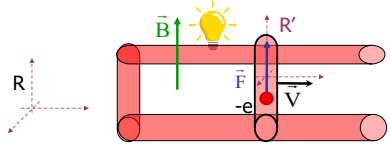


A VOTRE AVIS…



LIEN ELECTRICITE / MAGNETISME

(Romagnosi 1802, Ørsted 1820)



$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{F}' = -e(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

Dans R fixe , champ $(\vec{E}, \vec{B})$ déplacement de charges dans un champ magnétique $(\vec{v} = \vec{V})$ sans champ électrique $(\vec{E} = \vec{0})$

$$\boxed{\vec{F} = -e.\vec{V} \wedge \vec{B}}$$

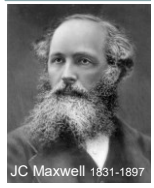
Dans R' mobile, champ $(\vec{E}', \vec{B}')$ charges statiques $(\vec{v}' = \vec{0})$, donc pas de force magnétique :

$$\boxed{\vec{F}' = -e.\vec{E}'}$$

donc $\vec{E}' = \vec{V} \wedge \vec{B}$

COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE

- Si les charges et les courants électriques ne dépendent pas du temps, ils créent des champs E et B permanents (statiques) et indépendants l'un de l'autre.


JC Maxwell 1831-1897

- Si les charges et les courants électriques varient au cours du temps, ils créent des champs électriques et magnétiques d'intensités variables dans le temps et couplés:
  - Equations de Maxwell: empiriques (fin XIX° siècle), puis conséquence théorique de la relativité restreinte (théorie des champs, début XX° siècle).

PASS

LES EQUATIONS DE MAXWELL

Un champ électromagnétique est caractérisé par un couple de vecteurs $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ et $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ satisfaisants:

- Charges électriques ⇒ champ électrique $$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$
- Pas de « charge » magnétique $$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$
- Couplage électro-magnétique $$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

ρ densité de charge en C.m^{-3} ; j densité de courant en A.m^{-2}.

Evidemment, ne pas apprendre par cœur des 4 équations…

Variation de $\vec{B}$ dans le temps ⇒ $\vec{E}$ ou charges électriques

Variation de $\vec{E}$ dans le temps ⇒ $\vec{B}$ ou courants électriques

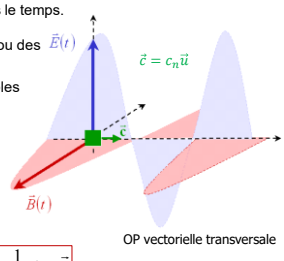
PASS

CONSEQUENCE DES EQUATIONS DE MAXWELL 1 (Cf. Annexe 3 et ED)

1- une onde électromagnétique (OEM) est une onde progressive transversale composée d'une paire indissociable de vecteurs champs électrique et magnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ d'intensités variables dans le temps.

2- Une OEM peut être crée par des charges ou des courants électriques variables, par un champ électrique et/ou un champ magnétique variables dans le temps.

3- Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ varient en phase, à la même fréquence, restent orthogonaux entre eux et à la direction de propagation $\vec{u}$ de l'OEM : $\boxed{\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{u}}$



OP vectorielle transversale

4- Les champs $(\vec{E}, \vec{B})$ se déplacent à la célérité c_n et sont liés par la relation: $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c_n}\vec{u} \wedge \vec{E}}$

PASS

CONSEQUENCE DES EQUATIONS DE MAXWELL 2 (Cf. Annexe 3)

1- Les OEM se propagent dans un milieu (vide ou matériel) caractérisé par une permitivité ε et une perméabilité μ.

2- La célérité des OEM dans le vide est la constante physique c : $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 2{,}998.10^8 \text{ ms}^{-1}$

3- La célérité des OEM dans un milieu matériel est c_n :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$$

4- Le rapport c/c_n est appelé indice de réfraction d'un milieu matériel :

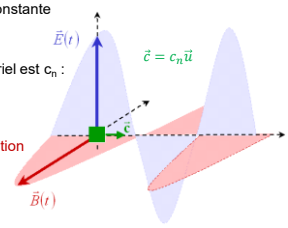
$$n = \frac{c}{c_n} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} > 1$$

Perméabilité $\mu = \mu_r \mu_0$

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m

Permitivité $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi.c^2}$ F/m



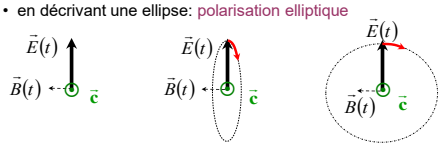
OP vectorielle transversale

Indices 0 pour le vide, r = relatif

POLARISATION

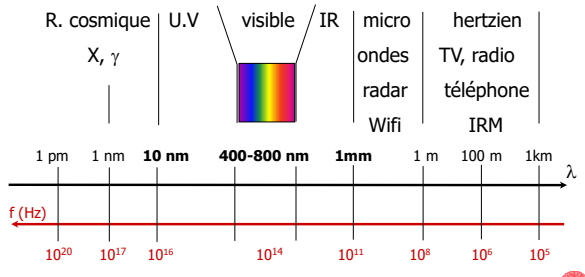
Si la direction de $\vec{E}$ (donc de $\vec{B}$) est :

- fixe : polarisation rectiligne
- tourne à vitesse angulaire constante
  - en décrivant un cercle : polarisation circulaire
  - en décrivant une ellipse: polarisation elliptique



rectiligne elliptique circulaire

CLASSIFICATION SIMPLIFIEE



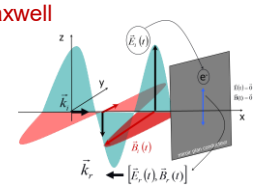
OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 2

- Savoir définir : une onde sonore comme onde de vibration ou de pression.
- Savoir manipuler les caractéristiques d'une onde sonore : c, Z, χ…
- Savoir définir, modéliser une onde électromagnétique et manipuler $\vec{B} = \frac{1}{c_n}\vec{u} \wedge \vec{E}$
- Savoir manipuler n, ε, μ, ε_R, μ_R
- Connaitre les grands domaines du spectre électromagnétique:
  X-γ,< 10 nm, UV, V (400-800 nm), IR, H > mm

REFLEXION ET REFRACTION

Ces phénomènes peuvent être abordés de deux façons équivalentes. La première correspond à une approche « optique physique », la seconde à une approche « optique géométrique ».

1. Par les équations de Maxwell



2. Par le principe de moindre action (Fermat)

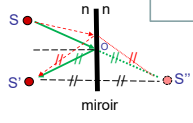
le vecteur d'onde suit la trajectoire la plus rapide entre deux points.

Dans un milieu homogène, c'est la trajectoire la plus courte.

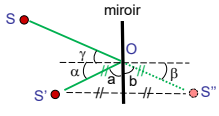
PMA ⇒ LOI DE LA REFLEXION DE DESCARTES

Réflexion sur un miroir dans un milieu homogène (mêmes n),

PMA ⇒ (SOS') minimum, O ∈ miroir
S'' tel que miroir = médiatrice de [S',S'']
Alors (S'OS'') est isocèle ⇒ (OS') = (OS'')
PMA ⇒ (SOS'') minimum
PMA ⇒ O ∈ (S,S'')



miroir = médiatrice de [S',S'']
$\Rightarrow \hat{a} = \hat{b}$
$\Rightarrow \hat{a} = \hat{\beta}$
$\Rightarrow \hat{a} = \hat{\gamma}$



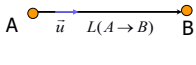
Lors d'une réflexion sur un miroir placé dans un milieu homogène, les angles d'incidence et de réflexion sont égaux.

CHEMIN OPTIQUE

- **Principe de Fermat** : La lumière suit la trajectoire qui minimise le temps de parcours t_n entre deux points A et B dans un milieu d'indice de réfraction n :

$$t_n = \frac{dist(A,B)}{c_n} \Rightarrow c.t_n = \frac{c}{c_n}.dist(A,B) = n.dist(A,B)$$ minimal suivant le PMA.

- **Chemin optique L entre deux points d'un milieu d'indice n**



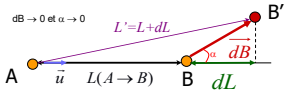
$$L(A \to B) = n.dist(A,B) = n.\vec{u}.\overrightarrow{AB} \quad \text{où} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$t_n = \frac{n.dist(A,B)}{c} = \frac{L}{c}$$

L(A→B) est la distance que parcourrait la lumière dans le vide (à la célérité c) dans le temps nécessaire pour relier A à B dans un milieu d'indice n

VARIATION DE CHEMIN OPTIQUE

Supposons un petit déplacement de B en B' et calculons la petite variation de chemin optique (on néglige la modification de $\vec{u}$)



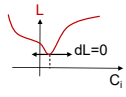
$$L' = n.\vec{u}.\overrightarrow{AB'} = n.\vec{u}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{dB}\right)$$

$$L' = n.\vec{u}.\overrightarrow{AB} + n.\vec{u}.\overrightarrow{dB}$$

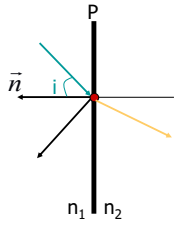
$$L' = L + n.\vec{u}.\overrightarrow{dB}$$

$$\boxed{dL = \underbrace{n.\vec{u}.\overrightarrow{dB}}_{\text{projection de } \overrightarrow{dB} \text{ sur } \vec{u}}}$$

$PMA\ (Fermat) \Rightarrow L\ minimal$
$\Rightarrow dL = n.\vec{u}.\overrightarrow{dB} = 0$
Pour un petit déplacement $\overrightarrow{dB}$ autour de la trajectoire d'un rayon lumineux



LOIS DE SNELL -DESCARTES



Quelles sont les directions du rayon réfléchi et du rayon transmis par rapport au rayon incident ?

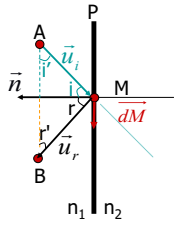
Willebrord Snell (1580-1626)

René Descartes 1596-1650

LOIS DE SNELL –DESCARTES (REFLEXION)

Fermat $\Rightarrow$ $dL(A \to M \to B) = 0$

$\vec{u}_i$ et $\vec{u}_r$ coplanaires



$$dL(A \to M \to B) = 0$$
$$\Rightarrow n_1\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{dM} - n_1\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{dM} = 0$$
$$\Rightarrow n_1.dM.\cos i' = n_1.dM.\cos r'$$
$$\Rightarrow \cos i' = \cos r'$$
$$\Rightarrow \sin i = \sin r$$
$$\Rightarrow i = r$$

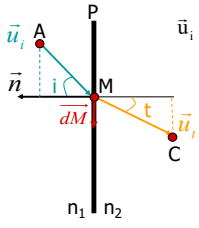
Rayons incidents et réfléchis dans le même plan
i = r

PASS

LOIS DE SNELL–DESCARTES (REFRACTION)

$dL(A \to M \to C) = 0$

$\vec{u}_i$ et $\vec{u}_t$ coplanaires



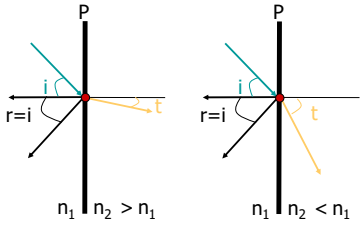
$$dL(A \to M \to C) = 0$$
$$n_1.\vec{u}_i.d\overrightarrow{M} - n_2.\vec{u}_t.d\overrightarrow{M} = 0$$
$$\Rightarrow n_1 \sin i = n_2 \sin t$$

Rayons incidents et transmis dans le même plan
$n_1 \sin i = n_2 \sin t$

PASS

LOIS DE SNELL -DESCARTES

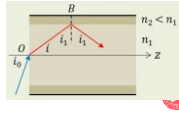
La lumière suit la trajectoire qui minimise le temps de parcours :



Rayons incidents réfléchis et transmis dans le même plan

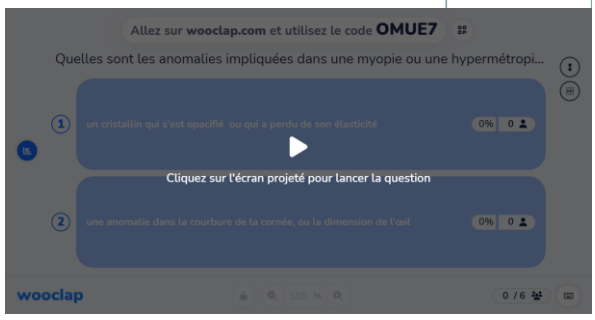
i = r
$n_1 \sin i = n_2 \sin t$

Conséquence: $(n_1/n_2) \sin i = \sin t \leq 1 \Rightarrow \sin i \leq n_2/n_1$
$n_2 < n_1 \Rightarrow$ réflexion totale si $i > \arcsin(n_2/n_1)$

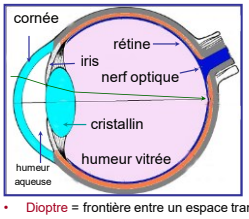


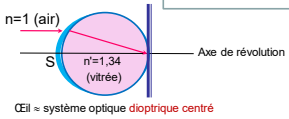
PASS

A VOTRE AVIS…



MODELISATION D'UN ŒIL HUMAIN





Œil ≈ système optique dioptrique centré

- Dioptre = frontière entre un espace transparent d'indice de réfraction n et un autre d'indice n' ≠ n
- Système optique = milieu transparent contenant des miroirs ou des dioptres
  - Pas de miroirs = système dioptrique
  - Miroirs = système catadioptrique
- Système optique centré = admettant un axe de révolution

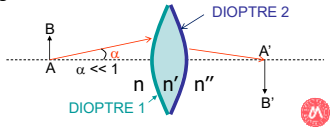
MODELISATION D'UN ŒIL (HYPOTHESES)

Approximation de Gauss :

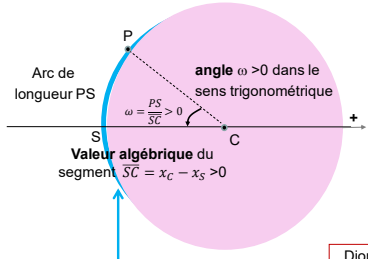
- système optique centré,
- dont les rayons lumineux s'écartent peu de l'axe (α<<1)

Dans l'approximation de Gauss, le système optique est

- stigmate si l'image de tout point A est un point A'
- aplanétique si l'image de tout segment AB ⊥ axe est un segment A'B' ⊥ axe



CONVENTIONS

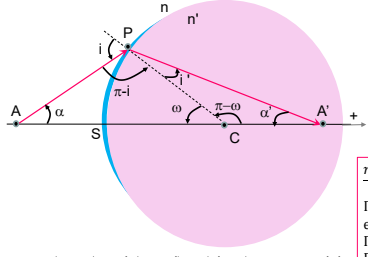


Axe optique (S,C) orienté positivement dans le sens de propagation de la lumière

Dioptre sphérique de sommet S = portion de surface d'une sphère de centre C et de rayon SC

Dioptre sphérique dans un système optique centré

FORMULE DE CONJUGAISON DU DIOPTRE SPHERIQUE MINCE



$$n.\sin(i) = n'.\sin(i') \overset{GAUSS}{\Longrightarrow} n.i = n'.i'$$

$$\pi - i + \omega + \alpha = \pi \Rightarrow i = \omega + \alpha$$

$$\pi - \omega + i' + \alpha' = \pi \Rightarrow i' = \omega - \alpha'$$

$$n.(\omega + \alpha) = n'.(\omega - \alpha') \Rightarrow (n' - n).\omega = n\alpha + n'\alpha'$$

$$\alpha = \frac{PS}{-\overline{SA}} \quad \alpha' = \frac{PS}{\overline{SA'}} \quad \omega = \frac{PS}{\overline{SC}}$$

$$\Rightarrow (n' - n).\frac{PS}{\overline{SC}} = n\frac{PS}{-\overline{SA}} + n'\frac{PS}{\overline{SA'}}$$

$$\frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} \overset{DEF}{=} \Pi$$

Π puissance ou vergence en dioptrie (Dp = m^{-1})

$\Pi > 0 \Rightarrow$ dioptre convergent

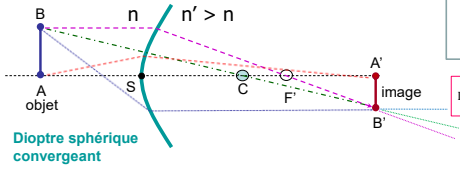
$\Pi < 0 \Rightarrow$ dioptre divergent

$\Pi = 0$

$\Rightarrow$ dioptre plan ou absent

Π est additive

CONSTRUCTION DES IMAGES



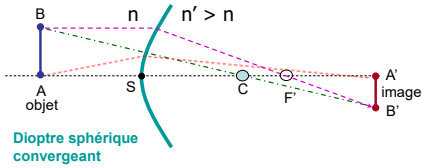
$$\Pi = \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}}$$

Dioptre sphérique convergeant

Un rayon normal au dioptre passe par le centre sans être dévié (Descartes)

Un rayon parallèle à l'axe optique émerge en coupant l'axe au foyer image F' avec $\Pi = \frac{n'}{\overline{SF'}}$

CONSTRUCTION DES IMAGES

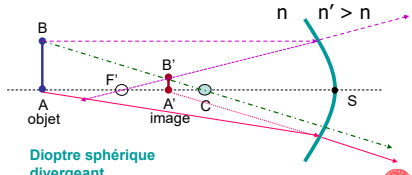


$$\Pi = \frac{n'-n}{SC} = \frac{n'}{SA'} - \frac{n}{SA}$$

Dioptre sphérique convergeant

Un rayon normal au dioptre passe par le centre sans être dévié (Descartes)

Un rayon parallèle à l'axe optique émerge en coupant l'axe au foyer image F' avec $\Pi = \frac{n'}{SF'}$

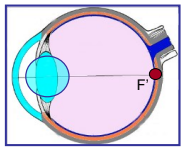


Dioptre sphérique divergeant

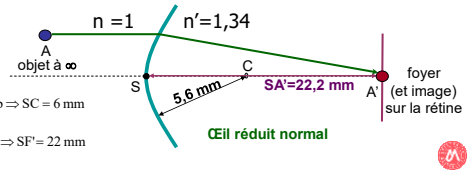
MODELE DE L'ŒIL REDUIT NORMAL

Cornée (42 Dp)
+
Cristallin
(22 Dp + δ)

= 4 dioptres



≅ 1 dioptre convergent (60 Dp)
La rétine est dans le plan focal image

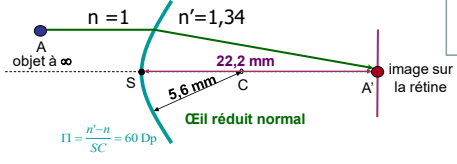


$$\Pi = \frac{n'-n}{SC} = 60\ \text{Dp} \Rightarrow SC = 6\ \text{mm}$$

$$\Pi = \frac{n'}{SF'} = 60\ \text{Dp} \Rightarrow SF' = 22\ \text{mm}$$

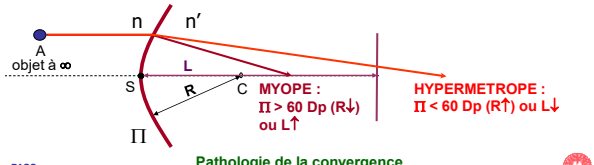
Œil réduit normal

AMETROPIES SPHERIQUES



Œil réduit normal

$$\Pi = \frac{n'-n}{SC} = 60\ \text{Dp}$$

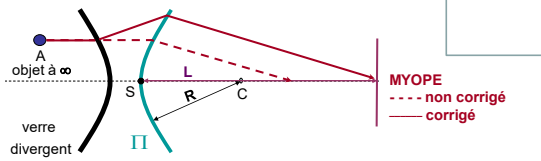


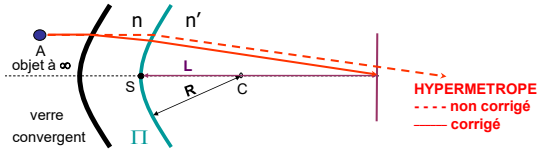
MYOPE :
Π > 60 Dp (R↓) ou L↑

HYPERMETROPE :
Π < 60 Dp (R↑) ou L↓

Pathologie de la convergence

CORRECTIONS DES AMETROPIES SPHERIQUES

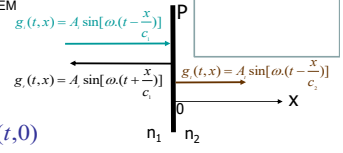




PASS

REFLEXION NORMALE

g représente par exemple E ou B d'une OEM



$$\frac{\partial g_i}{\partial x}(t,0) + \frac{\partial g_r}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial g_t}{\partial x}(t,0)$$

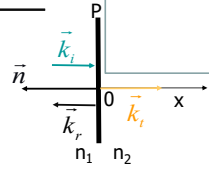
$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{\omega}{c_1}A_i + \frac{\omega}{c_1}A_r = -\frac{\omega}{c_2}A_t \Rightarrow A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2}A_t \\ &g_i(t,0) + g_r(t,0) = g_t(t,0) \Rightarrow A_i + A_r = A_t \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2}A_t = \frac{c_1}{c_2}(A_i + A_r) \Rightarrow 1 - \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_1}{c_2}\left(1 + \frac{A_r}{A_i}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{A_r}{A_i} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}}$$

PASS

REFLEXION NORMALE

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_r}{A_i} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \\ &c_i = \frac{c}{n_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_r}{A_i} = \frac{\frac{c}{n_2} - \frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2} + \frac{c}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$



En milieu homogène, l'intensité lumineuse est proportionnelle à A²:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \\ t &= \frac{I_t}{I_i} = 1 - r \end{aligned}}$$

Ex: lentille en verre (n_2=1,5) dans de l'air (n_1=1) : r= 4%
Conséquence: réflexion totale si $n_2 \to \infty$ (soit $n_2 >> n_1$)

PASS

REFLEXION NORMALE TOTALE

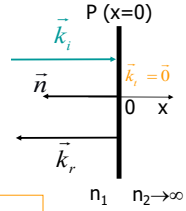
$\vec{E}_i(t,x) = \vec{E}_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$ $\quad \vec{E}_r(t,x) = -\vec{E}_0 \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]$

interférences : $\vec{E}(t,x) = \vec{E}_i(t,x) + \vec{E}_r(t,x)$

$\vec{E}(t,x) = \vec{E}_0 \left\{\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] - \sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]\right\}$

Rappel: $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

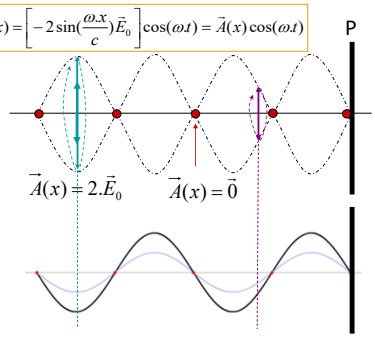
donc : $\vec{E}(t,x) = 2\vec{E}_0\left\{\sin\left[-\frac{\omega.x}{c}\right]\cos[\omega.t]\right\}$



$$\boxed{\vec{E}(t,x) = \left[-2\sin\left(\frac{\omega.x}{c}\right)\vec{E}_0\right].\cos(\omega.t) = \vec{A}(x).\cos(\omega.t)}$$

ONDE STATIONNAIRE

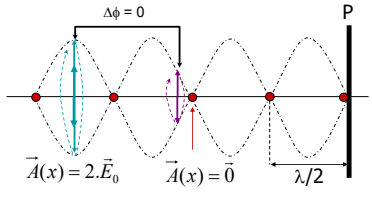
$$\boxed{\vec{E}(t,x) = \left[-2\sin\left(\frac{\omega.x}{c}\right)\vec{E}_0\right]\cos(\omega.t) = \vec{A}(x)\cos(\omega.t)}$$



Pas de déphasage

Amplitude $\vec{A}(x) = -2\sin\left(\frac{\omega.x}{c}\right)\vec{E}_0$ variable avec x

ONDE STATIONNAIRE



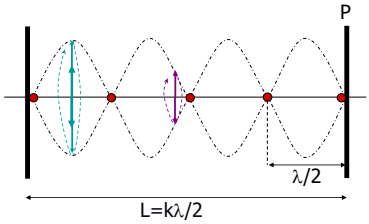
Pas de déphasage

Amplitude A(x) variable avec x

$$\sin\left(\frac{\omega.x}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi.x}{cT} = \frac{2\pi.x}{\lambda} = N.\pi \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 3\frac{\lambda}{2}, \ldots\right\}$$

$$\boxed{\vec{E}(t,x) = \left[-2\sin\left(\frac{\omega.x}{c}\right)\vec{E}_0\right]\cos(\omega.t) = \vec{A}(x).\cos(\omega.t)}$$

ONDE STATIONNAIRE & QUANTIFICATION



λ=2L/k
k entier naturel

$$\vec{E}(t,x) = \left[-2\sin\left(\frac{\omega.x}{c}\right)\vec{E}_0\right]\cos(\omega.t)$$

Si le milieu est limité de dimension L, λ ne peut prendre que certaines valeurs discrètes 2L/k :

λ=2L, L, 2L/3, L/2,…

On dit que ces grandeurs sont quantifiées

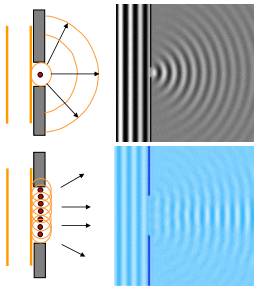
OBJECTIFS DU POINT D' ÉTAPE 3

Savoir définir, caractériser et manipuler:

- Un chemin optique et le principe de Fermat
  - Calculs de chemins optiques dans diverses configurations
- Les lois de Descartes et la réflexion normale
  - Dans des contextes géométriques variés
- Les coefficients de réflexion et de transmission
- Onde stationnaire en lien avec la quantification
- L'approximation de Gauss, la relation de conjugaison du dioptre et ses applications dans la correction des amétropies sphériques

DIFFRACTION

Rappel du principe de Huygens-Fresnel : chaque point d'une surface d'onde agit comme une source ponctuelle émettant en phase,



Diffraction = changement de direction d'une onde au passage d'un écran percé d'un trou de diamètre b de l'ordre ou inférieur à la longueur d'onde.

Après l 'écran :

① une ou plusieurs ondes sphériques se propagent.

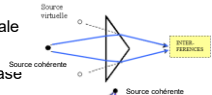
② un déphasage apparaît entre les rayons émis dans une direction

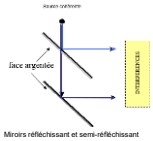
③ les ondes cohérentes ré-émises peuvent s'additionner algébriquement = interférences

A VOTRE AVIS…

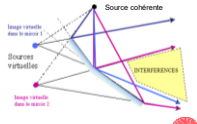
INTERFERENCES

- Définition : Addition algébrique d'ondes progressives pures cohérentes
  - Attention : il ne s'agit pas simplement de l'addition des intensités des ondes (qui a lieu même avec des ondes incohérentes)
- Exemples :
  - Onde stationnaire après réflexion normale
  - Ondes sphériques après diffraction
  - Onde fractionnée avec décalage de phase





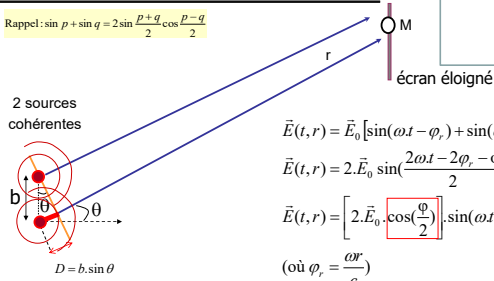
Miroirs réfléchissant et semi-réfléchissant



Bi-prisme et miroirs de Fresnel

INTERFERENCES DE 2 SOURCES COHERENTES

Rappel : $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$



$$\vec{E}(t,r) = \vec{E}_0\left[\sin(\omega.t - \varphi_r) + \sin(\omega.t - \varphi_r - \varphi)\right]$$

$$\vec{E}(t,r) = 2.\vec{E}_0\sin\left(\frac{2\omega.t - 2\varphi_r - \varphi}{2}\right).\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\vec{E}(t,r) = \left[2.\vec{E}_0.\boxed{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right].\sin\left(\omega.t - \varphi_r - \frac{\varphi}{2}\right)$$

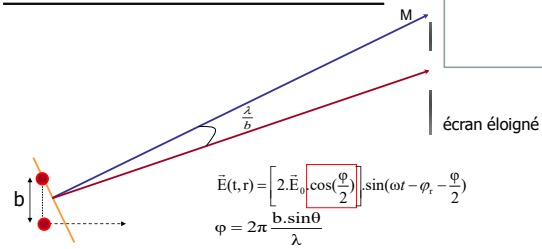
(où $\varphi_r = \frac{\omega r}{c}$)

$$D = b.\sin\theta$$

$$\varphi = \frac{\omega}{c}D = \frac{2\pi}{\lambda}D$$

$$\Rightarrow \varphi = 2\pi\frac{b.\sin\theta}{\lambda}$$ indépendant du temps t

INTERFERENCES DE 2 SOURCES COHERENTES



$$\vec{E}(t,r) = \left[2.\vec{E}_0.\boxed{\cos(\frac{\varphi}{2})}\right].\sin(\omega t - \varphi_r - \frac{\varphi}{2})$$

$$\varphi = 2\pi\frac{b.\sin\theta}{\lambda}$$

Amplitude (donc intensité) maximum si |cos(φ/2)| maximum, soit si φ /2 multiple de π

$$\frac{\varphi}{2} = \pi.\frac{b.\sin\theta}{\lambda} = k.\pi \Leftrightarrow \sin\theta = k.\frac{\lambda}{b} \approx \theta$$

Succession de bandes claires et sombres → mesures de petits déplacements, astronomie

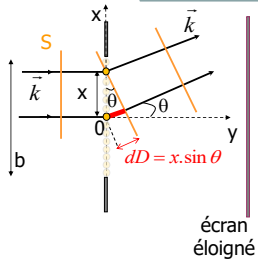
INTERFERENCES APRES DIFFRACTION

Calcul du déphasage entre deux rayons distants de x, diffractés sous un angle θ :

$$d\varphi = \frac{\omega}{c}dD = \frac{2\pi}{\lambda}dD$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{2\pi.\sin\theta}{\lambda}x = \Theta.x$$

Dans la direction θ, l'onde observée après diffraction est la somme de toutes les ondes déphasées ayant passé l'obstacle entre –b/2 et +b/2 et ayant été diffractées dans la direction θ: $\vec{E} = \int_{-b/2}^{b/2}\frac{\vec{A}_0}{b}\sin(\omega.t - \Theta x).dx$



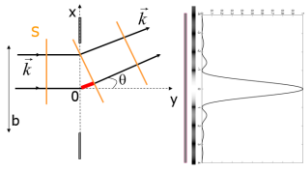
ONDE DIFFRACTEE (Cf. Annexe 2)

$$\vec{E} = \int_{-b/2}^{b/2}\frac{\vec{A}_0}{b}\sin(\omega t - \Theta x).dx \quad \text{avec} \quad \Theta = \frac{2\pi.\sin\theta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \boxed{\vec{A}_0.\sin c\left(\frac{\pi b.\sin\theta}{\lambda}\right)}\sin(\omega t)$$

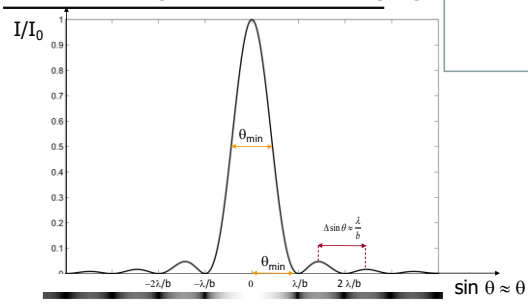
où $\sin c(x) = \frac{\sin x}{x}$

Amplitude $\vec{A}$ minimale pour π.b.sin θ /λ = N. π



$$\vec{A} = \vec{A}_0.\text{sinc}(\frac{\pi\, b \sin\theta}{\lambda}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sin\theta_{min} = N\frac{\lambda}{b}, \quad \text{N entier}$$

INTERFERENCES APRES DIFFRACTION

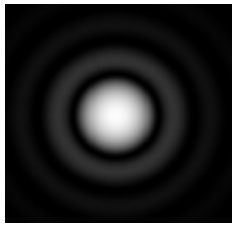


$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{b} \approx \theta_{min}$ est aussi la largeur à mi-hauteur du maximum principal

DIFFRACTION PAR DES ECRANS

ORIFICE CARRE DE COTE b $\sin\theta^{N}_{min} = N.\frac{\lambda}{b}$

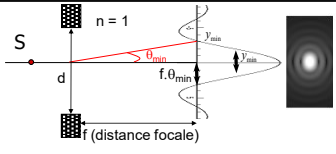
ORIFICE CIRCULAIRE DE DIAMETRE d



$\sin\theta^{N}_{min} = 1{,}22\,.\,N.\frac{\lambda}{d}$

N entier positif

LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION



$\theta_{min} \approx \sin\theta_{min} = 1{,}22\,.\,\frac{\lambda}{d}$

$y_{min} \approx f.\theta_{min} \approx f.1{,}22\,.\,\frac{\lambda}{d}$

N = f/d = nombre d'ouverture des objectifs photographiques (d = f/2,8 > f/22)

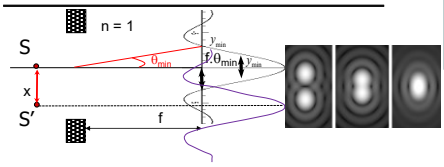
$$y_{min} \approx f.\theta_{min} \approx 1{,}22\,.\,\lambda.\,N$$

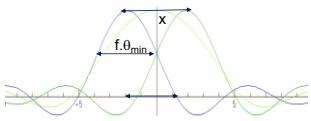
θ_{min} est la résolution angulaire
y_{min} est la résolution spatiale

Plus le nombre d'ouverture N = f/d est grand,
plus la diffraction dégrade la résolution (y_{min} ↑)

N↓ et d↑
Ø tache ↓
résolution ↑

LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION



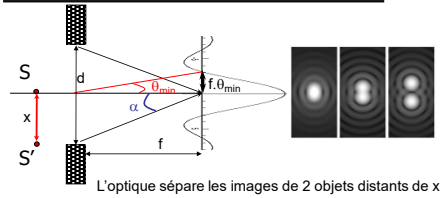


$x \leq f.\theta_{min}$: fusion des 2 objets

$x > f.\theta_{min}$: 2 objets vus

Le diaphragme sépare les images si x > LMH = $f.\theta_{min} = 1{,}22.\lambda.f/d = 1{,}22.\lambda.N$

LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION



L'optique sépare les images de 2 objets distants de x > LMH = $f.\theta_{min}$

LMH = R = pouvoir séparateur = résolution

$$\sin\alpha \approx tg\alpha = \frac{\frac{d}{2}}{f} = \frac{d}{2f} \Rightarrow \frac{f}{d} \approx \frac{1}{2\sin\alpha}$$

Si on interpose une goutte d'huile d'indice n entre le diaphragme et l'écran de visualisation, il faut remplacer la longueur d'onde dans le vide λ par λ/n :

$$\lambda_n = c_n.T = \frac{c}{n}.T = \frac{\lambda}{n}$$

Pouvoir séparateur d'un instrument d'optique:

$$R = 1{,}22.\lambda.\frac{f}{d} = \frac{0{,}61.\lambda}{\sin\alpha}$$

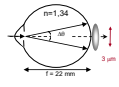
ou $\frac{0{,}61.\lambda}{n.\sin\alpha}$ si le milieu image est d'indice n

LA DIFFRACTION LIMITE LA RESOLUTION

Résolution angulaire $\theta_{min} = 1{,}22 . \lambda/d$

Résolution spatiale $R = 1{,}22 . \lambda f/d = 0{,}61. \lambda/(n.\sin\alpha)$

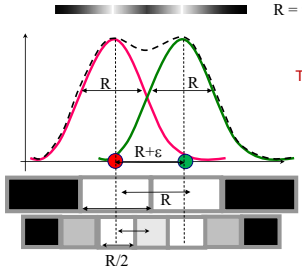
- Pupille d = 5 mm, λ_n = 500/1,34 nm $\Rightarrow \theta_{min}$ = 91 µrad.
  R = $f.\theta_{min}$ = 2 µm



- Microscope d = 1 cm, λ = 500 nm, n.sin α = 1,5
  $\Rightarrow$ R = 0,2 µm et donc f = 3,3 mm et θ_{min} = 61 µrad

- Intérêt des optiques de grand diamètre (télescopes)
- intérêt des faibles λ (rayons X ou γ, …)
- Intérêt d'un milieu de n élevé entre la lame et le microscope

RESOLUTION ET NUMERISATION



Théorème d'échantillonnage de Shannon:

Numérisation sans perte d'information
⇕
Dimension du pixel = R/2

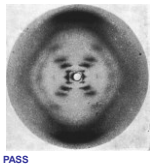
Exemple: calcul du diamètre optimal des cônes de la rétine: 2 μm/2 = 1 μm

Données histologiques :
Bâtonnets : 2 μm ; Cônes : 1 à 3 μm

Nb: la diffraction n'est pas la seule à limiter la résolution, cf. DFGSM2

APPLICATIONS DE LA DIFFRACTION

- Holographie
- Détermination des structures moléculaires
  - sin θ ≈ λ/d donne l'ordre de grandeur de d
  - La symétrie de la figure de diffraction reflète celle de l'objet diffractant
  - Rayons X : λ ≈ Å, adaptés à sonder les structures moléculaires
  - L'analyse de Fourier des figures de diffraction générées par des molécules biologiques cristallisées permet d'en déduire la structure



« photographie 51 »
RE Franklin & R Gosling.
Nature. 171,740-741. 1953

⇨

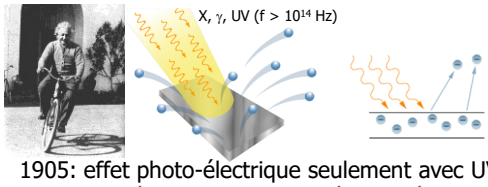
A structure of DNA
JD Watson & FHC Crick.
Nature. 171, 737-738. 1953
(parmi 5 articles)

OBJECTIFS DU POINT D' ÉTAPE 4

- Savoir :
  - Définir des ondes cohérentes, interférence, diffraction.
  - Évaluer si des interférences sont possibles
  - Calculer un déphasage et une interférence dans des cas simples.
  - Manipuler la relation sin θ_{min}=N.λ/b
  - en déduire les caractéristiques de résolution angulaire des instruments optiques et les conditions de numérisation.

APPROCHE EXPERIMENTALE

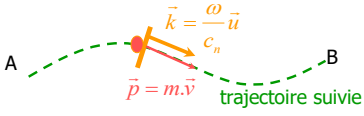
↳Pression de radiation: lumière ⇒ chocs de particules ?



1905: effet photo-électrique seulement avec UV, X ou γ

↳ Lumière = Particules dont l'énergie dépend de f ?

DUALITE ONDE-CORPUSCULE



Problème : modéliser ensemble les deux caractéristiques de la lumière :

- ondulatoires : réflexion, réfraction, diffraction, interférences…
- corpusculaires : chocs, effet photo-électrique, effet Compton…

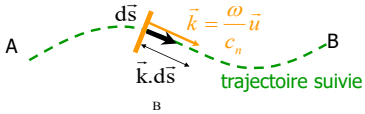
Idée : Modéliser via le principe de moindre action et l'analogie entre :

- ondulatoire : surface d'onde / vecteur d'onde k
- corpusculaire : masse / quantité de mouvement $\vec{p}$

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

Aspect ondulatoire: principe de Fermat (1657)

1601-1665



$$C = \int_A^B n.ds \quad \text{chemin optique minimal}$$

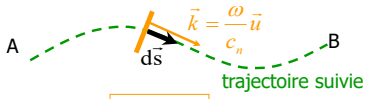
$$C = \int_A^B n.ds = \int_A^B \frac{c}{c_n}.ds = \int_A^B \frac{c}{c_n}\frac{\omega}{\omega}.ds = \frac{c}{\omega}\int_A^B \frac{\omega}{c_n}.ds = \frac{c}{\omega}\int_A^B \vec{k}.d\vec{s}$$

car $n = \frac{c}{c_n}$

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

Aspect ondulatoire: principe de Fermat (1657)

1601-1665

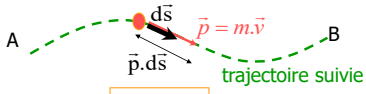


$$A = \int_A^B \vec{k}.d\vec{s}$$ minimale

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

Aspect corpusculaire: principe de Maupertuis (1744)

1698-1769



$$A = \int_A^B \vec{p}.d\vec{s}$$ minimale

Justifications :

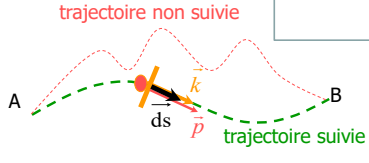
m et v constants $\Rightarrow \int_A^B p.ds = \int_A^B m.v.ds = m.v.\int_A^B ds = m.v.(s_B - s_A)$

E_c constant $\Rightarrow \int_A^B p.ds = \int_A^B m.v.ds = \int_A^B m.v.\frac{ds}{dt}.dt = \int_A^B m.v^2.dt = 2.E_c\int_A^B dt = 2.E_c(t_B - t_A)$

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION

$$A = \int_A^B \vec{k}.d\vec{s}$$

$$A' = \int_A^B \vec{p}.d\vec{s}$$



Description ondulatoire et corpusculaire de la lumière
$\Rightarrow$ A et A' minimaux ensembles

Il suffit d'avoir $\vec{p}$ et $\vec{k}$ proportionnels : $\vec{p} = \hbar.\vec{k}$

RELATION DE LOUIS DE BROGLIE

$$p = \hbar.k \Rightarrow p = \hbar.\frac{\omega}{c_n} = \hbar.\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{h}{\lambda_n}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Constante de Planck
h = 6,62 10^{-34} J.s
$\hbar = h/2\pi$

Longueur d'onde (m)

quantité de mouvement de la particule (kg.m.s^{-1})

ONDE ↔ PARTICULE

1892-1987

APPLICATION NUMERIQUE

- Sujet de 70 kg se déplaçant à 10 km/h

$$\lambda = \frac{6.62.10^{-34}}{70.10000/3600} = 3{,}4.10^{-36}\,\text{m} \quad << \quad 10^{-18}\ \text{m (électron)}$$

- Électron accéléré sous 100 V

$$\frac{1}{2}m.v^2 = e.V \Rightarrow m^2.v^2 = 2m.e.V \Rightarrow p = m.v = \sqrt{2.m.e.V} = 5{,}4.10^{-24}\,\text{kg.m.s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{6.62.10^{-34}}{5{,}4.10^{-24}} = 1{,}2.10^{-10}\,\text{m} \approx \text{dimensions atomiques}$$

Donc : comportement ondulatoire (diffraction) des électrons

Les électrons ⇒↑ résolution des microscopes (∝ λ↓/d)

mais ce comportement ne peut pas se manifester pour un humain …

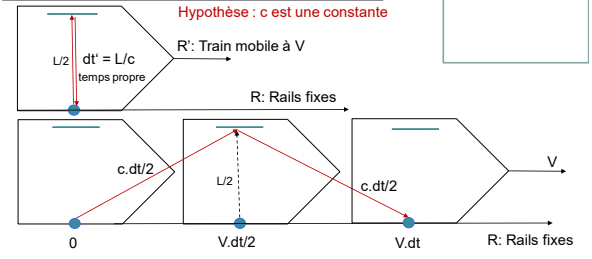
3 CONSEQUENCES DE LA DUALITE O.C

- Relation du quantum d'Einstein
  - Que signifie λ=h/p dans le cas d'un photon (m=0 mais p≠0) ?
- Relations d'incertitudes d'Heisenberg
  - Ou comment le hasard entre en jeu du fait de la dualité onde-corpuscule
- Quantification des grandeurs physiques
  - Ou l'on renonce à la continuité des grandeurs physiques

A VOTRE AVIS…

On dispose de deux horloges identiques parfaitement justes et synchronisées. L'une d'entre-elle est embarquée dans un avion fait un tour de la terre avant de revenir au sol où la seconde horloge est restée. On compare alors les temps enregistrées sur ces deux horloges.

RELATIVITE RESTREINTE



$$\left(\frac{c.dt}{2}\right)^2=\left(\frac{V.dt}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow dt^2.(c^2-V^2)=L^2=c^2.dt'^2 \Rightarrow dt^2=\frac{c^2.dt'^2}{c^2-V^2}=\frac{dt'^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

$$dt=\frac{dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\gamma.dt' \quad \text{où} \quad \gamma\geq 1$$

PASS

Exemple: V = 0,87.c ⇒ γ = 2
Si vue de l'intérieur du train, l'horloge bat toutes les ns (dt'=L/c=10^{-9}s), alors elle bat 2 fois plus lentement (dt=2 ns), vue du sol.

IMPULSION & ENERGIE EN RELATIVITE

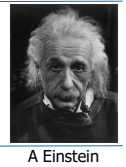
$$p=m\frac{dr}{dt'}=m\frac{dr}{dt}\frac{dt}{dt'}=m\frac{dr}{dt}\gamma \Rightarrow \boxed{p=\gamma.m.V} \quad \text{où} \quad \frac{dt}{dt'}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\gamma$$

En particulier, $\boxed{V=c \Rightarrow m=0}$

de plus, comme $(1-\varepsilon)^n \overset{\varepsilon\to 0}{\approx} (1-n.\varepsilon)$

$$\gamma.\mathrm{mc}^2=\frac{\mathrm{mc}^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\mathrm{mc}^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \overset{V<<c}{\approx} \mathrm{mc}^2.\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)=\mathrm{mc}^2+\frac{1}{2}mV^2=E$$

Donc, en généralisant : $\boxed{E=\gamma.\mathrm{mc}^2}$



A Einstein
1879-1955

$$E=\gamma.m.c^2=\frac{p}{V}.c^2=p.c \quad \text{si} \quad V=c \quad \text{donc} \quad \boxed{m=0 \Rightarrow E=p.c}$$

Remarque, plus généralement :

$$E^2=\gamma^2\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4=\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4(1+\gamma^2-1)=\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4\left(1+\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}-1\right)=\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4\left(1+\frac{\frac{V^2}{c^2}}{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)=\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4\left(1+\gamma^2\frac{V^2}{c^2}\right) \Rightarrow E^2=\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4+\mathrm{m}^2\mathrm{c}^2\gamma^2V^2 \Rightarrow E^2=\mathrm{m}^2\mathrm{c}^4+\mathrm{p}^2\mathrm{c}^2$$

PASS

RELATION DU QUANTUM

Pour une particule (PHOTON) associée à une onde électromagnétique se déplaçant à la célérité de la lumière c :

$$M = \frac{m_{repos}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{donc} \quad V = c \Rightarrow m_{repos} = 0$$

$$m_{repos} = 0 \Rightarrow E = p.c$$

La relation de L. de Broglie s'écrit dans ce cas particulier :

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{hc}{\lambda} = hf = \hbar.\omega} \qquad \hbar \overset{DEF}{=} \frac{h}{2\pi}$$

E : énergie du photon
ω, f et λ: pulsation, fréquence et longueur de l'OEM associée
c: célérité des OEM dans le vide;
h: constante de Planck, $\hbar$: constante de Planck réduite

RELATION DU QUANTUM

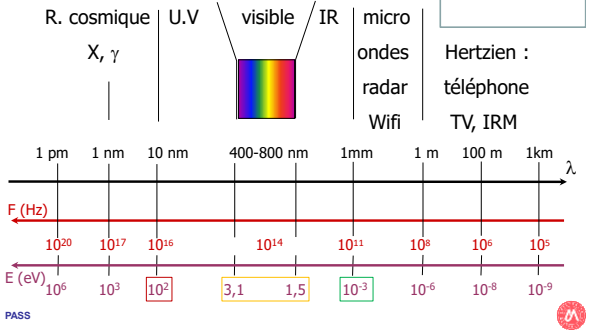
$$E = \frac{hc}{\lambda} = hf = \hbar.\omega \quad \text{où} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Électron-volt = énergie acquise par un électron accéléré sous 1 V :
E = q.V où q=e et V=1
1 eV = 1,602.10^{-19} J

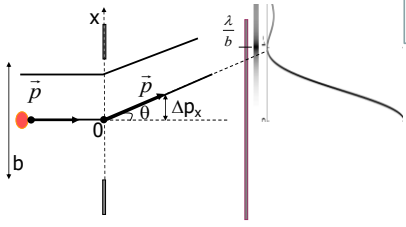
$$E(eV) = \frac{h.c}{e.\lambda(nm).10^{-9}} \Rightarrow E(eV) = \frac{6{,}626.10^{-34}.2{,}998.10^{8}}{1{,}602.10^{-19}.\lambda(nm).10^{-9}} \qquad \boxed{E(eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)}}$$

Attention: cette relation ne s'applique pas aux particules de masses au repos non nulles

CLASSIFICATION SIMPLIFIEE



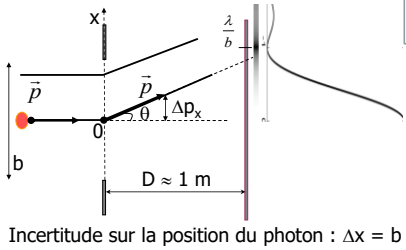
RETOUR SUR LA DIFFRACTION



La même figure d'interférences est enregistrée sur une plaque photographique lorsque les photons sont émis un par un

Interprétation ?

RETOUR SUR LA DIFFRACTION



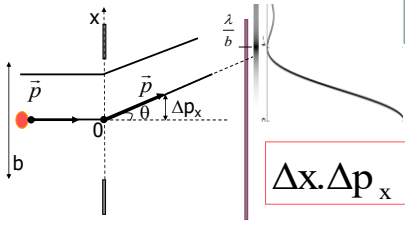
Incertitude sur la position du photon : $\Delta x = b$

Incertitude sur l'impulsion du photon : $\Delta p_x = p.\sin\theta$

si θ petit et $D \approx 1m$, alors $p.\sin\theta \approx p.\theta \approx p.\ \lambda/b$

Alors $\Delta x.\ \Delta p_x \approx b.\ p.\ \lambda/b = p.\ \lambda = h\ (\approx h/2\pi)$

RETOUR SUR LA DIFFRACTION



$$\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar \neq 0$$

L'incertitude sur la direction de diffraction de l'OEM se retrouve dans l'impossibilité de connaître avec une absolue précision à la fois la position et l'impulsion du photon

RELATIONS D'INCERTITUDE D'HEISENBERG

$$\Delta x.\Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta E.\Delta t \geq \hbar$$

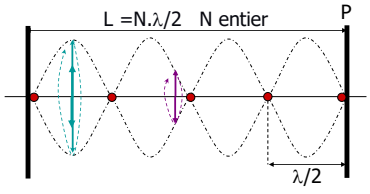
ΔE : énergie échangée lors d'une interaction de durée Δt

1901-1976

Pour calculer une trajectoire à partir de la relation fondamentale de la dynamique ($\Sigma f=ma$), il faut connaître exactement les positions et impulsions initiales, ce qui n'est pas le cas.

Donc, il n'y a pas de trajectoire définie à l'échelle des particules élémentaires, mais seulement des probabilités de présence p

QUANTIFICATION



Dualité Onde-particule ⇒ L. d'onde λ=2.L/N quantifiée
⇒ fréquence f=c/λ=N.c/(2L) quantifiée
⇒ Énergie = hf =N.h.c/(2L) quantifiée

Les grandeurs physiques ne varient pas continûment, mais par multiples d'une grandeur élémentaire: elles sont quantifiées.

OBJECTIFS DU POINT D' ÉTAPE 5

- Savoir expliquer pourquoi une modélisation duale ondulatoire et corpusculaire entraîne :
  - λ = h/p et E= hc/ λ pour les particules de masses nulles
  - $\Delta x.\Delta p_x$ borné inférieurement et la perte du concept de trajectoire
  - La quantification des grandeurs physiques
- Savoir manipuler :
  - Les relations λ = h/p et E= hc/ λ
  - Et les conséquences de E= hc/ λ sur la classification des REM
- Connaître: les ordres de grandeur limites en énergie des photons :
  - (X,γ) : E > 10-100 eV ; (visible) : E = 1-3 eV; (Hertzien) : E < 1 meV

LE MODELE STANDARD

BOSONS DE JAUGE (INTERACTIONS)

INTERACTION	BOSON	CIBLE	PORTEE fm	I/I_f
FORTE	8 GLUONS	HADRON	1	1
ELECTRO-MAGNETIQUE	PHOTON	CHARGEE	∞	10^{-3}
FAIBLE	Z^0 W^+, W^-	TOUTE	10^{-3}	10^{-5}
GRAVITATION	(GRAVITON) ?	MASSIQUE	∞	10^{-38}

FERMIONS (MATIERE)

6 quarks ⟷ 6 leptons

u	c	t	2e/3
d	s	b	-e/3

e	μ	τ	-e
ν_e	ν_μ	ν_τ	0

+ 6 anti-quarks
6 anti-leptons

paires/triplets :

HADRONS

proton = (uud) $q=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)e=e$

neutron = (udd) $q=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)e=0$

ELECTRON
e = 1,6 10^{-19} C

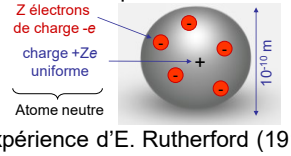
PASS

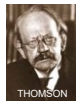
ATOME = (p,n,e)

ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

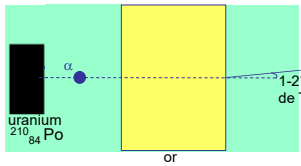
MODELES ATOMIQUES

- Modèle atomique de Thomson





- Expérience d'E. Rutherford (1911)



1-2° suivant le modèle de Thomson

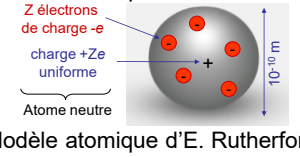
PASS

Animation sciencesphy.free.fr

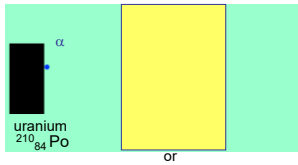
ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

MODELES ATOMIQUES

- Modèle atomique de Thomson



- Modèle atomique d'E. Rutherford (1911)

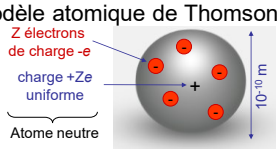


PASS

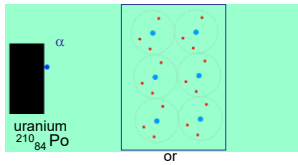
Animation sciencesphy.free.fr

MODELES ATOMIQUES

- Modèle atomique de Thomson



- Modèle atomique d'E. Rutherford (1911)



or

Animation sciencesphy.free.fr

UNITES EN PHYSIQUE ATOMIQUE

- Energie : électron-volt (eV)
  - 1 eV = énergie cinétique acquise par un électron qui passe, dans le vide, d'un point à un autre ayant un potentiel supérieur de 1 volt

  - 1 eV = e.V = 1,6 10^{-19} J

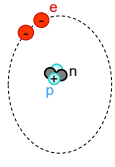
- Masse :
  - Unité de masse atomique = u
  - 1 u = $\frac{1}{12}$ masse d'un atome de carbone 12: $1\,u = \frac{1}{12} \cdot \frac{12.10^{-3}}{6{,}022.10^{23}} = 1{,}66.10^{-27}\,kg$
  - Au repos: E = m.c² ⇒ m = E/c² en MeV ou MeV/c²

$$1\,u = \frac{1{,}66.10^{-27}.(299\,792\,458)^2}{1{,}602.10^{-19}} = 931\ \ MeV$$

MODELE ATOMIQUE DE RUTHERFORD

- Atome : $^{A}_{Z}X$
  - Z = numéro atomique = Nb d'électrons et de protons
  - A = nombre de masse = Nb de nucléons (A=Z+N)
  - m_e= 9,109 10^{-31} kg = 0,511 MeV
    << m_p=1,673 10^{-27} kg ≈ 938 MeV < m_n=1,675 10^{-27} kg ≈ 940 MeV

- ISOTOPE : même Z *exemple :* $^{1}_{1}H$ et $^{2}_{1}H$
- ISOBARE : même A *exemple :* $^{40}_{19}K$ et $^{40}_{20}Ca$
- ISOTONE : même N *exemple :* $^{26}_{12}Mg$ et $^{27}_{13}Al$



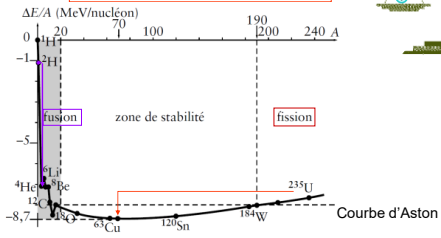
- Dimensions des nucléons r ≈ 1,4 fm
- Dimension du noyau R / $\frac{4}{3}\pi R^3 \approx A\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow R \approx \sqrt[3]{A}.r$
  - R < $257^{1/3}$. 1,4 < 10 fm ⇒ interaction forte dans le noyau

MODELE ATOMIQUE DE RUTHERFORD

- Défaut de masse : $M\left({}^{A}_{Z}X\right) < Z.m_p + (A-Z).m_n$

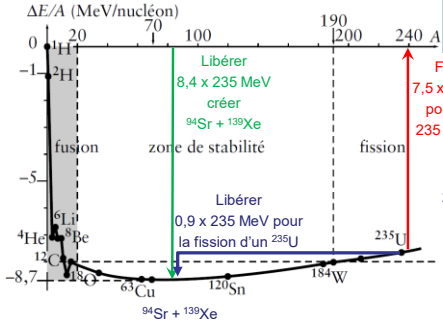
  Le défaut de masse correspond à une énergie de liaison nucléaire par interaction forte

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = Z.m_p + (A-Z).m_n - M\left({}^{A}_{Z}X\right) > 0$$



Courbe d'Aston

ENERGIES DE FISSION ET FUSION



Libérer
8,4 x 235 MeV
créer
$^{94}Sr + {}^{139}Xe$

Libérer
0,9 x 235 MeV pour
la fission d'un ^{235}U

Fournir
7,5 x 235 MeV
pour isoler
235 nucléons

235 x 0,9=211 MeV

Q = 211 10^6x e x $\mathcal{N}$
Q ≈ 20.10^{12} J/mol

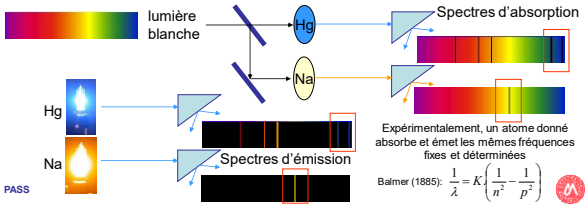
$C + O_2 \rightarrow CO_2 + Q'$
Q' = 418 kJ/mol

Q/Q' = 48 10^6

MODELE ATOMIQUE DE RUTHERFORD

- Un électron en orbite s'écraserait sur le noyau
  - mouvement accéléré (circulaire, de période T)
  - donc rayonne une onde électromagnétique f=1/T (antenne)
  - donc perd de l'énergie et T diminue ⇒ f ↑

- et émettrait des fréquences continûment variables.



Expérimentalement, un atome donné absorbe et émet les mêmes fréquences fixes et déterminées

Balmer (1885): $\frac{1}{\lambda} = K\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$

OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 6

- Savoir définir :
  - 4 interactions + hadrons (p,n) + leptons (e, ν)
  - Le modèle de Rutherford et ses limites
  - Isotope, isotone, isobare
- Savoir manipuler
  - Les unités atomiques de masse et d'énergie
  - Le défaut de masse ΔM

A VOTRE AVIS…

Vous avez appris en cours de chimie que les électrons atomiques ne pouvaient prendre que certains niveaux d'énergie discrets, ce qui a permis de construire le modèle des orbitales atomiques et des liaisons covalentes. Pourquoi un électron atomique ne peut-il pas prendre un niveau d'énergie quelconque, à la manière d'un satellite en orbite ?

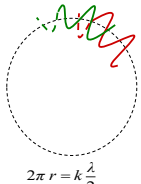
MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Dualité onde-électron ⇒ quantification

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

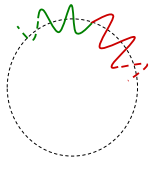
- Quantification : $2\pi\, r = n\lambda$

hydrogénoïde : $1e^-$



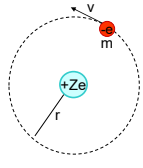
$2\pi\, r = k\,\frac{\lambda}{2}$

k entier impair



$2\pi\, r = n\lambda$

$k = 2.n$



MODELE ATOMIQUE DE BOHR

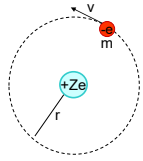
- Dualité onde-électron $\Rightarrow$ quantification
- Quantification : $\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{h}{mv} \\ 2\pi r = n\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi r = \dfrac{nh}{mv}$

  $\Rightarrow mv\,r = n\hbar$ où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

  - D'où la quantification du Mt cinétique de l'e⁻ :

    $\|\vec{L}\| = \|\vec{p} \wedge \vec{r}\| = mv\,r = n\hbar$ avec n = 1,2,...

hydrogénoïde : 1e⁻



ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Dualité onde-électron $\Rightarrow$ quantification
- Quantification : $\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{h}{mv} \\ 2\pi r = n\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi r = \dfrac{nh}{mv}$

  $\Rightarrow mv\,r = n\hbar$ où $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$

  - D'où la quantification du Mt cinétique de l'e⁻ :

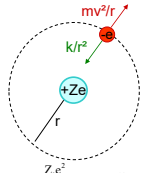
    $\|\vec{L}\| = \|\vec{p} \wedge \vec{r}\| = mv\,r = n\hbar$ avec n = 1,2,...

- RFD : $\left.\begin{array}{l}\dfrac{k}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r} \Rightarrow (mv)^2 = \dfrac{km}{r} \\ \text{mais } (mv)^2 = \left(\dfrac{n\hbar}{r}\right)^2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r = n^2\dfrac{\hbar^2}{km} = n^2 r_0}$

  $r_0 = \dfrac{0{,}53}{Z}10^{-10}\,m$

quantification de rayon orbital

hydrogénoïde : 1e⁻



$k = \dfrac{Z.e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2{,}3.10^{-28}Z$

ONDES SON OEM PROPAGATION(VISION) DUALITE ATOME X RA

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Energie cinétique de l'e⁻ :

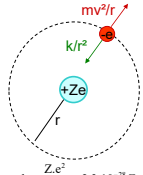
  $\left.\begin{array}{l}E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 \\ RFD \Rightarrow (mv)^2 = \dfrac{km}{r}\end{array}\right\} \Rightarrow E_c = \dfrac{k}{2r}$

- Energie potentielle de l'e⁻ : $E_p = -eV = -\dfrac{k}{r}$

  $V = \dfrac{Z.e}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$

  - En prenant $E_p(\infty)=0$

hydrogénoïde : 1e⁻



$k = \dfrac{Z.e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2{,}3.10^{-28}Z$

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

- Energie cinétique de l'e⁻ :

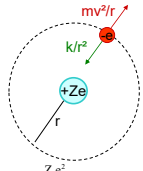
$$\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}mv^2 \\ RFD \Rightarrow (mv)^2 = \frac{km}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow E_c = \frac{k}{2r}$$

- Energie potentielle de l'e⁻ : $E_p = -eV = -\frac{k}{r}$
  - En prenant $E_p(\infty)=0$
- Energie de l'électron : $E = E_c + E_p = -\frac{k}{2r}$

$$r = n^2\frac{\hbar^2}{km} \Rightarrow E = -\frac{m}{2}\left(\frac{k}{\hbar}\right)^2\frac{1}{n^2} \Rightarrow E = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\frac{Z^2}{n^2}$$

$$\boxed{E(eV) = -13{,}6.\frac{Z^2}{n^2}}$$

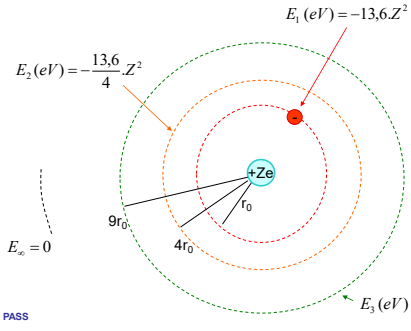
hydrogénoïde : 1e⁻



$k = \frac{Z.e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2{,}3.10^{-28}Z$

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Pour un atome hydrogénoïde (i.e à un électron)

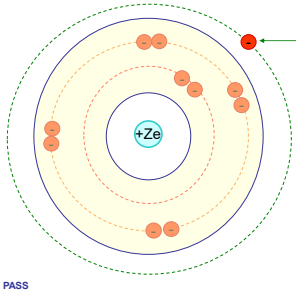


$$\boxed{E_n(eV) = -13{,}6.\frac{Z^2}{n^2}}$$

N. Bohr

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Pour un atome à plus d'un électron (Z=1)



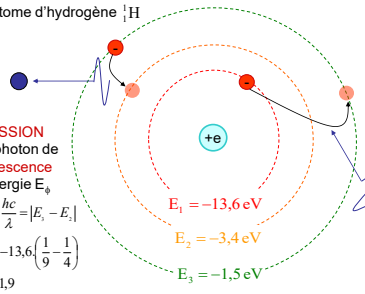
EFFET D'ÉCRAN :
la charge du noyau « vue » par l'électron périphérique semble diminuée de σ.e

$$\boxed{E_{n,\sigma}(eV) = -13{,}6.\frac{(Z-\sigma)^2}{n^2}}$$

MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Pour l'atome d'hydrogène $^{1}_{1}H$

$$E_n(eV) = -13{,}6.\frac{1}{n^2}$$



EMISSION d'un photon de fluorescence d'énergie E_ϕ

$$E_\phi = hf = \frac{hc}{\lambda} = |E_1 - E_2|$$

$$E_\phi(eV) = -13{,}6.\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)$$

$$E_\phi(eV) = 1{,}9$$

ABSORPTION d'un photon d'énergie E_ϕ

$$E_\phi = hf = \frac{hc}{\lambda} = |E_1 - E_3|$$

$$E_\phi(eV) = -13{,}6.\left(\frac{1}{9} - 1\right)$$

$$E_\phi(eV) = 12.1$$

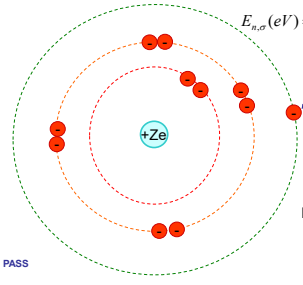
Explique la formule de Balmer (1885) pour une transition p→n et aux spectres d'absorption/émission :

$$\frac{1}{\lambda} = K.\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) = -\frac{13{,}6.e}{h.c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

ENERGIE D'IONISATION $E^i_{n,\sigma} = -E_{n,\sigma}$

C'est l'énergie minimale nécessaire pour soustraire un électron atomique à l'influence électrostatique du noyau

$$E_{n,\sigma}(eV) = -13{,}6.\frac{(Z-\sigma)^2}{n^2}$$



$$E_\varphi = E^i_{n,\sigma} = -E_{n,\sigma}$$

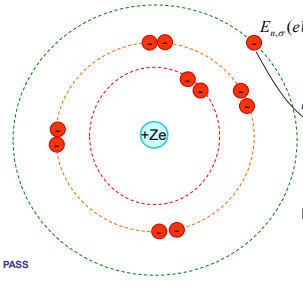
$$E_\infty = 0,\ E_c = 0$$

Pour l'hydrogène dans son état fondamental $E^i_1 = 13{,}6\ eV$

ENERGIE D'IONISATION $E^i_{n,\sigma} = -E_{n,\sigma}$

C'est l'énergie minimale nécessaire pour soustraire un électron atomique à l'influence électrostatique du noyau

$$E_{n,\sigma}(eV) = -13{,}6.\frac{(Z-\sigma)^2}{n^2}$$



$$E_\varphi = E^i_{n,\sigma} + \varepsilon$$

$\vec{v}$

$$E_\infty = 0,\ E_c = \varepsilon$$

Pour l'hydrogène dans son état fondamental $E^i_1 = 13{,}6\ eV$

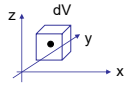
LIMITES DU MODELE DE BOHR

- Le modèle de Bohr est semi-classique
  - est validé expérimentalement sur ${}^{1}_{1}H$ pour $E_n(eV) = -13{,}6/n^2$, mais pas pour $\|\vec{L}\| = n.\hbar$
  - notion de «trajectoire» de l'électron incohérente
- Du fait des inégalités d'Heisenberg :
  - pas de trajectoires
  - seulement des probabilités de présence de l'e$^-$
- Comment déterminer cette probabilité p ? :
  - hypothèse: p liée à une fonction ψ associée à l'e$^-$

FONCTION D'ONDE ET EQUATION DE SCHRODINGER

- Interprétation de Copenhague (M. Born, 1926) :

  La fonction d'onde ψ d'une particule détermine sa probabilité de présence en un lieu dV à l'instant t : $\boxed{p = |\psi(x, y, z, t)|^2 dV}$



- On montre que cette fonction ψ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} + V.\psi = E.\psi}$$

Equation de Schrödinger

E Schrödinger
1887-1961

UNE APPROCHE DE L'EQUATION DE SCHRODINGER

Si on recherche ψ sous la forme d'une OPS $\psi(t,x) = \sin[\omega t - k.x]$ dont les caractéristiques (ω,k) sont liées à celles d'une particule (E,p) par les relations de dualité: E = ħ.ω et p = ħ.k *

$$\psi(t,x) = \sin[\omega t - k.x] = \sin\left[\frac{1}{\hbar}(Et - p.x)\right]$$

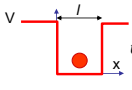
$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi(t,x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{p^2}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} = \psi$$

$$p^2 = (mv)^2 = 2m.\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 2m.(E - V) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m(E-V)}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} = \psi$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} + V.\psi = E.\psi} \quad \Rightarrow \quad \psi \Rightarrow p = |\psi(x,y,z,t)|^2 dV$$

Attention: bien différencier ψ (densité de probabilité) de l'OEM (E,B) associée au photon

Exemple:



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(n.\frac{\pi x}{l}\right) \text{ et } E_n = \frac{h^2}{8ml^2}n^2$$

EQUATION DE SCHRODINGER

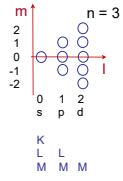
- En 3D, ψ et E dépendent de trois nombres entiers (n,l,m): nb. quantiques
- Pour un électron dans un atome, $V \propto \frac{1}{r}$ et $\psi(n,l,m)$

	nombre quantique…	valeurs	grandeur quantifiée
n	principal	1,2,… (K,L,M,…)	couche,énergie
l	secondaire	0,1,…,n-1 (s,p,d,f)	$\|\vec{L}\| = \|\vec{p} \wedge \vec{r}\| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ sous-couche, énergie (via σ)
m	magnétique	-l,…,0,…,l	$L_z = m.\hbar$
s	spin	$-\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$	$\sigma_z = s.\hbar$

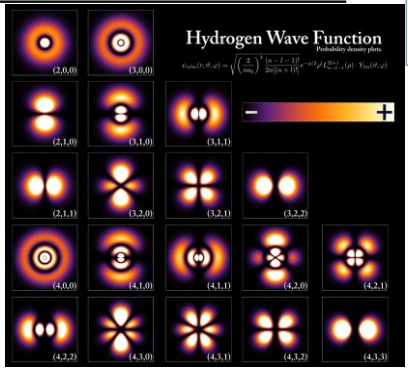
EQUATION DE SCHRODINGER

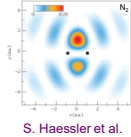
- Principe d'exclusion de Pauli (1925) : un seul électron par quadruplet (n,l,m,s)
- Pour la couche n :
  - $0 \leq l \leq n-1 \Rightarrow$ n sous-couches
  - $-l \leq m \leq l \Rightarrow 2l+1$ cases
  - $S = \pm 1/2 \Rightarrow 2$ électrons par case
  - au plus $2.n^2$ électrons sur la couche n

$\}$ n^2 cases



EQUATION DE SCHRODINGER

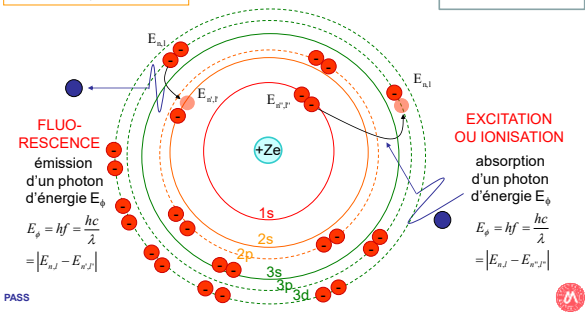




S. Haessler et al. Nature Physics 2010; 6:200-206

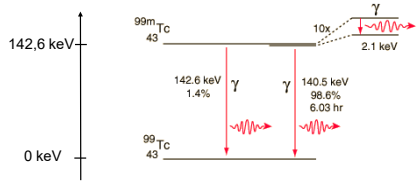
MODELE ATOMIQUE

$$E_{n,l} = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\frac{(Z-\sigma(n,l))^2}{n^2}$$



MODELE NUCLEAIRE

- Nucléons: ± même modèle en couches,
- E[n,l,j(m,s)], j demi-entier pour quantifier les moments orbital et intrinsèque couplés des nucléons
- Un nucléon peut passer d'un niveau excité au niveau fondamental en émettant un photon gamma (γ)



OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 7

- Connaître et savoir manipuler :
  - Le modèle de Bohr-Sommerfeld
    - Remplissage des couches électroniques
  - Les énergies des électrons atomiques (hydrogénoïdes)

$$E_{n,l}(eV) = -13{,}6.\frac{(Z-\sigma(n,l))^2}{n^2}$$

  - Les énergies d'ionisation, d'excitation, de fluorescence :

$$E^{i}_{n,l} = -E_{n,l}$$
$$E^{n,l}_{\uparrow n',l'} = |E_{n,l} - E_{n',l'}|$$
$$hf = E^{\downarrow n,l}_{n',l'} = |E_{n,l} - E_{n',l'}|$$

  - Les niveaux d'énergie des nucléons

A VOTRE AVIS…

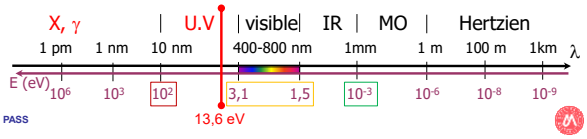
Qu'est-ce-qui peut rendre cancérigène un rayonnement auquel un sujet humain est exposé ?

RAYONNEMENTS IONISANTS

Rayonnement ionisant, définition :

capable d'ioniser l'électron K de l'hydrogène.
Une particule est dite ionisante si son énergie dépasse 13,6 eV

mais, les énergies moyennes d'ionisation sont plus élevées :
Dans l'eau : 32 eV
Dans l'air : 34 eV



RAYONNEMENTS IONISANTS

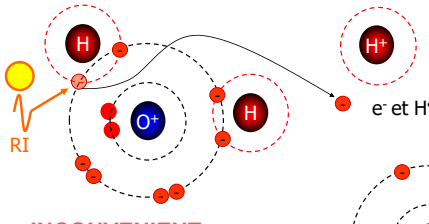
Rayonnement ionisant, définition :

capable d'ioniser l'électron K de l'hydrogène.
Une particule est dite ionisante si son énergie dépasse 13,6 eV

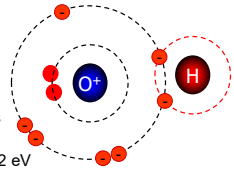
mais, les énergies moyennes d'ionisation sont plus élevées :
Dans l'eau : 32 eV
Dans l'air : 34 eV

Les particules ionisantes d'intérêt en santé sont :
Les neutrons, protons, électrons, alpha d'énergie > 13,6 eV
et leurs antiparticules
Les photons X et γ

RAYONNEMENTS IONISANTS



e⁻ et H• réducteurs

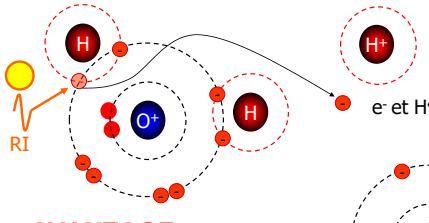


- **INCONVENIENT :**

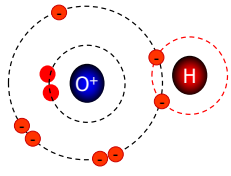
Ils peuvent briser des liaisons covalentes, donc produire des radicaux libres qui sont très réactifs peuvent dénaturer des molécules.
Énergie moyenne d'une ionisation de l'eau : 32 eV

OH• oxydant

RAYONNEMENTS IONISANTS



e⁻ et H• réducteurs

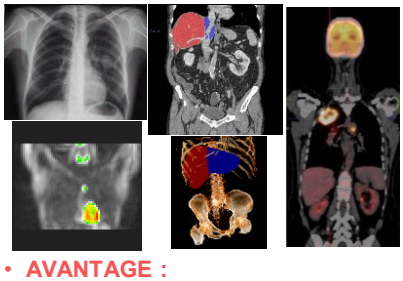


- **AVANTAGE :**

Ils peuvent être utilisés pour irradier des cellules pathologiques (cancers, Hyperthyroïdie…).

OH• oxydant

PHOTONS IONISANTS

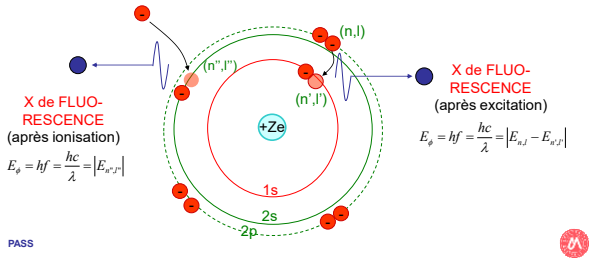


- **AVANTAGE :**

Les photons ionisants peuvent traverser la matière, donc permettre de sonder l'intérieur d'un organisme

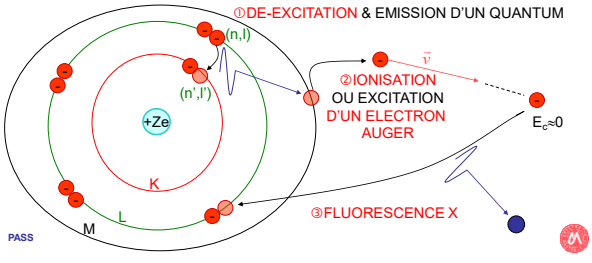
PRODUCTION DE RAYONS X

- Dé-excitation d'électrons atomiques
  - **Fluorescence**, effet Auger, conversion interne
- Freinage d'électrons (bremsstrählung)



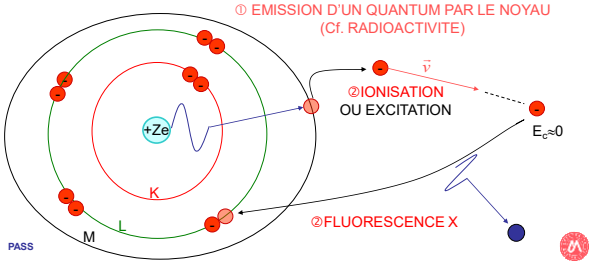
PRODUCTION DE RAYONS X

- Dé-excitation d'électrons atomiques
  - Fluorescence, **effet Auger**, conversion interne
- Freinage d'électrons (bremsstrählung)



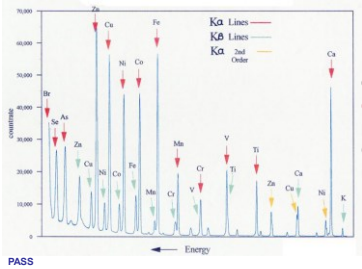
PRODUCTION DE RAYONS X

- Dé-excitation d'électrons atomiques
  - Fluorescence, effet Auger, **conversion interne**
- Freinage d'électrons (Bremsstrahlung)



PRODUCTION DE RAYONS X

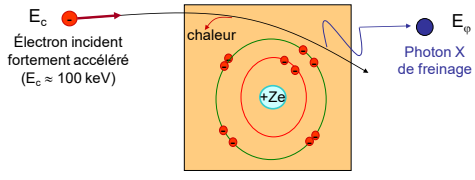
- Dé-excitation d'électrons atomiques
  - Fluorescence, effet Auger, **conversion interne**
- Freinage d'électrons (Bremsstrahlung)



Dans tous les cas donc, on observera un spectre discret de fluorescence permettant d'analyser la composition atomique massique d'un échantillon

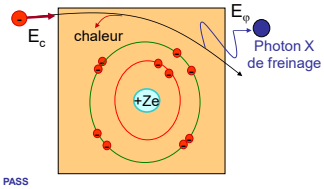
PRODUCTION DE RAYONS X

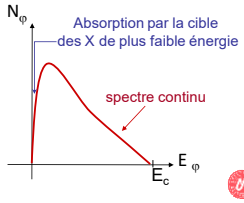
- Dé-excitation d'électrons atomiques
- Freinage d'électrons (bremsstrählung)
  - Particule chargée décélérée par interaction électrostatique avec noyaux de la cible: émission d'un REM
  - Energie rayonnée $\propto a^2 \propto (Ze^2/mr^2)^2$ donc importante pour les e^-
  - La fraction de l'$E_c(e^-)$ rayonnée augmente avec $E_c(e^-)$ et Z^2 (le reste de l' $E_c(e^-)$ perdue l'est sous forme d'excitations et de chaleur)



PRODUCTION DE RAYONS X

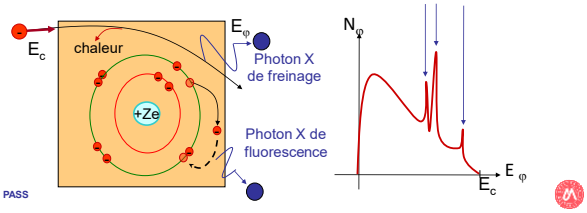
- Dé-excitation d'électrons atomiques
- Freinage d'électrons (bremsstrählung)
  - L'$E_c(e^-)$ peut être intégralement fournie à un unique photon ($E_\varphi=E_c$), ou fournie à plusieurs photons et perdue en partie sous forme de chaleur, d'où un spectre continu de rayonnement ($0<E_\varphi<E_c$)





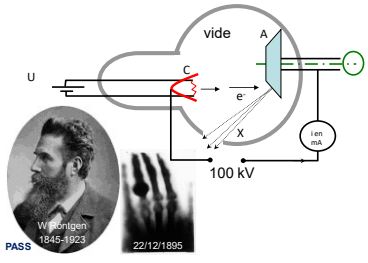
PRODUCTION DE RAYONS X

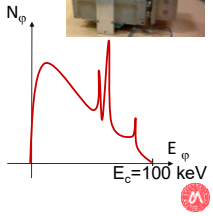
- Dé-excitation d'électrons atomiques
- Freinage d'électrons (bremsstrählung)
  - L'$E_c(e^-)$ peut être intégralement fournie à un unique photon ($E_\varphi=E_c$), ou fournie à plusieurs photons et perdue en partie sous forme de chaleur, d'où un spectre continu de rayonnement ($0<E_\varphi<E_c$)
  - Ionisations au sein de la cible ⇒ photons de fluorescence en sus



PRODUCTION DE RAYONS X

- Dé-excitation d'électrons atomiques
- Freinage d'électrons (bremsstrählung)
  - Applications : Le tube à rayons X des appareils de radiologie et les ostéodensitomètres bi-photoniques (DEXA).





OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 8

Savoir définir et caractériser :
- Un rayonnement ionisant (E> 13,6 eV; λ < 91 nm)
- L'énergie moyenne d'ionisation de l'eau (32 eV)
- La dangerosité des rayonnements ionisants
  ⇒ radicaux libres non spécifiques ⇒ altération de protéines
- L'intérêt des rayonnements ionisants
  Thérapie, photons pénétrants (imagerie médicale)

Connaître, savoir caractériser et manipuler :
- Les modes de production des rayons X
  Transitions électroniques et freinage
- Les spectres associés à ces phénomènes
- Les utilisations associés (tube à rayons X)

DESINTEGRATIONS RADIOACTIVES

- Transformation d'un noyau « père » X en un noyau « fils » Y : ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + \text{particules}$
- Si noyau instable : $Z \neq N=A-Z$ ou $Z \geq 84$
- À condition :
  - D'un bilan énergétique positif : $Ed \geq 0$
  - De la conservation de la charge, de l'impulsion…
- 50 isotopes radioactifs naturels (périodes longues)
- tous les isotopes artificiels sont radioactifs

DESINTEGRATIONS RADIOACTIVES

- Classement par interaction impliquée
  - Interaction forte : radioactivité alpha (α)
  - Interaction faible :
    - » radioactivité bêta (β)
    - » capture électronique
  - Interaction EM :
    - » radioactivité gamma (γ)
    - » conversion interne
    - » création de paires
- Loi de décroissance radioactive

RADIOACTIVITE ALPHA

- Emission d'un noyau d'hélium :

$$\boxed{{}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He}$$

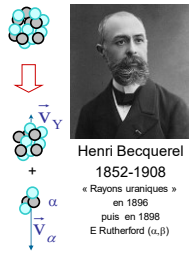
- Energie disponible :

$$E_d = M(X).c^2 - [M(Y) + M(\alpha)]c^2$$
$$E_d = [M(X) - M(Y) - M(\alpha)]c^2$$
$$E_d = [\mathcal{M}(X) - Z.m_{e^-} - \mathcal{M}(Y) + (Z-2).m_{e^-} - \mathcal{M}(\alpha) + 2.m_{e^-}]c^2$$
$$E_d = \mathcal{M}(X).c^2 - [\mathcal{M}(Y) + \mathcal{M}(\alpha)]c^2$$

avec $\mathcal{M}({}^{A}_{Z}X) = M({}^{A}_{Z}X) + Z.m_{e^-}$: masse atomique

et $M({}^{A}_{Z}X)$ masse nucléaire

- $Ed \geq 0 \Rightarrow A > 150$: concerne les isotopes lourds



Henri Becquerel
1852-1908
« Rayons uraniques »
en 1896
puis en 1898
E Rutherford (α,β)

RADIOACTIVITE ALPHA

- Spectre de raie unique (approximation) :

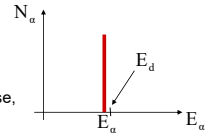
$m_\alpha v_\alpha = m_Y v_Y \Rightarrow (m_\alpha v_\alpha)^2 = (m_Y v_Y)^2 \Rightarrow m_\alpha.\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha{}^2 = m_Y.\frac{1}{2} m_Y v_Y{}^2$

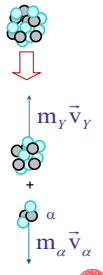
$\Rightarrow E_Y = \frac{m_\alpha}{m_Y} E_\alpha$

$E_d = E_Y + E_\alpha = E_\alpha.\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right)$

donc : $E_\alpha = \frac{m_Y}{m_Y + m_\alpha} E_d$

Énergie des α unique, précise, et de peu inférieure à E_d





- Ordre de grandeur : $E_\alpha \approx$ 4-9 MeV, ionisant
- Applications : radiothérapie superficielle & métabolique
  Radium 223 (métas de prostate)

RADIOACTIVITE PAR INTERACTION FAIBLE

- Transformations isobariques : même A

  Z > N = A - Z $\Rightarrow$ proton $\rightarrow$ neutron
  Z < N = A - Z $\Rightarrow$ neutron $\rightarrow$ proton

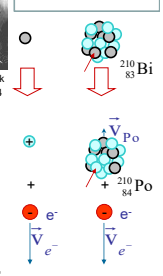
- 3 types de radioactivité isobarique :
  - radioactivité bêta moins
  - radioactivité bêta plus
  - capture électronique

RADIOACTIVITE BETA MOINS

- Chadwick 1914 : émission d'électrons par des noyaux riches en neutrons

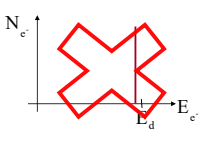
J Chadwick
1891-1974

$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$ soit $^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}$

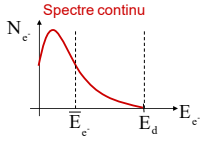


- Energie disponible :

$E_d = M(X).c^2 - [M(Y) + M(e^-)]c^2 = \mathcal{M}(X).c^2 - \mathcal{M}(Y).c^2$

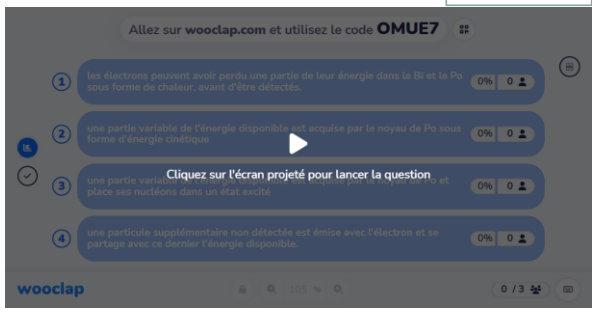


Spectre continu



A VOTRE AVIS…

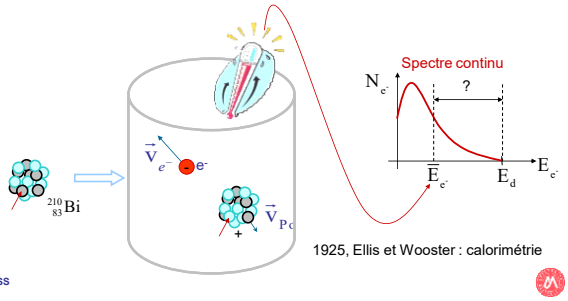
Quelles hypothèses pourraient expliquer que l'électron émis dans une désintégration bêta moins n'emporte pas presque toute l'énergie disponible pour la réaction ?



RADIOACTIVITE BETA MOINS

- Où est perdue l'énergie ?

  Ralentissement variable des e^- (1922, Meitner) ?



1925, Ellis et Wooster : calorimétrie

PASS

RADIOACTIVITE BETA MOINS

Lettre ouverte au groupe de personnes radioactives à la réunion du Gauverein à Tübingen.
Zürich, 4 décembre 1930. Institut de physique de l'ETH Gloriastrasse Zürich.

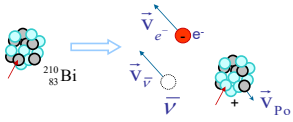
Chères dames et messieurs radioactifs,
Comme le porteur de ces lignes, que je vous demande gracieusement d'écouter, vous l'expliquera plus en détail, à cause des statistiques "erronées" des noyaux N- et Li-6 et du spectre bêta continu, j'ai trouvé un remède désespéré pour sauver le "théorème d'échange" des statistiques et la loi de conservation de l'énergie. Il s'agit de la possibilité qu'il existe dans les noyaux des particules électriquement neutres, que j'appellerai neutrinos, de spin 1/2, qui obéissent au principe d'exclusion et qui diffèrent des quanta de lumière en ce qu'ils ne se déplacent pas à la vitesse de la lumière. La masse des neutrinos devrait être du même ordre de grandeur que celle de l'électron et, en tout état de cause, ne devrait pas être supérieure à 0,01 masse de proton. - Le spectre bêta continu aurait alors un sens si l'on suppose que dans la désintégration bêta, en plus de l'électron, un neutrino est émis de telle sorte que la somme des énergies du neutrino et de l'électron soit constante. Maintenant, il s'agit aussi de savoir quelles forces agissent sur les neutrinos. Pour moi, le modèle le plus probable pour le neutrino semble être, pour des raisons de mécanique ondulatoire (le porteur de ces lignes en sait plus), que le neutrino au repos est un dipôle magnétique avec un certain moment μ. Les expériences semblent exiger que l'effet ionisant d'un tel neutrino ne puisse pas être plus grand que celui d'un rayon gamma, et alors μ n'est probablement pas autorisé à être plus grand que e.(10^{-13} cm).Mais jusqu'à présent, je n'ai pas osé publier quoi que ce soit à propos de cette idée, et je me tourne d'abord vers vous, chers radioactifs, pour vous demander s'il est probable de trouver des preuves expérimentales de l'existence d'un tel neutrino s'il a la même capacité, ou peut-être une capacité dix fois plus grande, de traverser [la matière] qu'un rayon gamma. J'admets que mon remède peut sembler presque improbable car on aurait probablement vu ces neutrinos, s'ils existent, depuis longtemps. Mais qui ne risque rien n'a rien, et la gravité de la situation, due à la structure continue du spectre bêta, est éclairée par une remarque de mon honorable prédécesseur, M. Debye, qui me disait récemment à Bruxelles : "Oh, il vaut mieux ne pas y penser du tout, comme à de nouveaux impôts". Il faut donc discuter sérieusement de chaque moyen de sauvetage. Ainsi, chers radioactifs, examinez et jugez. - Malheureusement, je ne peux pas me présenter personnellement à Tübingen, car je suis indispensable ici à Zurich pour un bal dans la nuit du 6 au 7 décembre. Avec mes meilleures salutations à vous, et aussi à Monsieur Beck, votre humble serviteur.

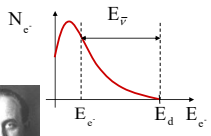
signé W. Pauli

PASS specific reference - "Dear radioactive ladies and gentlemen" - Letter by Wolfgang Pauli - Physics Stack Exchange

RADIOACTIVITE BETA MOINS

- Où est perdue l'énergie ?
  1931, Pauli: émission d'une particule non détectée ?





Spectre continu
(pour l'e⁻ et le $\bar{\nu}$)

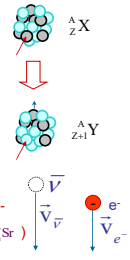
- Anti-neutrino : $\bar{\nu}_e = \bar{\nu}$
  - Interaction/matière ≈0
  - charge nulle, v <≈ c
  - 0,03 < m < 0,23 eV
  - observés en 1956

W. PAULI 1900-1958 E. FERMI 1901-1954

RADIOACTIVITE BETA MOINS

- Emission d'un électron et d'un $\bar{\nu}$:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e^- + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$$
$$^{1}_{0}n \rightarrow {}^{1}_{1}p + {}^{0}_{-1}e^- + {}^{0}_{0}\bar{\nu}$$



- Energie disponible :

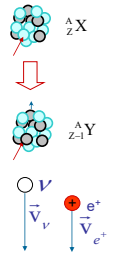
$$E_d = M(X).c^2 - [M(Y) + M(e^-)]c^2$$
$$E_d = \mathcal{M}(X).c^2 - \mathcal{M}(Y).c^2 = E_{e^-} + E_{\bar{\nu}}$$

- Spectre continu pour l'électron, ionisant
- Applications : Radiothérapie métabolique par l'e⁻
  - Traitement antalgique des métastases osseuses ($^{153}_{62}Sm$, $^{89}_{38}Sr$)
  - Hyperthyroïdies ($^{131}_{53}I$)
  - Cancers thyroïdiens ($^{131}_{53}I$), cancers du foie ($^{90}_{39}Y$)

RADIOACTIVITE BETA PLUS

- Emission d'un positon et d'un neutrino par un noyau riche en protons :

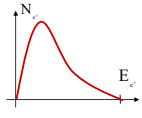
$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e^+ + {}^{0}_{0}\nu$$
$$^{1}_{1}p \rightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{0}_{+1}e^+ + {}^{0}_{0}\nu$$



- Energie disponible :

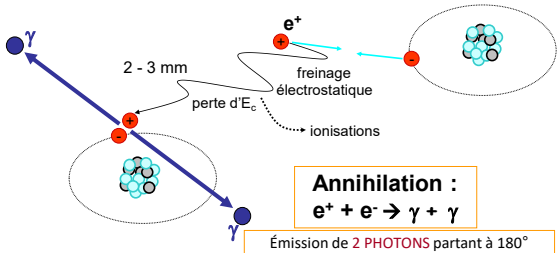
$$E_d = [M(X) - M(Y) - m_e]c^2 = [\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(Y) - 2m_e]c^2$$

- Spectre continu du positon



RADIOACTIVITE BETA PLUS

- Devenir du positon : annihilation entre matière et anti-matière

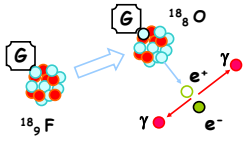


Annihilation :
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

Émission de 2 PHOTONS partant à 180° d'énergie E = 511 keV = $m_e c^2$

RADIOACTIVITE BETA PLUS

- Application :

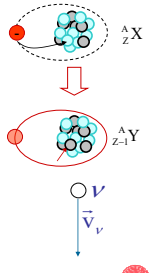


Tomographie par Émission de Positons (TEP)
=
Scintigraphie de coïncidence

CAPTURE ELECTRONIQUE

- Capture d'un électron atomique K par un noyau riche en protons :
  - En compétition avec β^+

$$^{A}_{Z}X + ^{0}_{-1}e^-_K \rightarrow ^{A}_{Z-1}Y + ^{0}_{0}\nu$$
$$^{1}_{1}p + ^{0}_{-1}e^-_K \rightarrow ^{1}_{0}n + ^{0}_{0}\nu$$

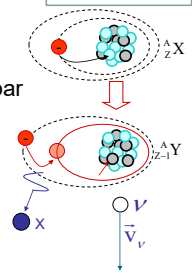


- Energie disponible :

$$E_d = [M(X) + m_e - M(Y)]c^2 - E^i_K$$
$$E_d = [\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(Y)]c^2 - E^i_K$$

CAPTURE ELECTRONIQUE

- Il s'ensuit l'émission de photons X de fluorescence caractéristiques de l'atome fils Y
- Application : dosage de protéines par Radio-Immuno-Array (RIA) via un comptage X
  - Application : comptage à 35 keV pour de l'^{125}I fixée sur la molécule à doser.



RADIOACTIVITE PAR INTERACTION EM

Il en existe 3 modes :

- Radioactivité gamma (γ)
- Conversion interne
- Création de paires

RADIOACTIVITE GAMMA (Villard 1900)

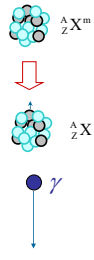
- Emission d'un photon :

$$^{A}_{Z}X^{m} \rightarrow {}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{0}\gamma$$

- Energie disponible :

$$E_d \approx E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \left[M\left({}^{A}_{Z}X^{m}\right) - M\left({}^{A}_{Z}X\right)\right]c^2$$

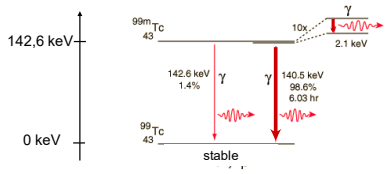
- Spectre de raies



RADIOACTIVITE GAMMA

- Applications : le technétium 99m

$$^{99}_{43}Tc^{m} \xrightarrow{\gamma} {}^{99}_{43}Tc + {}^{0}_{0}\gamma$$

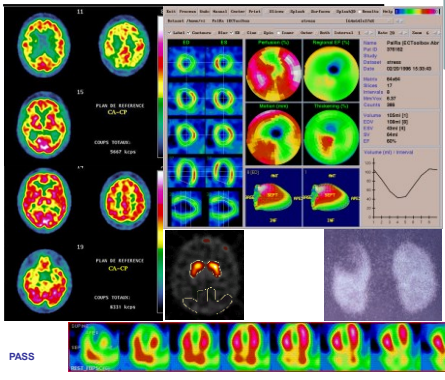


Scintigraphie d'émission mono-photonique :

Single
Photon
Emission
Computed
Tomography

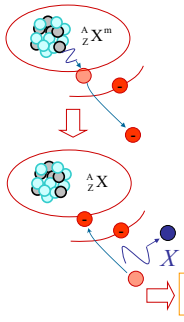
- D'autres isotopes sont utilisés ($^{123\text{ ou }131}_{53}I$, $^{81}_{36}Kr$, $^{111}_{49}In$, $^{201}_{81}Tl$ …)

RADIOACTIVITE GAMMA (SPECT)



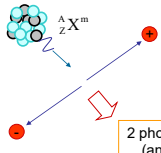
AUTRES RADIOACTIVITES PAR INTERACTION EM

- Conversion interne



spectre de raies de fluorescence X

Création de paires
Si E_d > 1,02 MeV



2 photons γ de 511 keV (annihilation du e^+)
+
fluorescence X du fait des ionisations de l'e^- et du e^+

OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 9

Pour chaque réaction radioactive :

Savoir définir et caractériser

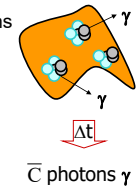
- La transformation nucléaire (équation de réaction)
- Le type (α,β,γ) et le mode (β^+, β^-, CE, CI, CP)
- Les conditions nécessaires à une désintégration
- Le spectre
- Les applications dans les domaines de la santé

Savoir calculer et exploiter :

- Le bilan énergétique d'une réaction (E_d)
- L'allure du spectre

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

- **N** = Nombre de noyaux radioactifs
  λ = proba. qu'un isotope se désintègre/sec
  λ=(-dN/N)/dt, soit en moyenne $\overline{C} = -\Delta N = \lambda.N.\Delta t$
- **P($C_{\Delta t}$=n)** : probabilité de mesurer $n \neq \overline{C}$ photons issus de désintégrations dans un intervalle de temps Δt
- Le phénomène de désintégration est aléatoire
  - sans mémoire : désintégrations indépendantes
  - stationnaire : proba(désintégration entre t et t+Δt) ne dépend que de Δt, et pas de t.
  - rare λ<<1

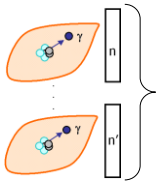


LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

- Processus sans mémoire, stationnaire, rare

⇕

Processus **POISSONNIEN** (1711,1837)

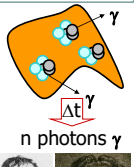


$$\overline{C} = \lambda.N.\Delta t$$

comptage moyen sur un grand nombre d'expériences identiques

$$P(C_{\Delta t} = n) = e^{-\overline{C}} \frac{(\overline{C})^n}{n!}$$

$$P(C_{\Delta t} = n) = e^{-\lambda N \Delta t} \frac{(\lambda N \Delta t)^n}{n!}$$



S.D. POISSON
1781-1840

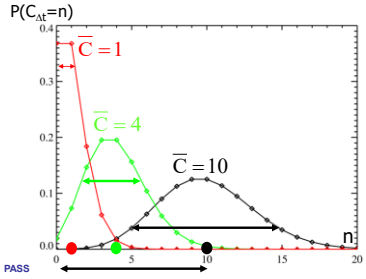
A de Moivre
1667-1754

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

- Processus sans mémoire, stationnaire, rare

⇕

Processus **POISSONNIEN**



Propriété essentielle d'une statistique de Poisson :

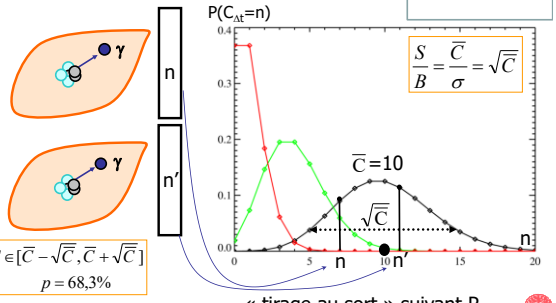
$$\overline{C} = \lambda N \Delta t = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \frac{S}{B} = \frac{\overline{C}}{\sigma} = \frac{\overline{C}}{\sqrt{\overline{C}}}$$

$$\boxed{\frac{S}{B} = \sqrt{\overline{C}}}$$

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

Processus aléatoire suivant une loi de Poisson : $\boxed{\sigma^2 = \overline{C}}$



$$C \in [\overline{C} - \sqrt{\overline{C}}, \overline{C} + \sqrt{\overline{C}}]$$
$$p = 68{,}3\%$$

« tirage au sort » suivant P

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

12 cm/min 60 cm/min

Le taux de comptage est 5 fois plus élevé sur l'image de gauche, donc le rapport S/B est plus de 2 fois meilleur (√5=2,24)

$$\boxed{\frac{S}{B} = \sqrt{\overline{C}} \text{ est multiplié par } 2{,}24}$$

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

- N_0 = nombre initial de noyaux radioactifs
- N(t) = nombre de noyaux non encore désintégrés à t
  λ = probabilité qu'un isotope se désintègre/sec

$$\frac{dN(t)}{N(t)} \stackrel{\text{def}}{=} -\lambda.dt$$

Si $dt \to 0$, $\quad N'(t) = \frac{N(t+dt) - N(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dN(t)}{dt}$

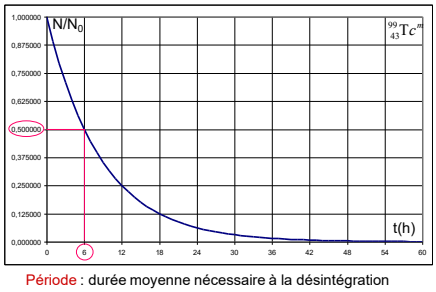
$\Rightarrow dN(t) = N'(t).dt \Rightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} = \frac{N'(t)}{N(t)}dt = [\ln N(t)]'.dt \stackrel{\text{def}}{=} -\lambda.dt$

donc $[\ln N(t)]' = -\lambda$
en intégrant : $\ln N(t) = -\lambda.t + K$
et donc $N(t) = e^{-\lambda.t+K} = e^K.e^{-\lambda.t}$

$N_0 \stackrel{\text{def}}{=} N(t=0)$:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda.t}$$

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE



Période : durée moyenne nécessaire à la désintégration de la moitié des noyaux d'un échantillon

$$N(T) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda.T} \Rightarrow \ln 2 = \lambda.T \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

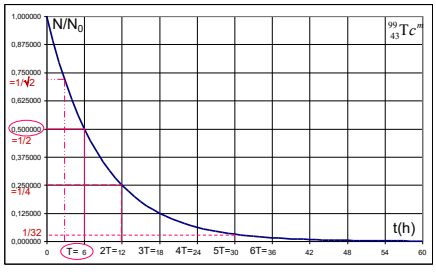
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda.t}$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,69}{\lambda}$$

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}.t}$$

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE



Dix périodes sont nécessaires pour diminuer le nombre de noyaux radioactifs d'un facteur supérieur à 1000 (2^{10}=1024)

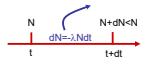
$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,69}{\lambda}$$

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

LOI DE DECROISSANCE RADIOACTIVE

Vie moyenne τ d'un isotope avant désintégration:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_{t=0}^{\infty} t.dN = \frac{1}{N_0}\int_{t=0}^{\infty} t.\lambda N dt = \frac{1}{N_0}\int_{t=0}^{\infty} t.\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$



$$\tau = \lambda \int_{t=0}^{\infty} t.e^{-\lambda t} dt$$

Par parties* :

$$\int_{t=0}^{\infty} \overset{u}{t}\,\overset{dv}{e^{-\lambda t}dt} = \left[-\overset{u}{t}\,\overset{v}{\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \overset{v}{\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)}\,\overset{du}{dt} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Donc : $\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} \approx 1{,}4.T}$

Pour le : ${}^{99}_{43}Tc^{m}$: $\tau \approx 8{,}7$ h

PASS

* $[uv] = \int d(u.v) = \int v.du + u.dv \Rightarrow \int u.dv = [uv] - \int v.du$

ACTIVITE

- Activité $\overset{DEF}{=}$ nombre de désintégrations par seconde au sein d'un échantillon
- Unité SI: Becquerel (Bq) : 1 Bq = désintégration/sec.
- Autre unité: curie (Ci) : 1 mCi = 37 MBq

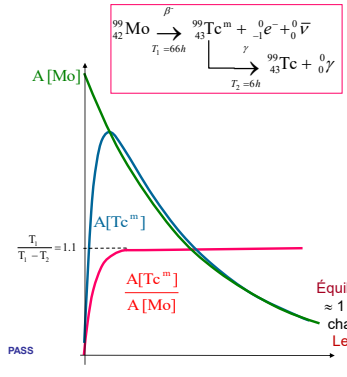
$$A(t) = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}N_0 e^{-\lambda t}\right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

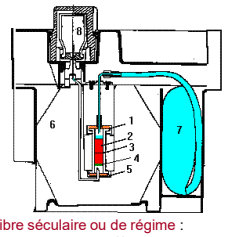
- donc l'activité est proportionnelle à N(t), nombre de noyaux non encore désintégrés :

$$\boxed{A(t) = \lambda.N(t)}$$

PASS

FILIATIONS RADIOACTIVES





Équilibre séculaire ou de régime :
≈ 1 désintégration de ${}^{99}Mo$ pour chaque désintégration de Tc^{m}.
Le Mo « impose » sa période

PASS

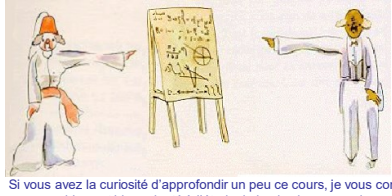
OBJECTIFS DU POINT D'ÉTAPE 10

Savoir :

- Définir une statistique de Poisson
  Aléatoire, sans mémoire, stationnaire, rare
- L'associer aux désintégration radioactives
- Caractériser sa variance = moyenne
- Caractériser un équilibre séculaire

Savoir manipuler et utiliser :

- Les taux de comptages en scintigraphie (S/B = √N)
- La loi de décroissance : $N(t) = N_0 e^{-\lambda.t} = N_0.2^{-t/T}$
- Les définitions de λ, T, τ.
- L'activité en Bq : $A(t) = \lambda.N(t)$



Si vous avez la curiosité d'approfondir un peu ce cours, je vous conseille un ouvrage remarquablement bien adapté à l'étude de la physique pour des professionnels de santé :
Physique pour les sciences de la vie (tome 1: la physique et ses méthodes; tome 2: la matière; tome 3: les ondes)
A. Bouyssy, M. Davier, B. Gatty. DIA Université. Belin, 1988.

https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/serie-douze-cles-pour-la-physique

Je vous remercie pour votre attention

et vous souhaite tout le succès que vous mériterez pour la suite de l'année

 Ce cours est disponible toute l'année sur http:\\scinti.edu.umontpellier.fr/enseignements/cours/

COMPLEMENTS ET EXERCICES

ANNEXE 1 et 2 - Rappels d'enseignements de lycée : forces, travail, champs, énergie et fonction sinus.

ANNEXE 3 – Exercice élémentaire de manipulation des équations de Maxwell pour caractériser le champ électromagnétique.

ANNEXE 4 – Exemple de chemin optique maximal.

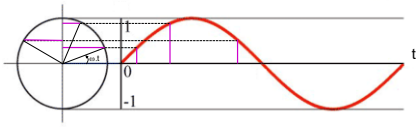
ANNEXE 5 – Calcul (hors programme) d'une onde diffractée.

ANNEXE 6 – Exercice utile de manipulation de l'équation du dioptre sphérique permettant d'étendre cette dernière à une lentille mince.

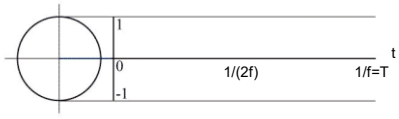
ANNEXE 1

RAPPEL: FONCTION SINUS $f(t) = sin(\omega.t)$

Rappels



$$f(t) = sin(\omega.t) = sin(2\pi.f.t) = sin\left(2\pi.\frac{t}{T}\right)$$



avec par définition :

$$\omega = 2\pi.f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω (rad.s^{-1}) = pulsation propre = 2.π.f = 2.π /T
f (Hertz = Hz = s^{-1}) : fréquence
T (s) : période (temporelle)

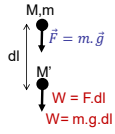
PASS

ANNEXE 2

RAPPELS DE PHYSIQUE: FORCE & TRAVAIL

Rappels

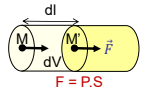
- Une force $\vec{F}$ est ce qui fait varier la quantité de mouvement d'un mobile dans le temps: $\vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{p}}{dt}$.
  Si v<<c et m constant: $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$



- Le travail W est l'énergie échangée lorsque le point d'application d'une force se déplace :

$$dW \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = F.dL.\cos\left(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{dl}}\right)$$

$$W_{L=M\to M'} = \int_M^{M'} \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



F = P.S
dW = F.dl = P.S.dl
dW= P.dV

PASS

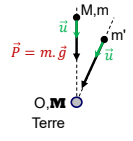
ANNEXE 2

RAPPELS DE PHYSIQUE: FORCE CENTRALE

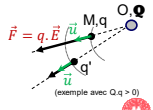
Rappels

- Certaines forces se décomposent en $\vec{F} := s.\vec{C}$
  où $s \in \mathbb{R}$ caractérise l'objet qui subit la force (s = m ou q, masse ou charge d'une particule), et $\overrightarrow{C(x,y,z)}$ est un champ vectoriel
  ($\vec{C} = \vec{g}$ ou $\vec{E}$ pour la gravitation ou l'électrostatique).

Pesanteur:



- Une force est centrale si il existe un point fixe O tel qu'à tout instant, la force observée en tout point M est portée par la direction (MO)



PASS

ANNEXE 2

RAPPELS DE PHYSIQUE: GRAVITE ET ELECTROSTATIQUE

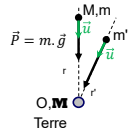
Rappels

- Les forces de gravité et électrostatique sont des cas particuliers de forces centrales crées par un champ vectoriel où :

$\vec{C} = K.\frac{\vec{u}}{r^2}$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ et $\vec{r} = \pm\overrightarrow{M0}$

$\vec{F} = s.K.\frac{\vec{u}}{r^2}$

Pesanteur:

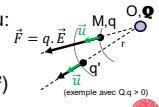


s = masse ou charge électrique du mobile M.

K > 0 dépend de la source du champ et du milieu:

Gravitation: K= $\mathcal{G}.\mathbf{M}$ ($\mathcal{G}$ = 6,67.10^{-11} Nm²/kg²)

Electrostatique: K=$\frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_r}.\mathbf{Q}$ ($\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$= 9.10^9 Nm²/C²)



PASS

ANNEXE 2

RAPPELS DE PHYSIQUE: Potentiel, Energie potentielle d'un champ central en 1/r²

Rappels

- Gravitation/Electrostatique: $\vec{F} := s.K.\frac{\vec{u}}{r^2}$:

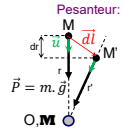
$W_{M\to M'} = \int_M^{M'} \vec{F}.\vec{dl} = K.s.\int_M^{M'} \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{r^2} = K.s.\int_M^{M'} \frac{dr}{r^2} =$

$K.s.\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{r'} = K.s.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = E_P(M) - E_P(M')$

W indépendant du chemin suivi entre M et M'.

Force conservative (pour l'énergie: E_c+E_p=cste)

Pesanteur:



Force électrostatique ou de gravitation :

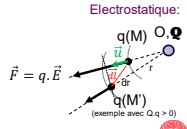
Force centrale: $\vec{F} := s.\vec{C}$ *avec* $\vec{C} := K.\frac{\vec{u}}{r^2}$

$E_P = s\frac{K}{r} := s.V$ *avec* $V := \frac{K}{r}$

Electrostatique: s = q K = $\frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_r}.\mathbf{Q}$

Gravitation: s = m K= $\mathcal{G}.\mathbf{M}$

Electrostatique:



PASS

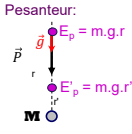
ANNEXE 2

RAPPELS DE PHYSIQUE: SYNTHESE

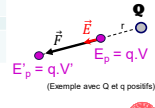
Rappels

	PESANTEUR	ELECTROSTATIQUE
Source	Masse de la terre **M**	Charge **Q**
s	Masse de la particule m	Charge de la particule q
$\vec{C} = K.\frac{\vec{u}}{r^2}$	$\vec{g} = (\mathcal{G}.M).\frac{\vec{u}}{r^2}$	$\vec{E} = \left(\frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_r}.Q\right).\frac{\vec{u}}{r^2}$
V = K/r	$\mathcal{G}.M.\frac{1}{r} = g.r$	$\frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_r}.Q.\frac{1}{r} = E.r$
E_P = s.V	$m.\mathcal{G}.M.\frac{1}{r} = m.g.r = m.V$	$q.\frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_r}.Q.\frac{1}{r} = q.E.r = q.V$
$\vec{F} = s.\vec{C}$	$\vec{P} = m.\vec{g} = \mathcal{G}.M.m.\frac{\vec{u}}{r^2}$	$\vec{F} = q.\vec{E} = \frac{\mathcal{F}}{\varepsilon_r}.Q.q.\frac{\vec{u}}{r^2}$
Constantes	$\mathcal{G}$ = 6,67.10^{-11} Nm²/kg²	$\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$= 9.10^9 Nm²/C²

Pesanteur:



Electrostatique:



Remarque : $-\frac{d}{dr}(E_p) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{K.s}{r}\right) = -K.s.\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{K.s}{r^2} = F$

Une force centrale en 1/r² « dérive de l'énergie potentielle »

PASS

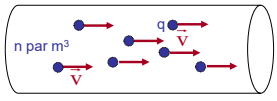
ANNEXE 3

DENSITES DE CHARGES ET DE COURANTS

Exercice

Soient n particules par unité de volume, de charge q et de vitesse v. On définit :

- la densité de charge $\rho = n.q$ en $C.m^{-3}$
- la densité de courant $j = n.q.v = \rho.v$ en $A.m^{-2}$



Le principe de conservation de la charge donne un lien entre ces deux densités :

$$\vec{j} = j.\vec{e}_x \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

PASS

ANNEXE 3

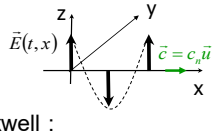
LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

Exercice

APPLICATION :

- Soit une onde électrique

$$\vec{E}(t,x) = (0,0,E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_n}\right)\right])$$



- 1° relation de couplage de Maxwell :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B_x = B_z = 0 \text{ et } \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}}$$

seul B_y est non nul

PASS

ANNEXE 3

LES EQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

Exercice

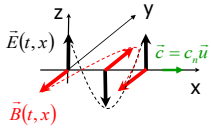
$$\vec{E}(t,x) = (0,0,E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_n}\right)\right])$$

Maxwell $\Rightarrow$ $B_x = B_z = 0$ et

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c_n}\omega.E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{1}{c_n}E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_n}\right)\right]$$

$$\vec{B}(t,x) = (0,-B_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_n}\right)\right],0) \qquad \text{avec } B_0 = \frac{1}{c_n}E_0$$



Généralisation : $\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c_n}\vec{u} \wedge \vec{E}}$

PASS

ANNEXE 3

CELERITE DE LA LUMIERE

Exercice

Dans notre cas particulier $\begin{cases} \vec{E}(t,x) = (0,0,E_0 \sin[\omega(t-\frac{x}{c_n})]) \\ \vec{B}(t,x) = (0,-\frac{E_0}{c_n}\sin[\omega(t-\frac{x}{c_n})],0) \end{cases}$

4° équation de Maxwell (en l'absence de courant):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon\mu \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{E_0}{c_n}\sin[\omega(t-\frac{x}{c_n}]\right) = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(E_0 \sin[\omega(t-\frac{x}{c_n})]\right) \Rightarrow \left(\frac{\omega}{c_n}\right)\left(\frac{E_0}{c_n}\right) = \varepsilon\mu.\omega.E_0$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}$$

PASS

ANNEXE 4

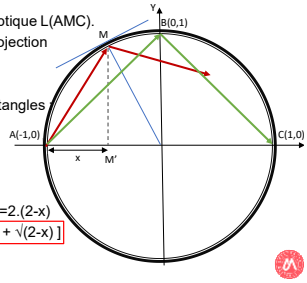
UN EXEMPLE DE CHEMIN OPTIQUE MAXIMAL

Exercice

On place dans le vide (n=1) un miroir sphérique de rayon 1 centré à l'origine d'un repère (O,X,Y,Z). Un rayon issu de A se réfléchi en B sous un angle d'incidence et de réflexion de 45° et atteint le point C. Le chemin optique effectivement suivi entre A et C vaut L(ABC)=2.√2.

Calculons la longueur d'un autre chemin optique L(AMC).

Notons x∈ [0,2] la distance entre A et la projection M' de M sur le diamètre [A,C].



Les triangles AMM',M'MC et AMC sont rectangles

AM²=MM'²+x²

MC²=MM'²+M'C²=MM'²+(2-x)²

AM²+MC²=AC²=4

Donc 2 MM'²+x²+(2-x)²=4 ⇒ MM'²=x.(2-x)

et AM² = MM'²+x²=2.x et MC²=MM'²+(2-x)²=2.(2-x)

Soit L(AMC) = √(2,x) + √[2.(2-x)] = √(2).[√x + √(2-x)]

PASS

ANNEXE 4

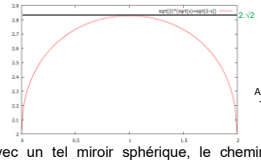
UN EXEMPLE DE CHEMIN OPTIQUE MAXIMAL

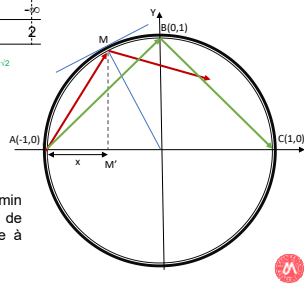
Exercice

Etudions la fonction L(x) = √(2).[√x + √(2-x)] pour x∈ [0,2].

Sa dérivée est L'(x) = √(2).[1/(2.√x) -1/(2.√(2-x))] :

x	0		1		2
L'(x)	+∞	+	0	-	-∞
L(x)	2	↗	2.√2	↘	2





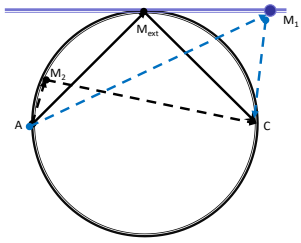
Avec un tel miroir sphérique, le chemin optique effectivement suivi est donc de longueur L(ABC) maximale, supérieure à tout autre chemin L(AMC).

PASS

ANNEXE 4

UN EXEMPLE DE CHEMIN OPTIQUE MAXIMAL ET MINIMAL

Exercice



Pour (A,C) un diamètre, pour tout point M_2 du miroir sphérique $L(AM_2C) < L(AM_{ext}C)$
Pour tout point M_1 du miroir plan $L(AM_1C) > L(AM_{ext}C)$

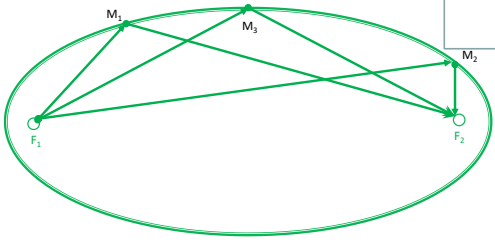
L'unique chemin optique suivi entre A et C est un maximum dans le cas du miroir sphérique et un minimum pour le miroir plan, dans tous les cas un extremun où $\delta L=0$

PASS

ANNEXE 4

UN EXEMPLE DE CHEMIN OPTIQUE CONSTANT ENTRE LES 2 FOYERS D'UNE ELLIPSE

Exercice



Pour tous points M_1 et M_2 d'une ellipse de foyers F_1et F_2,
$L(F_1M_1F_2) = L(F_1M_2F_2)$.
Le chemin optique suivi entre ces deux foyers et tout point du miroir elliptique est constant ($\delta L=0$): Tous les points de réflexion sur l'ellipse sont possibles, et tous les rayons lumineux associés.

PASS

ANNEXE 5

CALCUL DE L'ONDE DIFFRACTEE

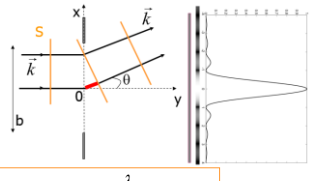
Hors programme

$$\vec{E} = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\vec{A}_0}{b} \sin(\omega t - \Theta x) dx = \frac{\vec{A}_0}{b} \frac{1}{\Theta} \left[\cos(\omega t - \Theta x)\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{A}_0}{b} \frac{1}{\Theta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{\Theta b}{2}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\Theta b}{2}\right)\right] \quad \text{or} \quad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{A}_0}{b}\frac{2}{\Theta}\sin\left(-\frac{\Theta b}{2}\right)\sin(\omega t) = \vec{A}_0 \sin(\omega t)\frac{\sin(\Theta b/2)}{\Theta b/2} \quad \text{avec} \quad \Theta = \frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \underbrace{\boxed{\vec{A}_0 . \sin c\left(\frac{\pi b . \sin\theta}{\lambda}\right)}}_{\vec{A}} \sin(\omega t)$$



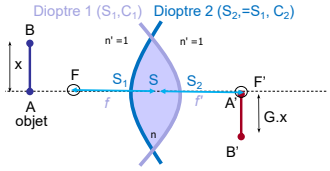
$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_0 . \text{sinc}\left(\frac{\pi\, b \sin\theta}{\lambda}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \sin\theta_{min} = N\frac{\lambda}{b}, \quad \text{N entier}}$$

PASS

ANNEXE 6

FORMULE DE CONJUGAISON ET GRANDISSEMENT D'UNE LENTILLE MINCE (S_1=S_2=S)

Exercice



Le grandissement est défini par:

$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA}$$

$$\Pi_1 = \frac{n-1}{SC_1} = \frac{n}{SA''} - \frac{1}{SA} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1-n}{SC_2} = \frac{1}{SA'} - \frac{n}{SA''}$$

en notant A'' l'image de A par le 1° dioptre

$$\boxed{\Pi = (n-1).(\frac{1}{SC_1} - \frac{1}{SC_2}) = \frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}}$$

est donc la formule de conjugaison d'une lentille mince avec

$$f' = SF' = -f = -SF$$

donc: $\frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{SA}{SA'} = \frac{1}{G} = \frac{SA}{f'} + 1 = \frac{SA + SF'}{f'} = \frac{SA - SF}{f'} = \frac{FA}{f'}$

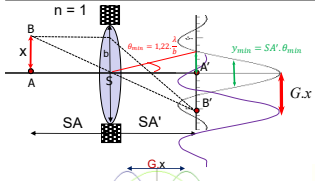
soit: $\boxed{G = \frac{1}{FA}.f'}$

PASS

ANNEXE 7

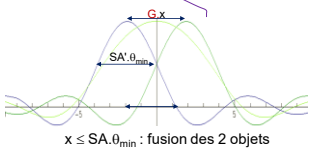
DIFFRACTION ET RESOLUTION VIA UNE LENTILLE MINCE de GRANDISSEMENT G

Exercice

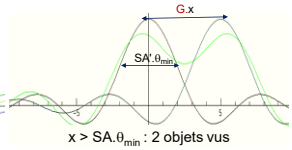


$$G = \frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA}$$

$$G.x = x.\frac{SA'}{SA} < 1{,}22\frac{\lambda}{b}.SA' \Rightarrow x < 1{,}22\frac{\lambda}{b}.SA$$



$x \leq SA.\theta_{min}$: fusion des 2 objets



$x > SA.\theta_{min}$: 2 objets vus

L'optique sépare les images de 2 objets distants de x si x > (SA).1,22. λ/d

PASS

Cela ne dépend ni de f ni de SA': seules interviennent le rayonnement (via λ) et le diamètre de la lentille (et de la distance de l'objet A, qui ne dépend pas de l'optique)

QCM TYPES

PASS

EXERCICE : TF et aspects fréquentiels

EXERCICE D'APPLICATION

Connaissance
Réflexion
Les deux

☒ A. Le point (0,0) est centre de symétrie du graphe du signal 1 (signal impair) .

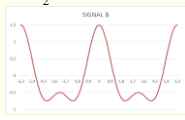
$$s1(t) = \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2.t) + \sin(10.t)$$

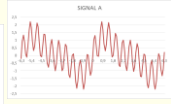
☒ B. L'axe des ordonnées est axe de symétrie du graphe du signal 2 (signal pair).

$$s2(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\sin(2.t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2.t)$$

☒ C. Le signal A peut correspondre au spectre 1.

☐ D. Le signal 2 est le signal 1 avancé de 1,57 secondes.





PASS

EXERCICE : Equation de D'Alembert

EQUATION DE D'ALEMBERT

Montrez que la connaissance de la fonction g(t,x) caractéristique d'une onde progressive périodique quelconque permet d'en déduire la célérité de cette onde.

Connaissance
Réflexion
Les deux

Il suffit de le démontrer sur l'une des composantes harmoniques de l'OP qui s'écrit en toute généralité : $g(t,x) = A\sin\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right]$

On calcule la dérivée partielle $\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}$ d'une fonction g(t,x) suivant la variable x est la dérivée de g par rapport à x calculée en supposant constante l'autre variable t.

La dérivée partielle seconde est notée : $\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2}$

$$g(t,x) = A\sin[\omega(t \pm \frac{x}{c})] \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \pm\left(\frac{\omega}{c}\right).A\cos[\omega(t \pm \frac{x}{c})] \text{ et } \frac{\partial g}{\partial t} = \omega.A\cos[\omega(t \pm \frac{x}{c})]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2.g(t,x) \\ \frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial t^2} = -\omega^2.g(t,x) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 g(t,x)}{\partial t^2}}$$

Equation de d'Alembert caractéristique d'une onde progressive, permet de calculer c à partir d'une modélisation de l'onde

PASS

EXERCICE: OEM

CONCOURS PACES 2011

Dans un milieu de propagation homogène, on considère une onde électromagnétique plane caractérisée par le champ électrique $(E_x,E_y,E_z) = (0, 0, 100.\sin[628.(t-0,5.10^{-8}.y)])$ dans le repère orthonormé direct (O,x,y,z).

Connaissance
Réflexion
Les deux

☒ A. Le champ électromagnétique se déplace le long de la direction y.

$$E_z(t,y) = E_0\sin[\omega.(t - \frac{y}{c_n})]$$

☒ B. Le champ électromagnétique est une radiation de fréquence 100 Hz.

$$\omega = 628 = 2\pi f \Rightarrow f = 100\text{ Hz}$$

☐ C. Le champ électrique est polarisé rectilignement suivant la direction y.

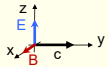
Non, suivant z

☒ D. Les composantes en y et z du champ magnétique sont nulles à tout instant.

$$\vec{B} = (1/c_n).\vec{u} \wedge \vec{E} \Rightarrow B_x(t,y) = B_0\sin[\omega.(t - \frac{y}{c_n})]$$

☒ E. L'indice de réfraction du milieu de propagation est 1,5.

$$\frac{\omega}{c_n} = \frac{2\pi f}{c_n} = 628.0,5.10^{-8} = \frac{628}{2.10^8} = \frac{2\pi.100}{2.10^8} \Rightarrow n = \frac{c}{c_n} = \frac{3.10^8}{2.10^8} = 1,5$$

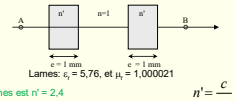


PASS

EXERCICE: Chemin optique

CONCOURS PACES 2013

Comprendre que L est un « équivalent de distance dans le vide », au sens où : $L = n.(AB) = \frac{c}{c_n}.(AB) \Rightarrow t = \frac{(AB)}{c_n} = \frac{L}{c}$



Lames: ε_r = 5,76, et μ_r = 1,000021

Connaissance
Réflexion
Les deux

☒ A. L'indice de réfraction des lames est n' = 2,4 — $n' = \frac{c}{c_{n'}} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{5{,}76.1{,}000021} = 2{,}40$

☐ B. La célérité du rayonnement laser dans les lames est de 2.10^8 m/s — $c_{n'} = \frac{c}{n'} = \frac{3.10^8}{2.4} = 1{,}25.10^8$ m/s

☐ C. La variation de chemin optique induite par l'introduction des deux lames est de 4,8 mm — $\Delta L = 2.(n'-1).e = 2{,}8$ mm

☒ D. Après introduction des deux lames, la lumière arrive en B avec 9.10^{-12} s de retard — $\frac{2{,}8.10^{-3}}{c} = 9{,}3.10^{-12}$ s

☒ E. La variation de phase induite par l'introduction des deux lames est inversement proportionnelle à λ. — $\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$

PASS

EXERCICE: Lentille

CONCOURS PACES 2016-2017

Une lentille de verre (n=1,8) est constituée d'un dioptre divergent de R_1= 80 cm et d'un dioptre plan. On considère que les sommets des 2 dioptres sont confondus (lentille mince).

Connaissance
Réflexion
Les deux

1- Donnez la formule de conjugaison de cette lentille

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n-1}{SC_1} = \frac{n}{SA''} - \frac{1}{SA} \\ \frac{1-n}{SC_2} = 0 = \frac{1}{SA'} - \frac{n}{SA''} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{n-1}{SC_1} = \frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA}$$

2- Calculez la puissance de cette lentille

$$\Pi = \frac{n-1}{SC_1} = -\frac{0.8}{80.10^{-2}} = -1\,\text{Dp} \qquad (SC_1 = -R_1)$$

3- Calculez la focale image de cette lentille

$$\Pi = -1 = \frac{1}{SF'} \Rightarrow SF' = -1\,\text{m}$$

4- Calculez le grandissement d'un objet placé à 1 m en amont de cette lentille

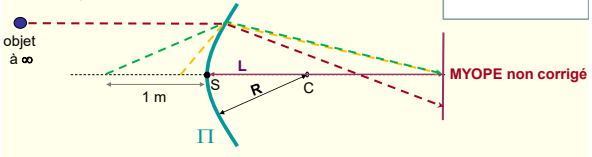
$$\frac{1}{G} = \left|\frac{SA}{SA'}\right| = |\Pi.SA + 1| = |(-1).(-1) + 1| = 2$$

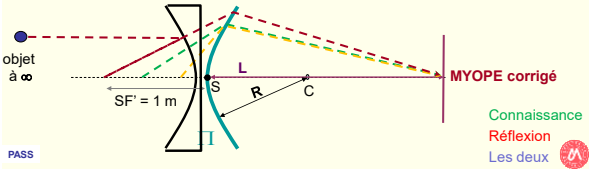
PASS

EXERCICE: Amétropies

AMETROPIES SPHERIQUES

Quelle correction proposer à un patient myope qui voit flou tout objet situé au-delà d'un mètre de son œil ?



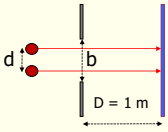


Connaissance
Réflexion
Les deux

PASS

EXERCICE: Diffraction & résolution

EXERCICE D'APPLICATION



Ecran éloigné où se forment les images de 2 sources identiques de λ = 500 nm après traversée d'une fente carrée de largeur b = 0,5 mm.

Connaissance
Réflexion
Les deux

☒ A. La distance entre le premier minimum et le maximum principal est de l'ordre de 1 mm.

$$\sin\theta_{min} = \frac{\lambda}{b} \approx tg\,\theta_{min} = \frac{x_{min}}{D} = x_{min} = \frac{500.10^{-9}}{0,5.10^{-3}} = 1\ mm$$

☒ B. La largeur à mi-hauteur de la tache de diffraction (maximum principal) est de l'ordre de 1 mm.

$$LMH \approx x_{min} = 1\ mm$$

☒ C. Si D = 3 m, la distance entre le 2 maxima est de l'ordre de 3 mm.

$$x = D.\frac{\lambda}{b} = D.1\ mm = 3\ mm$$

☒ D. Si D = 1 m, Les 2 images seront indiscernables si d < 1 mm.

Fusion des 2 pics d'intensité (intersection à plus de 50% de l'intensité maximale)…

☒ E. Si D = 3 m, Les 2 images seront indiscernables si d < 1 mm.

Indépendante du grandissement

PASS

EXERCICE: Niveaux d'énergie des électrons atomiques

EXERCICE D'APPLICATION

Les énergies d'ionisation de la raie K, d'une raie L et d'une raie M d'un atome à plusieurs électrons sont :
E^K_i = 3 keV, E^L_i = 0,3 keV et E^M_i =0,03 keV.

Connaissance
Réflexion
Les deux

☒ A. La transition L→K émet un photon X de λ = 0,46 nm.

$$|3-0.3|.10^3.1,6.10^{-19} = 4,32.10^{-16} = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{6.62.10^{-34}.3.10^8}{4,32.10^{-16}} = 0,46\ \text{nm}$$

☒ B. La transition L→M nécessite l'absorption d'un photon d'énergie 0,27 keV.

$$|0.3-0.03| = 0,27\ \text{keV}$$

☒ C. La transition M→K émet un photon de fréquence 718 10^{15} Hz

$$|3-0.03|.10^3.1,6.10^{-19} = 4,752.10^{-16} = h.f \Rightarrow f = \frac{4,752.10^{-16}}{6.62.10^{-34}} = 717,8.10^{15}\ \text{Hz}$$

☐ D. La transition M→L peut provoquer une ionisation sur la couche K.

☒ E. La transition L→K peut provoquer une ionisation sur la couche M.

PASS

EXERCICE: Tube X

Concours PACES 2011

Un tube à rayons X dont l'anode est en tungstène est utilisé avec une tension d'accélération des électrons de 150 kV.
Les énergies d'ionisation des couches K (n=1, l=0), L (n=2, l=0) et M (n=3, l=0) de l'atome de tungstène sont respectivement 69,5 keV, 12,1 keV et 2,8 keV.

Connaissance
Réflexion
Les deux

☒ A. L'énergie véhiculée par le rayonnement X produit est principalement le fait d'un rayonnement de freinage.

☒ B. Le spectre du rayonnement X produit est un spectre continu au sein duquel peuvent être observées des raies surajoutées d'énergie 66,7 keV et 57,4 keV.

69,5-2,8 = 66,7
69,5-12,1 = 57,4

☐ C. L'énergie véhiculée par le rayonnement X produit est principalement le fait de photons de 9,3 keV.

12,1-2,8 = 9,3

☐ D. Une raie unique est observée à 9,3 keV dans le spectre du rayonnement X produit.

pas unique

☒ E. S'il est focalisé sur un tissu humain vivant, le rayonnement X produit par ce tube est capable de créer des radicaux libres.

☐ F. L'énergie des photons émis varie entre 0 et 175 keV

entre 0 &150 keV

☐ G. Des photons X non ionisants prédominent dans le rayon X observé

autoabsorbés

PASS

EXERCICE: Activité et période

EXERCICE

Pour réaliser une scintigraphie osseuse, on administre par voie intraveineuse 3,8 ng de $^{99}_{43}Tc^{m}$ $(T = 6\,h)$ à un patient.

1- Déterminer le nombre de moles de molybdène nécessaire à sa production

$$1\,\text{mole} \equiv 99\,g \Rightarrow 3{,}8\,ng \equiv \frac{3{,}8.10^{-9}}{99} = 38{,}4.10^{-12}\ \text{moles de}\ ^{99}_{43}Tc^{m}\ \text{ou de}\ ^{99}_{42}Mo$$

2- Déterminer l'activité injectée

$$38{,}4.10^{-12}\ \text{moles} = 23.10^{12}\ \text{atomes.}\ \ A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N = \frac{\ln 2}{6.60.60} 23.10^{12} = 741 MBq = 20\,mCi$$

3- Déterminer la vie moyenne de ce radio-isotope

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} = 8{,}6\,h = 8\,h\,39\,min$$

4- Quelle conséquence aurait l'administration d'une activité 4 fois plus faible

4 fois moins de photons détectés et S/B divisé par 2

En supposant l'absence de toute élimination de cet isotope:

5- Combien de photons gamma seront émis dans l'organisme du patient ? $23{,}10^{12}$

6- Quelle % d'activité persistera 24h après l'injection ?

$$t = 24h = 4.T \Rightarrow A = \frac{A_0}{2^{\frac{t}{T}}} = \frac{A_0}{2^4} = \frac{A_0}{16} = 6.25\%.A_0$$

PASS

EXERCICE: Capture électronique

CAPTURE ELECTRONIQUE (PACES 2013)

On observe l'apparition de manganèse $^{55}_{25}Mn$ (masse atomique de 54,938 047 u) au sein de fer $^{55}_{26}Fe$ (masse atomique 54,938 296 u), sans émission de particule chargée positivement (1 u = 931,5 Mev/c²).

On donne:

$$E_i^{1s}\left(^{55}_{26}Fe\right) = 7{,}11\,keV \quad \text{et} \quad E_i^{1s}\left(^{55}_{25}Mn\right) = 6{,}54\,keV$$

$$E_i^{2s}\left(^{55}_{26}Fe\right) = 0{,}85\,keV \quad \text{et} \quad E_i^{2s}\left(^{55}_{25}Mn\right) = 0{,}77\,keV$$

$$E_i^{2p}\left(^{55}_{26}Fe\right) = 0{,}72\ \text{et}\ 0.71\,keV \quad \text{et} \quad E_i^{2p}\left(^{55}_{25}Mn\right) = 0{,}65\ \text{et}\ 0.64\,keV$$

Connaissance
Réflexion
Les deux

1- Ecrire la réaction en cause $^{55}_{26}\text{Fe} + ^{0}_{-1}e^{-}_{K} \rightarrow ^{55}_{25}\text{Mn} + ^{0}_{0}\nu$

2- Calculer l'énergie emportée par la particule émise

$$\boldsymbol{E_d = \left[\mathfrak{M}\left(^{55}_{26}Fe\right) - \mathfrak{M}\left(^{55}_{25}Mn\right)\right].c^2 - E_K^i\left(^{55}_{26}Fe\right)}$$

$$\boldsymbol{= [54{,}938296 - 54{,}938047].931{,}5 - 7{,}11.10^{-3} = 224{,}83\ keV}$$

3- Calculer l'énergie des photons émis après la réaction (hors Auger sur M)

$$\left.\begin{array}{l} L1 \rightarrow K : 6{,}54 - 0{,}77 = 5{,}77\,keV \\ L2 \rightarrow K : 6{,}54 - 0{,}65\ \text{ou}\ 0{,}64 = 5{,}89\,keV\ \text{ou}\ 5{,}90\,keV \\ L2 \rightarrow L1 : 0{,}77 - 0{,}65\ \text{ou}\ 0{,}64 = 0{,}12\,keV\ \text{ou}\ 0{,}13\,keV \end{array}\right\} \text{Fluorescence X}$$

PASS