

TRAITEMENT DES IMAGES SCINTIGRAPHIQUES



25-29 mars 2024

Denis MARIANO-GOULART
Département de médecine nucléaire
CHRU de Montpellier
<http://scinti.edu.umontpellier.fr>

-  marque des points particulièrement importants à comprendre et connaître
-  concerne un exercice ou une réflexion à mener ensemble, et à bien comprendre
-  marque des points délicats ou plus techniques qui ne sont pas exigibles à l'examen

Comment participer ?



Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

 [Copier le lien de participation](#)



[D2] Cette coupe TEP-TDM au 18FDG démontre que



1 l'image 2 est en hypersignal par rapport à l'image 3.

2 l'image 1 fixe plus le glucose que l'image 3.



3 L'image 1 métabolise plus le glucose en son centre qu'en périphérie.

4 L'image 3 n'est pas pathologique.

5 La fixation des parois des gros vaisseaux est hétérogène.

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

PLAN DU COURS

① Réponse d'une γ -caméra

- réponse impulsionnelle
- échantillonnage
- formation d'une image
- effet de volume partiel
- déconvolution

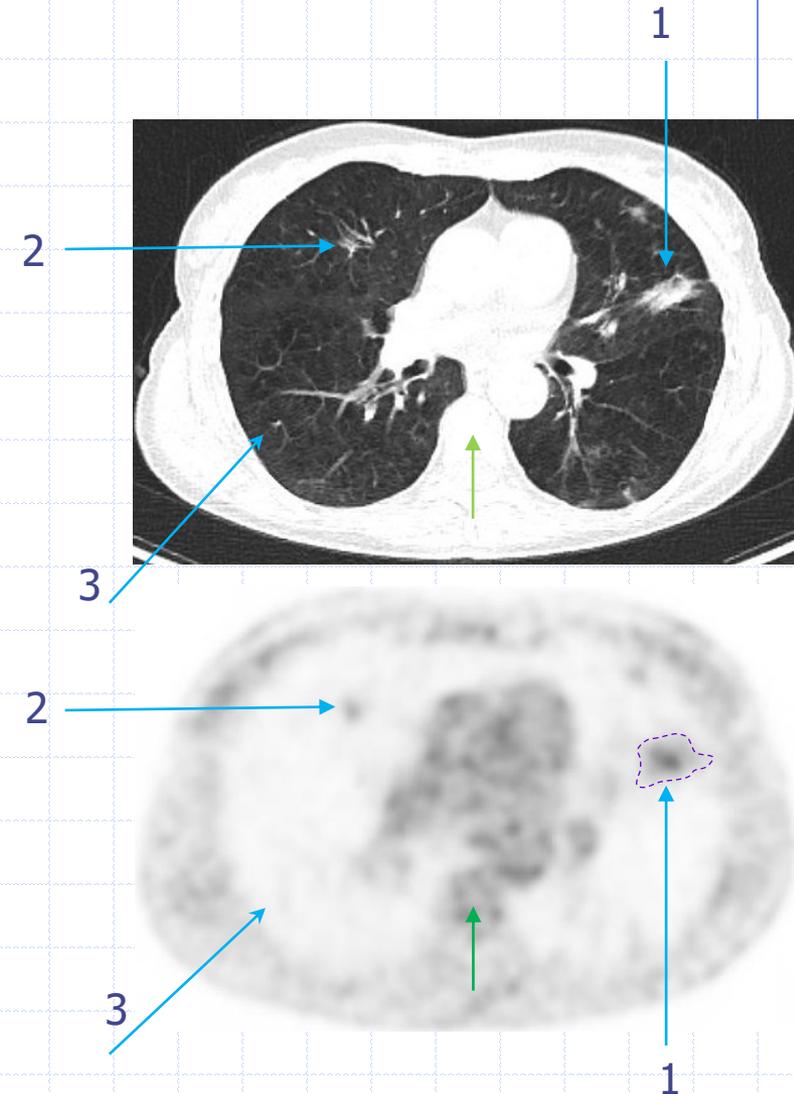
② Bruit et filtrages

- ◆ bruit stochastique
- ◆ filtrages d'images

③ Segmentation

④ Recalage d'images

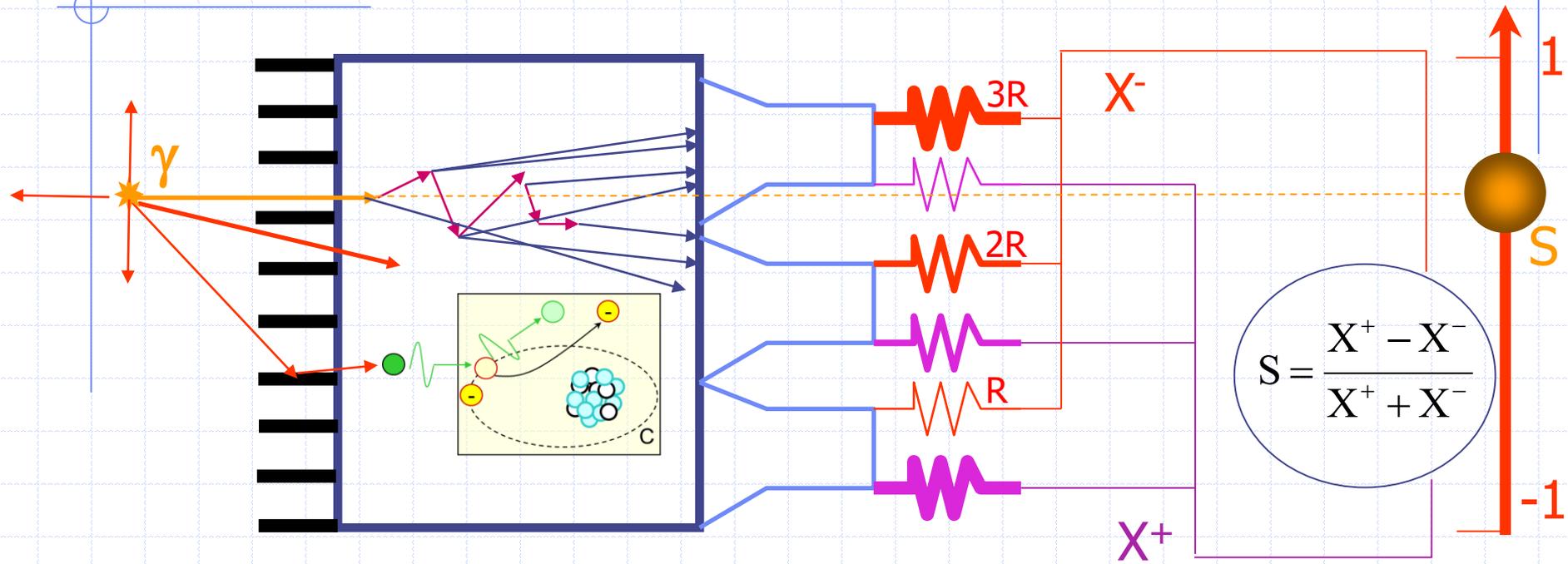
⑤ Visualisation volumique



① REPONSE D'UNE GAMMA-CAMERA

Réponse impulsionnelle d'un appareil d'imagerie.
Echantillonnage d'une image scintigraphique.
Processus de formation d'une image
Effet de volume partiel
Déconvolution

Réponse impulsionnelle d'une γ -caméra (*Point Spread Function*)



Collimateur

Scintillateur

PM

Localisation

+ spectro
Sur $X^+ + X^-$

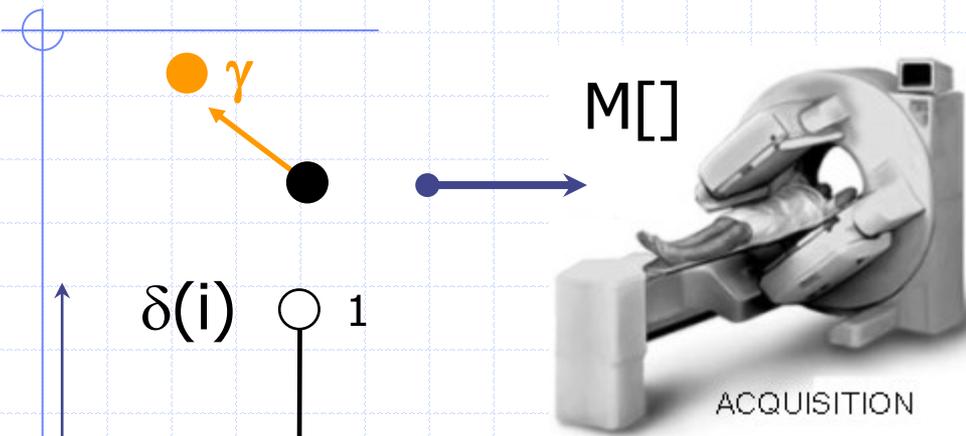
Pénétration et diffusion septales,
Réponse géométrique

Diffusion Compton dans le cristal

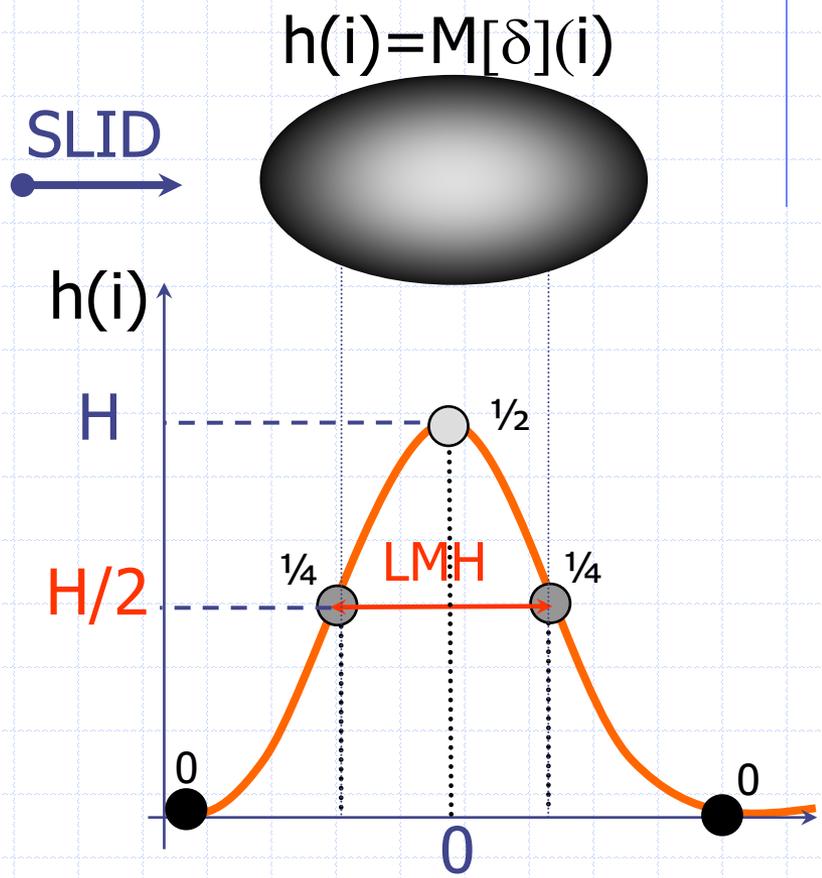
Incertitudes de localisation

réponse intrinsèque

Réponse intrinsèque d'une γ -caméra



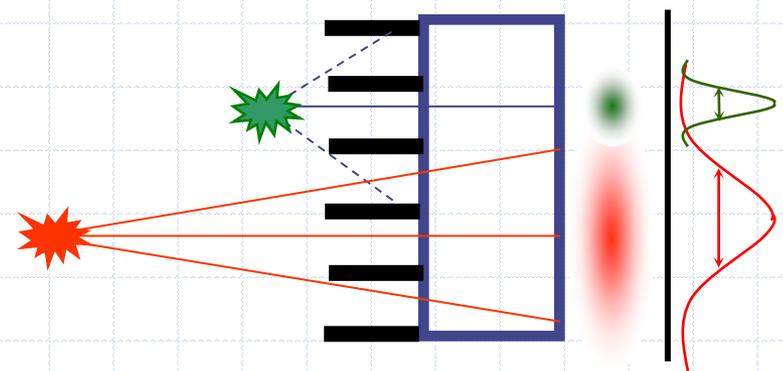
goutte radioactive au centre du champ
(impulsion de Dirac)
placée au contact du détecteur



- Réponse **intrinsèque** (invariante)
 - ◆ LMH \approx 4 (Anger) à 2,5 (CZT) mm

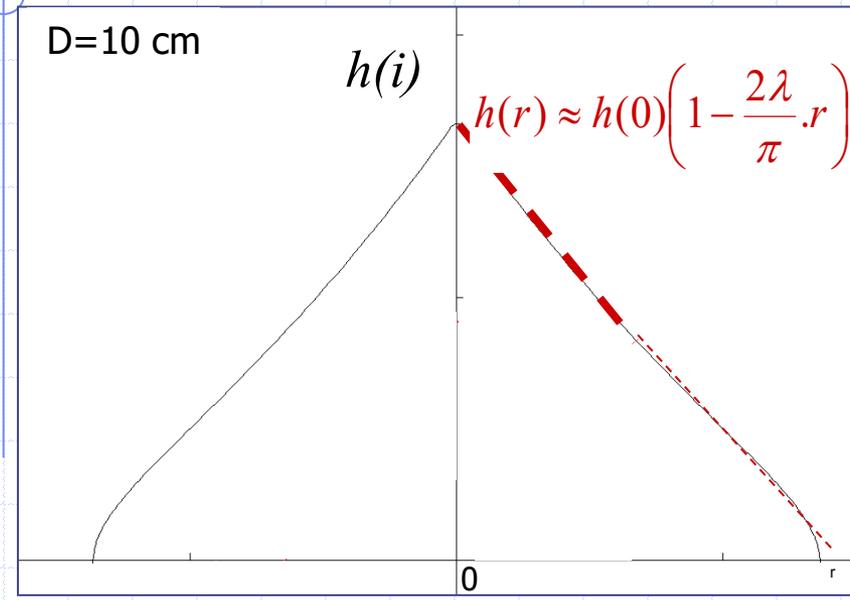
Réponse géométrique d'un collimateur

Approche intuitive:

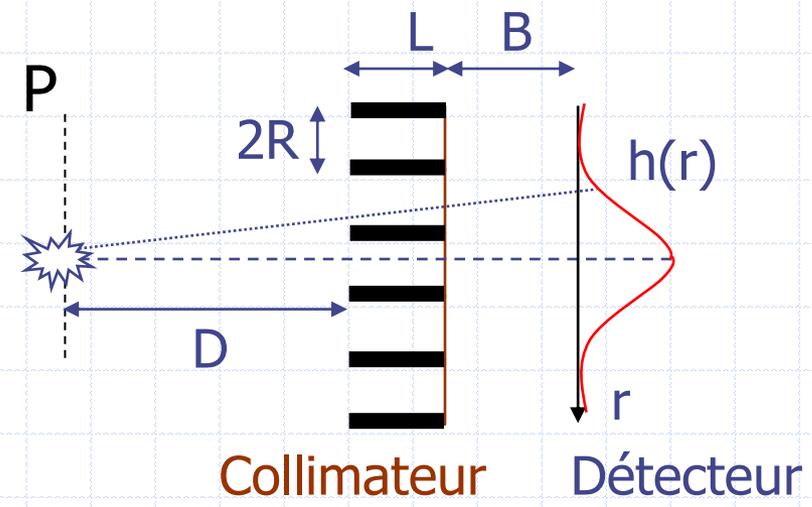


Plus la source radioactive est éloignée du détecteur, plus la LMH de l'imageur augmente et plus la tache image s'élargit en diminuant d'intensité maximale.

Réponse d'un collimateur



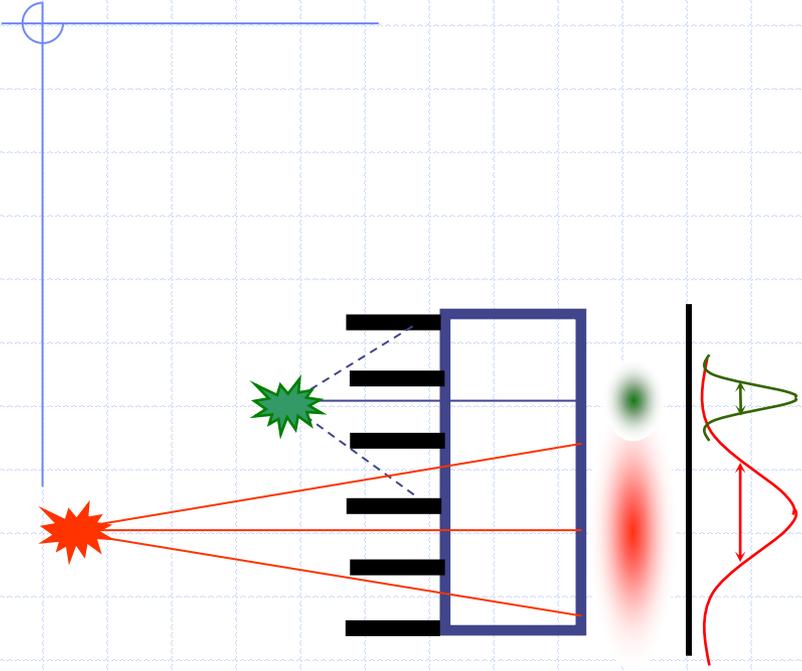
LEHR : $L = 4,1 \text{ cm}$; $B = 0,64 \text{ cm}$; $R = 0,19 \text{ cm}$; $\varepsilon = 0,065$



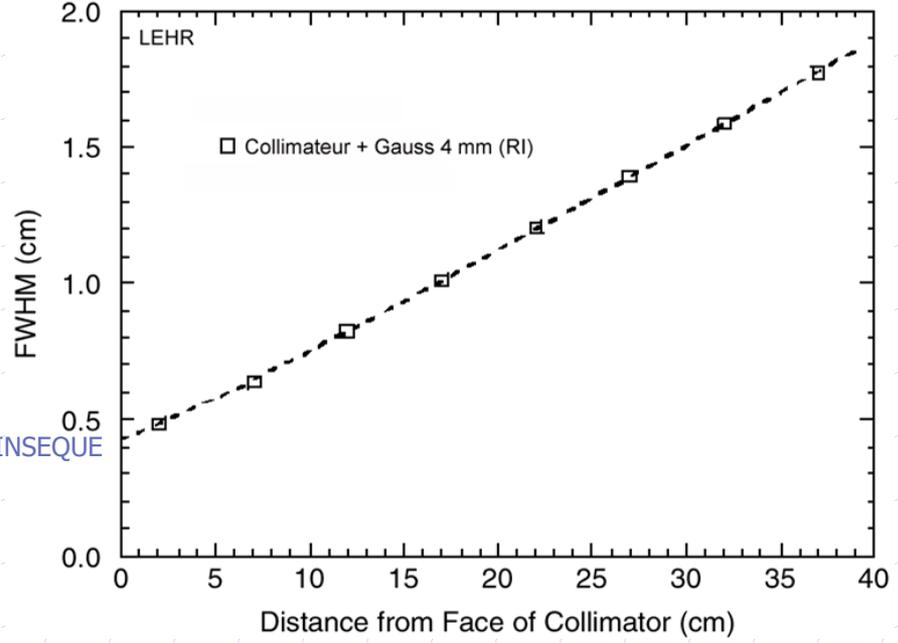
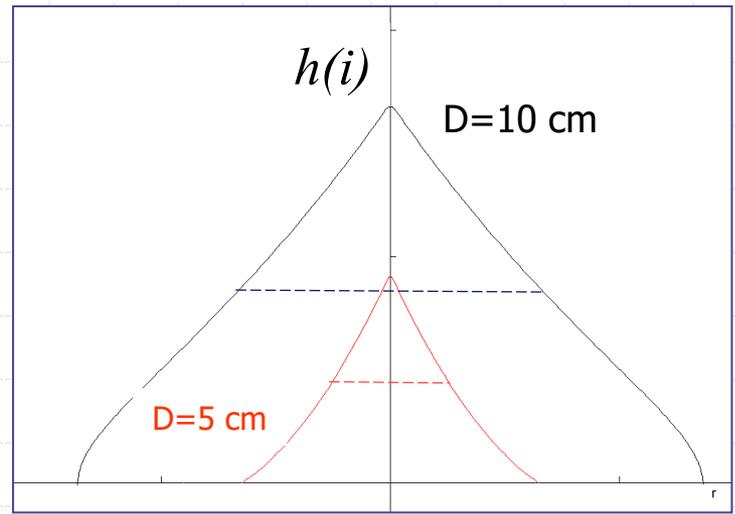
$$h(r) = \frac{h(0)}{\pi} \left[2 \cdot \arccos \left(\frac{\lambda \cdot r}{2} \right) - \lambda \cdot r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda \cdot r}{2} \right)^2} \right] \quad \lambda = \frac{L}{R \cdot (L + D + B)}$$

$h(0)$ = efficacité du collimateur, septa cylindriques

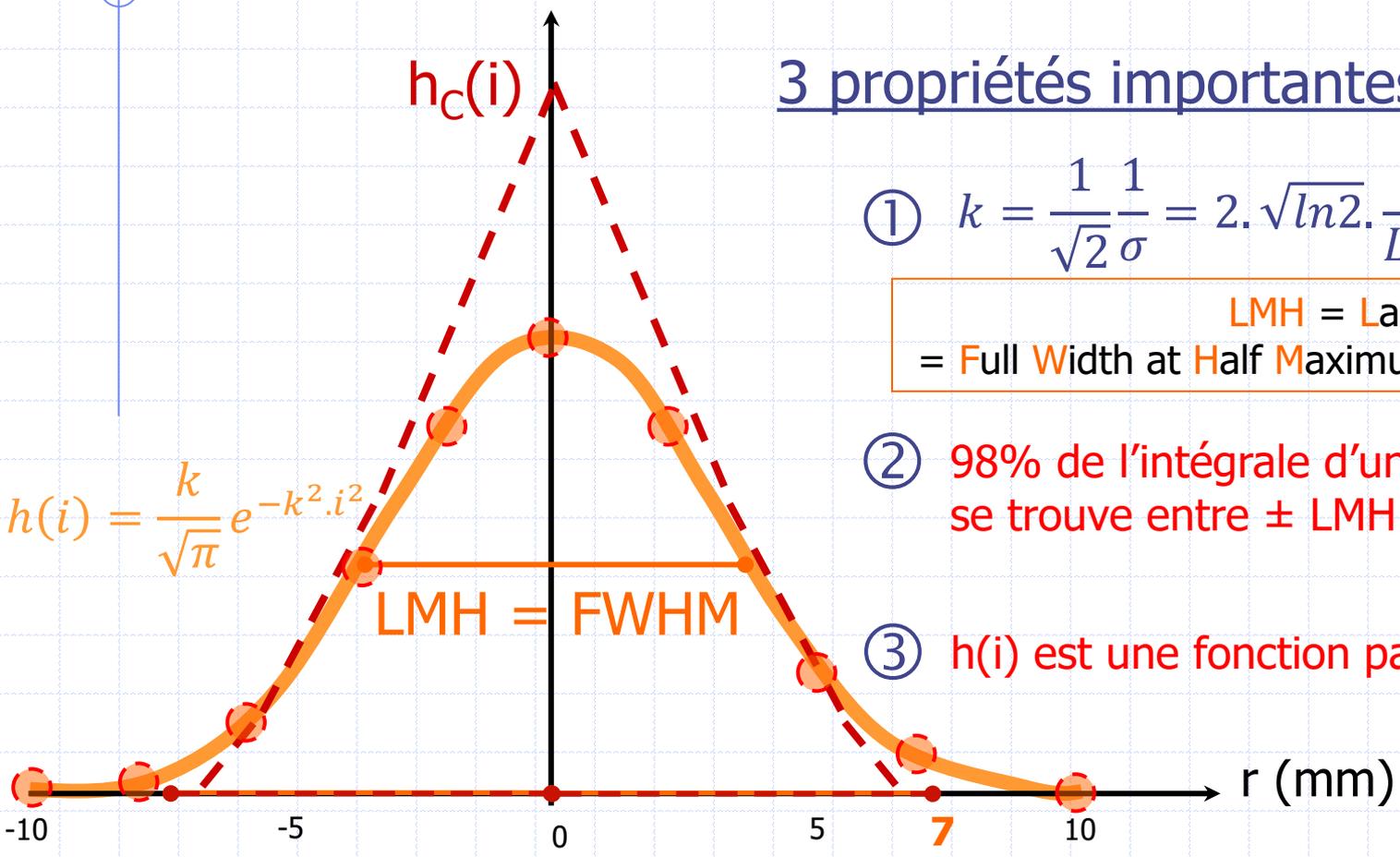
Lien entre LMH & D



REPONSE INTRINSEQUE



Réponse impulsionnelle d'une γ -caméra \approx gaussienne (pour D fixée)



3 propriétés importantes:

① $k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma} = 2 \cdot \sqrt{\ln 2} \cdot \frac{1}{LMH}$

LMH = Largeur à Mi-Hauteur
= Full Width at Half Maximum = RESOLUTION

② 98% de l'intégrale d'une gaussienne se trouve entre \pm LMH:

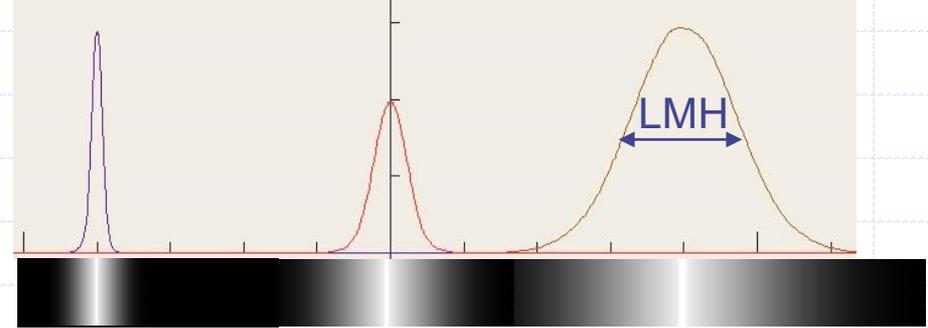
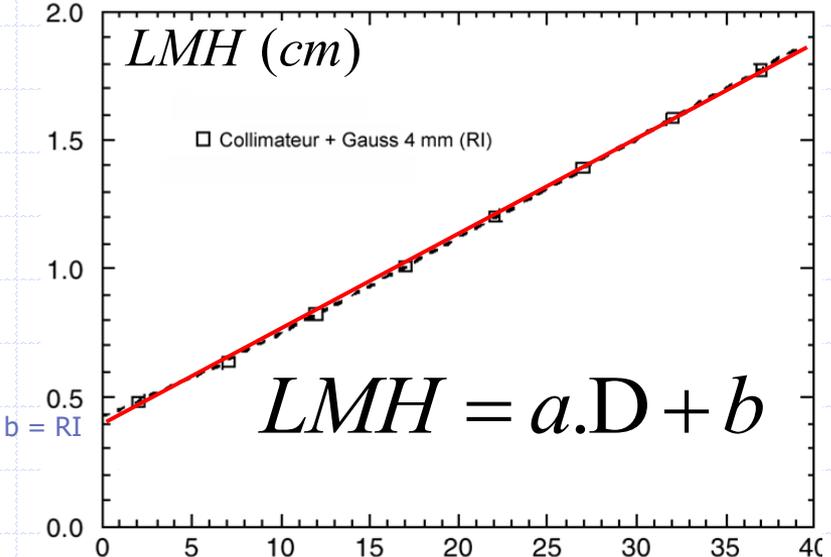
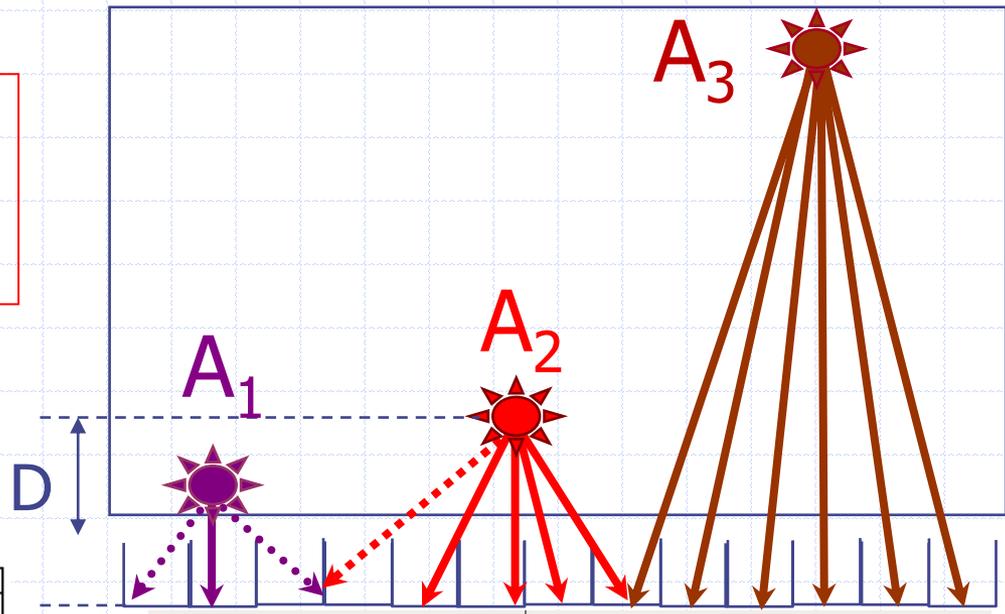
$$\sum_{i=-LMH}^{LMH} h(i) \approx 1$$

③ $h(i)$ est une fonction paire

Réponse impulsionnelle d'une γ -caméra (PSF = Point Spread Function)

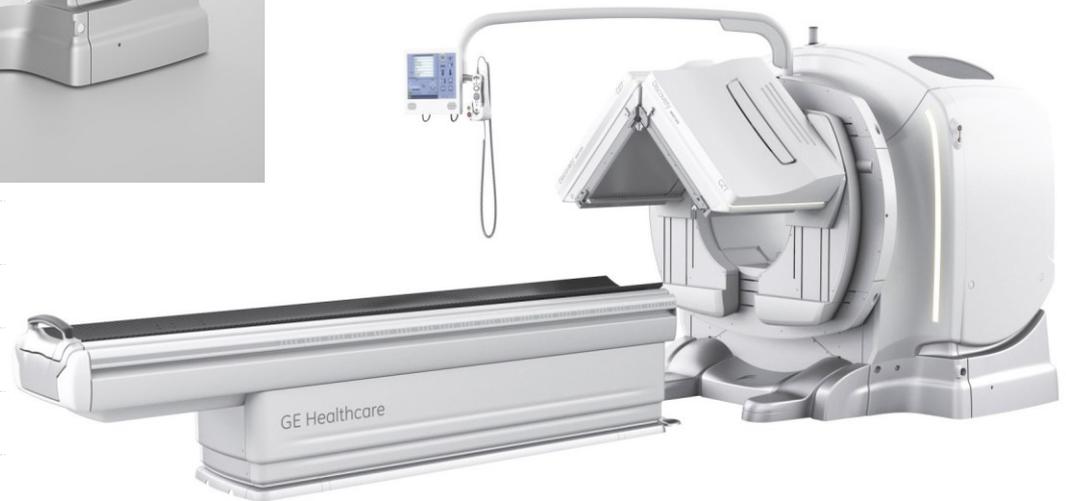


$$h(i) = \frac{2 \cdot \sqrt{\ln 2}}{LMH \sqrt{\pi}} e^{-\frac{4 \cdot \ln 2}{LMH^2} \cdot i^2}$$

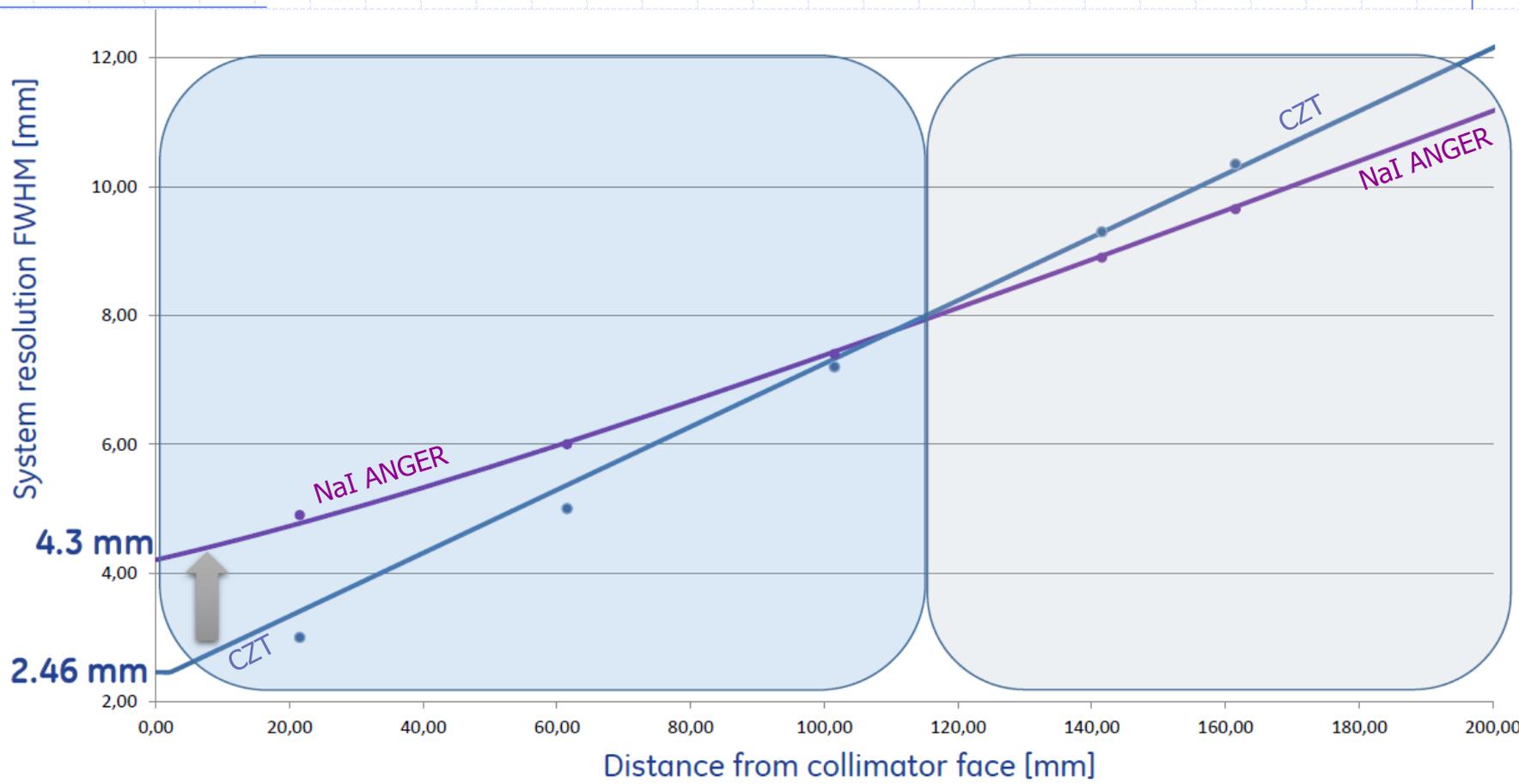


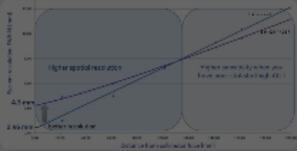
$$\sum_{i=-LMH}^{LMH} h(i) \approx A_n$$

Ex: GE NM 870: CZT vs. ANGER



CZT grand champ vs. Anger + LEHR





[D12] Par rapport à la NM 870 Anger avec collimateur parallèle, la version disposant de détecteurs CZT:

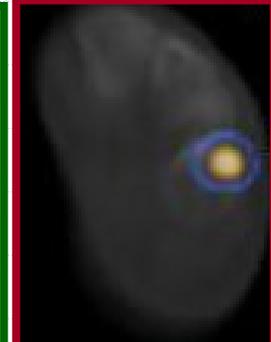
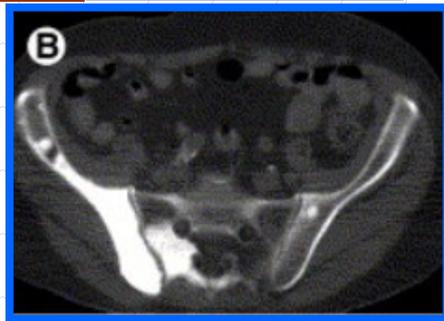
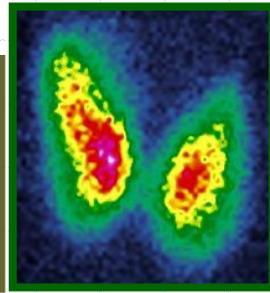
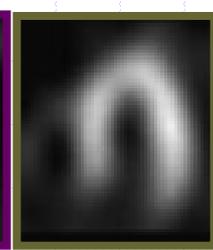
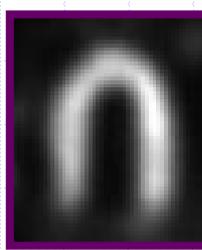
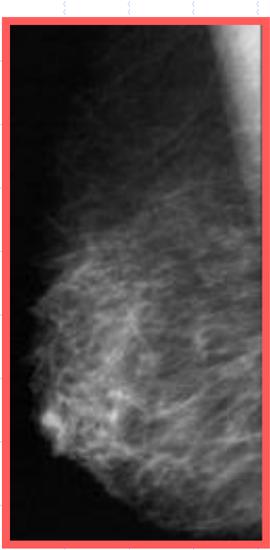
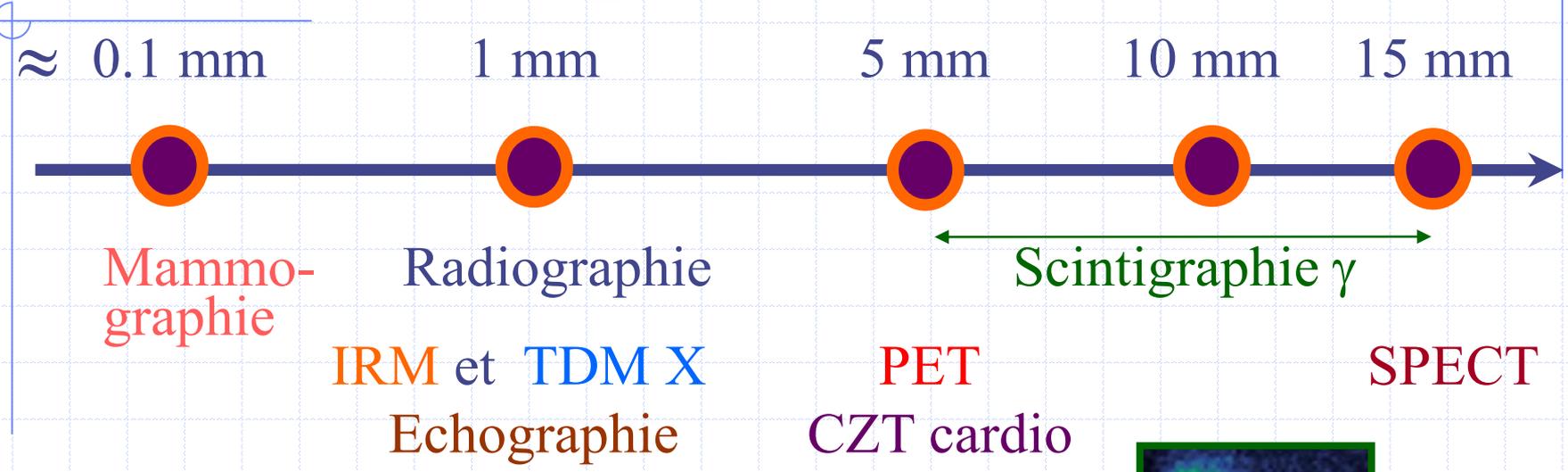


- 1 A une meilleure résolution intrinsèque
- 2 A une meilleure résolution en SPECT
- 3 produira des images planaires de meilleure résolution au contact du détecteur
- 4 produira des images tomographiques de meilleure résolution
- 5 enregistrera des taux de comptage supérieurs

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

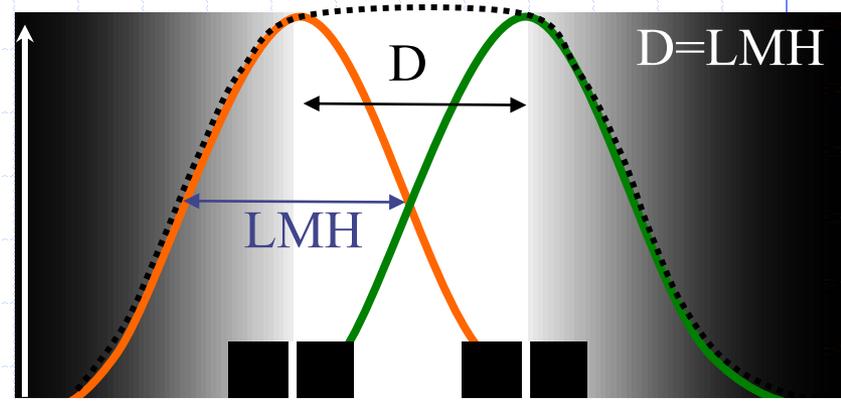
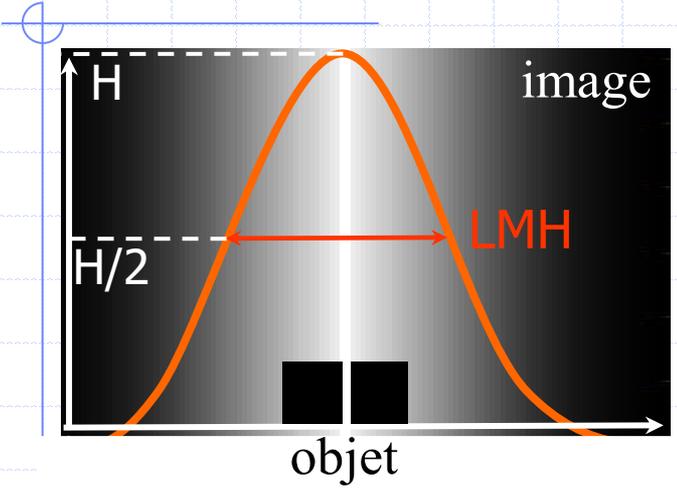


LMH en imagerie médicale

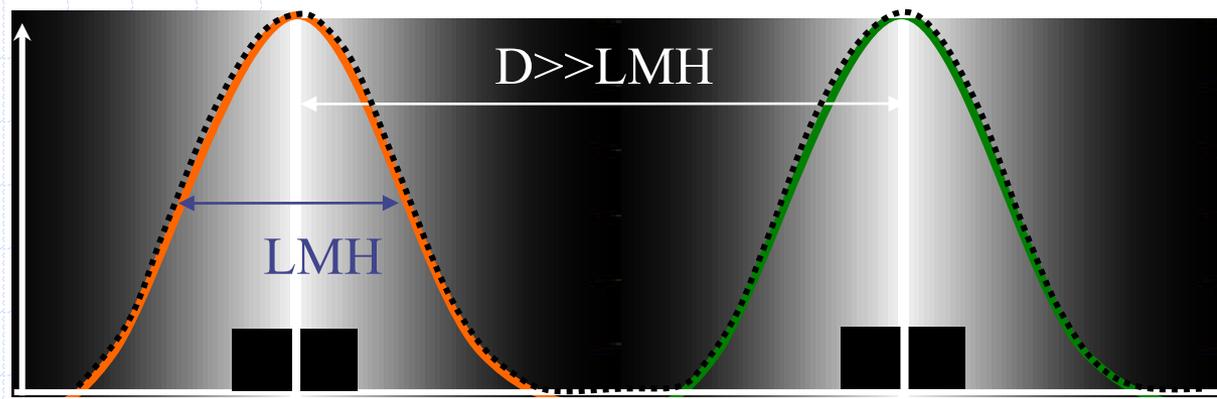
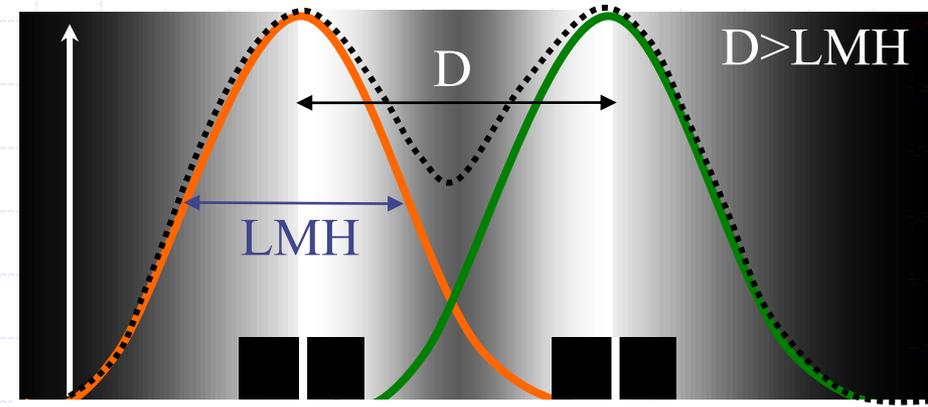




LMH = Pouvoir séparateur



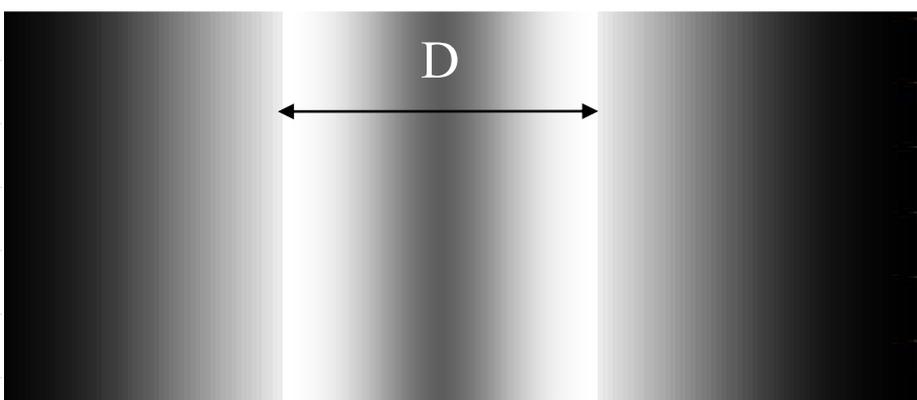
$D \leq LMH \Rightarrow$ images fusionnées



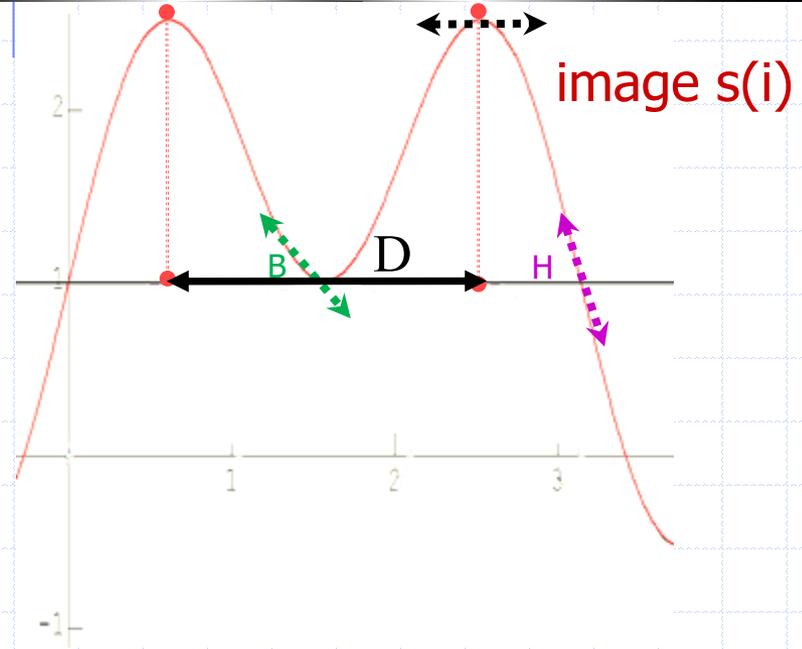
La LMH est la plus petite distance qui doit séparer 2 objets pour que la caméra en donne 2 images distinguables:

LMH = Pouvoir séparateur

Décomposition harmonique d'un signal

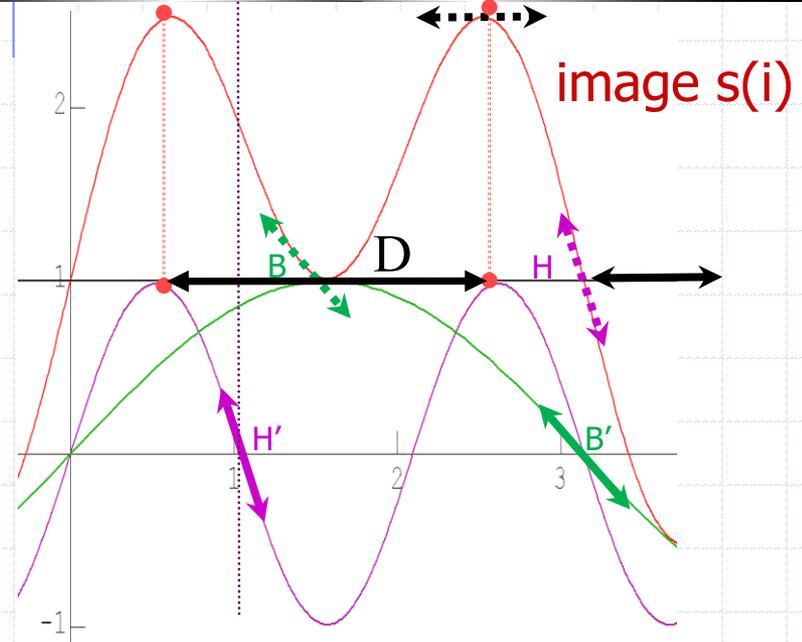
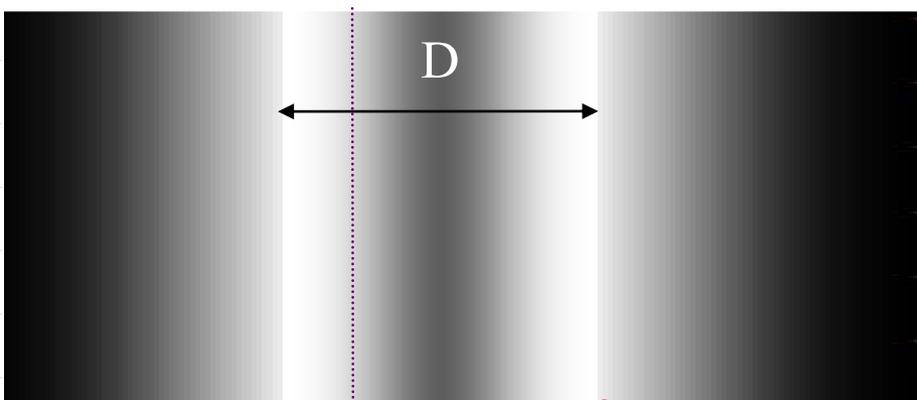


Si $D > LMH$, l'image totale $s(i)$ présente un minimum entre les maxima des images des 2 objets.



Dans cette image, deux raies blanches sont au moins séparées par une distance D .
On distingue donc $1/D$ lignes/m

Décomposition harmonique d'un signal



Si $D > LMH$, l'image totale $s(i)$ présente un minimum entre les maxima des images des 2 objets.

Dans cet exemple, on peut écrire :

$$s(i) = 1 + \sin(2\pi \cdot 33 \cdot i) + \sin(2\pi \cdot 100 \cdot i)$$

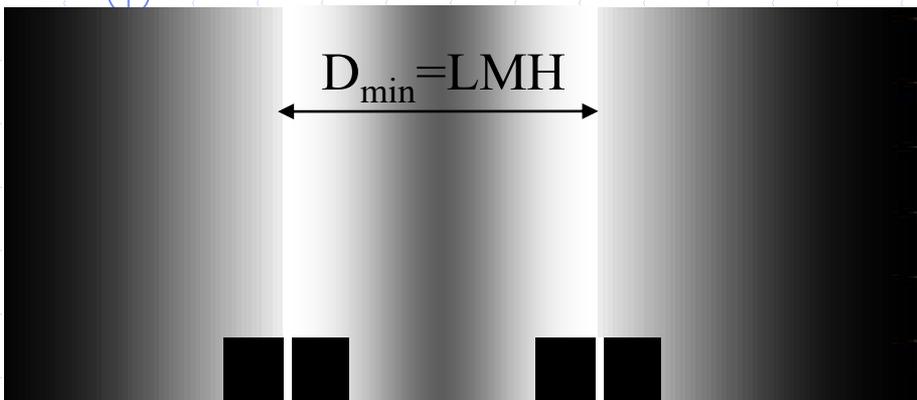
$= 2\pi f_0 \cdot i$

Fréquence nulle	f_0 fréquence fondamentale (la plus basse, ici 33 m^{-1})	f_{max} = fréquence maxi (ici $3 \cdot f_0 = 100 \text{ m}^{-1}$)
code la moyenne du signal	code les variations lentes de niveaux de gris entre pixels (pente en B et B' au maxi)	Code les variations les plus brutales de niveaux de gris entre pixels (pente en H et H' au maxi)

Dans cette image, deux raies blanches sont au moins séparées par une distance = inverse de la fréquence spatiale maximale:

$$D_{\text{min}} = 1/f_{\text{max}} = 1/100 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

1/LMH = fréquence maxi dans l'image



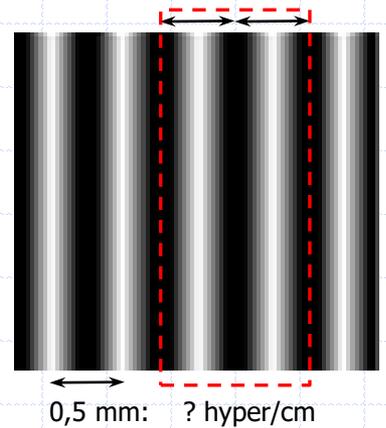
2 objets doivent être distants d'au moins LMH pour donner 2 images distinctes, elles mêmes distantes de LMH.

$LMH = D_{min} =$ plus petite distance entre 2 raies blanches dans l'image $= 1/f_{max}$

1/LMH est la plus haute fréquence objet dont la caméra puisse faire l'image
 $LMH \downarrow \Rightarrow f_{max} \uparrow \Rightarrow$ variation de contraste maximale possible \uparrow

$$LMH = \frac{1}{f_{max}^{transmise}} = D_{min}^{transmise} = \text{résolution} = \text{pouvoir séparateur}$$

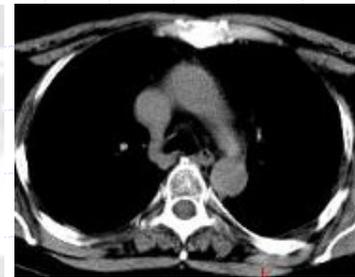
Si LMH = 0,5 cm...



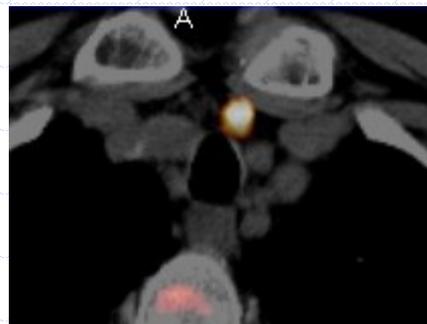
POURQUOI NUMERISER ?

- Pour traiter les images

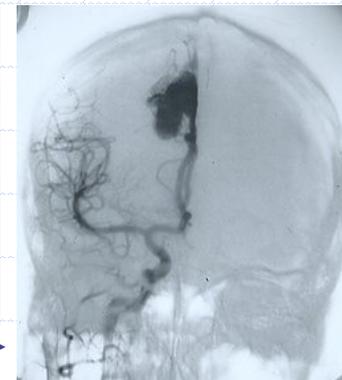
- \uparrow S/B, \uparrow contrastes \longrightarrow
- Reconstruction d'image



- Tomographie \longrightarrow

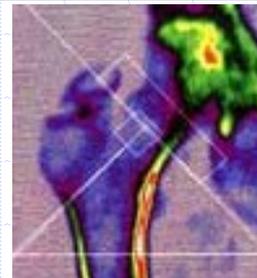


- Multimodalité \longrightarrow

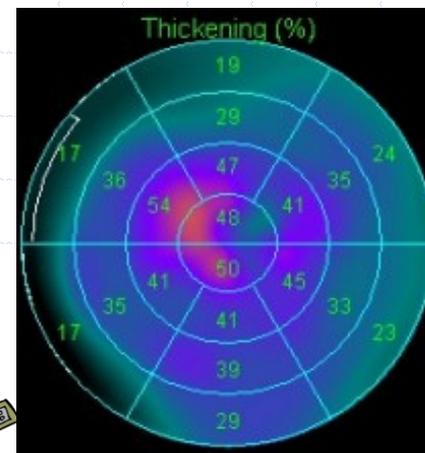


- Angiographie numérisée \longrightarrow

- Ostéodensitométrie \longrightarrow



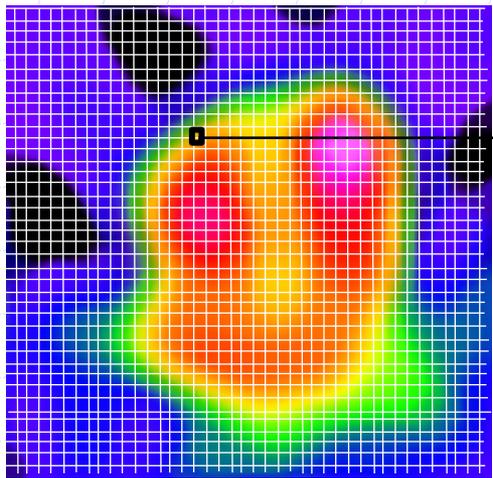
- Pour analyser des images \longrightarrow



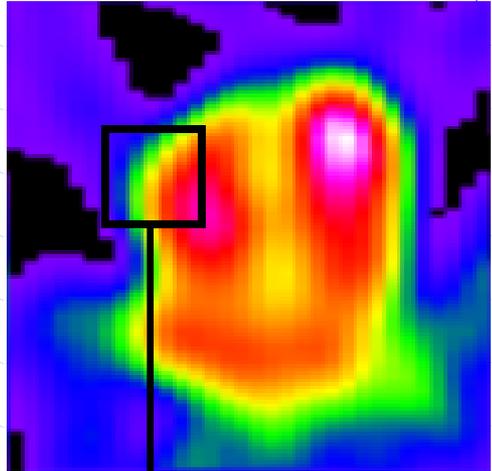
- Pour archiver et transmettre \longrightarrow



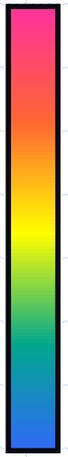
ECHANTILLONNAGES



10	12	15	15	13	15	23	24	23	24	15	13	15	10	12	10
9	15	19	18	15	16	22	25	22	25	18	15	16	9	15	9
5	16	25	22	18	18	22	29	22	29	22	18	18	5	16	5
4	15	28	32	23	21	25	32	25	32	32	23	21	4	15	4
2	7	21	23	25	22	22	25	22	25	23	25	22	2	7	2
1	5	15	21	22	21	19	19	19	19	21	22	21	1	5	1
2	6	13	16	18	18	18	18	18	16	18	18	2	6	2	
9	9	10	15	16	15	16	16	16	15	16	15	9	9	9	
10	12	15	15	13	15	23	24	23	24	15	13	15	10	12	12
9	15	19	18	15	16	22	25	22	25	18	15	16	9	15	15
5	16	25	22	18	18	22	29	22	29	22	18	18	5	16	16
4	15	28	32	23	21	25	32	25	32	32	23	21	4	15	15
2	7	21	23	25	22	22	25	22	25	23	25	22	2	7	7
1	5	15	21	22	21	19	19	19	19	21	22	21	1	5	5
2	6	13	16	18	18	18	18	18	16	18	18	2	6	2	
9	9	10	15	16	15	16	16	16	15	16	15	9	9	9	

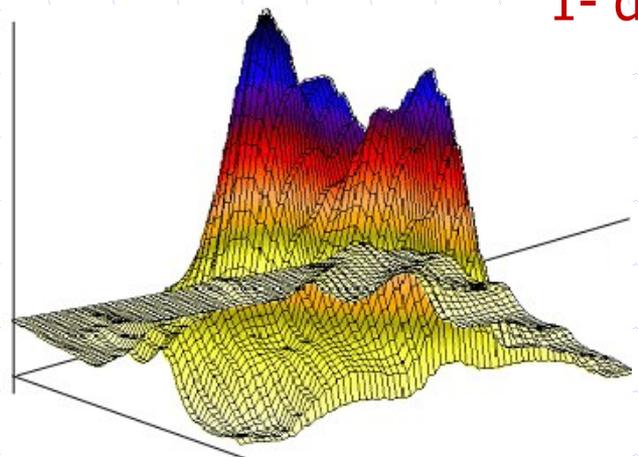


10	12	15	15	13	15	23	24
9	15	19	18	15	16	22	25
5	16	25	22	18	18	22	29
4	15	28	32	23	21	25	32
2	7	21	23	25	22	22	25
1	5	15	21	22	21	19	19
2	6	13	16	18	18	18	18
9	9	10	15	16	15	16	16



1- dimension des pixels ?

2- colorisation ?



SIGNAL ANALOGIQUE

IMAGE NUMERIQUE



[D17] Un TEP dont la LMH est de 0,5 cm dans tout le champ de vue...



1 Génère des images dont la fréquence spatiale est comprise entre 0 et 2 / cm

2 Permet de visualiser 4 hyperfixations linéaires fines par cm

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

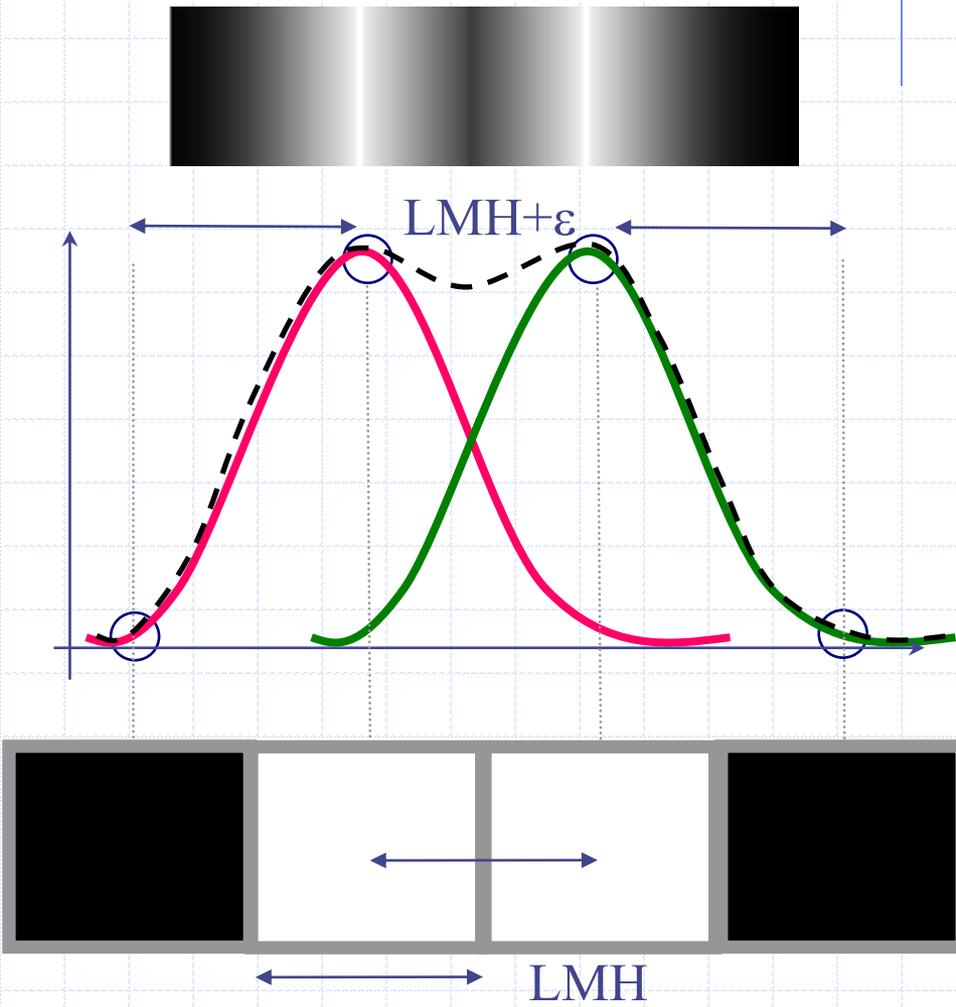
3 Permet de visualiser 2 hyperfixations linéaires fines par cm

4 permet de distinguer des objets ponctuels deux fois plus proches qu'une TEP de LMH 1 cm

Théorème de Shannon

Si la taille du pixel est identique à la LMH, alors aucun contraste n'est numérisé pour des objets ponctuels distants d'un peu plus que la LMH:

Perte de résolution



Théorème de Shannon



ECHANTILLONNAGE
SANS PERTE DE
RESOLUTION



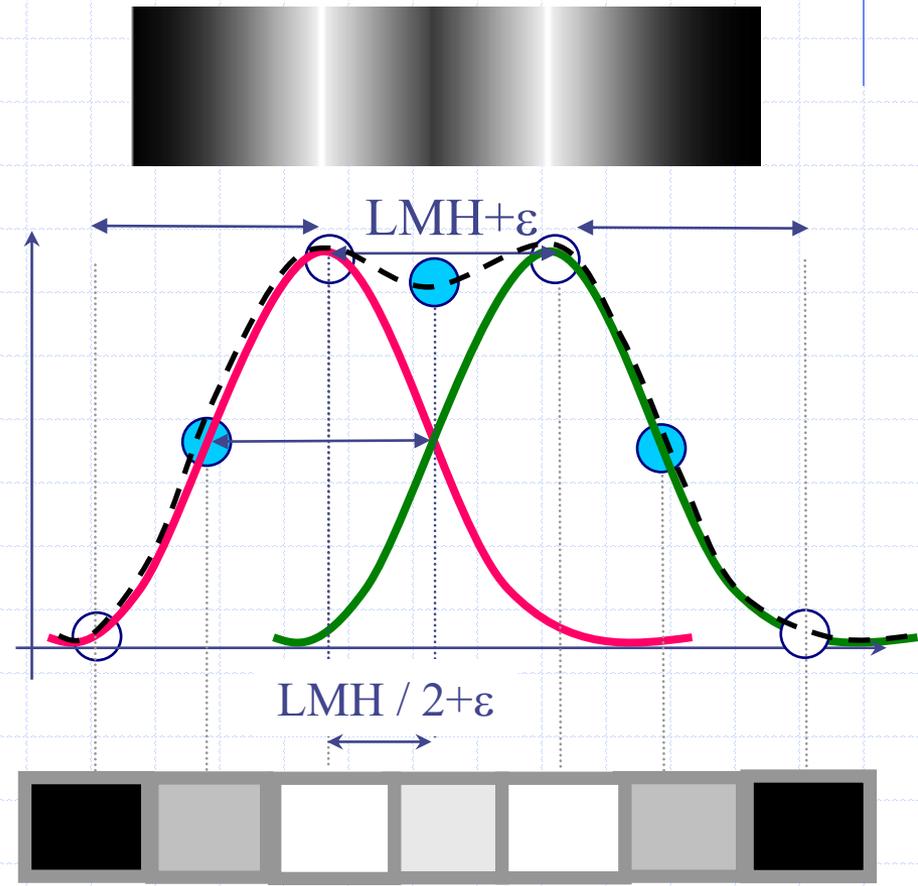
taille du pixel d

$$d \leq LMH/2$$

En pratique :

$$d = LMH/2$$

$$1/d = 2/LMH \Leftrightarrow f_e = 2 \cdot f_{max}$$



Exemple d'échantillonnage

$$d = LMH/2$$

$$1/d = 2/LMH$$

$$f_e = 2 \cdot f_{\max}$$

$$L = 160 \text{ mm}$$

$$f_{\max} = 0,1 \text{ mm}^{-1}$$

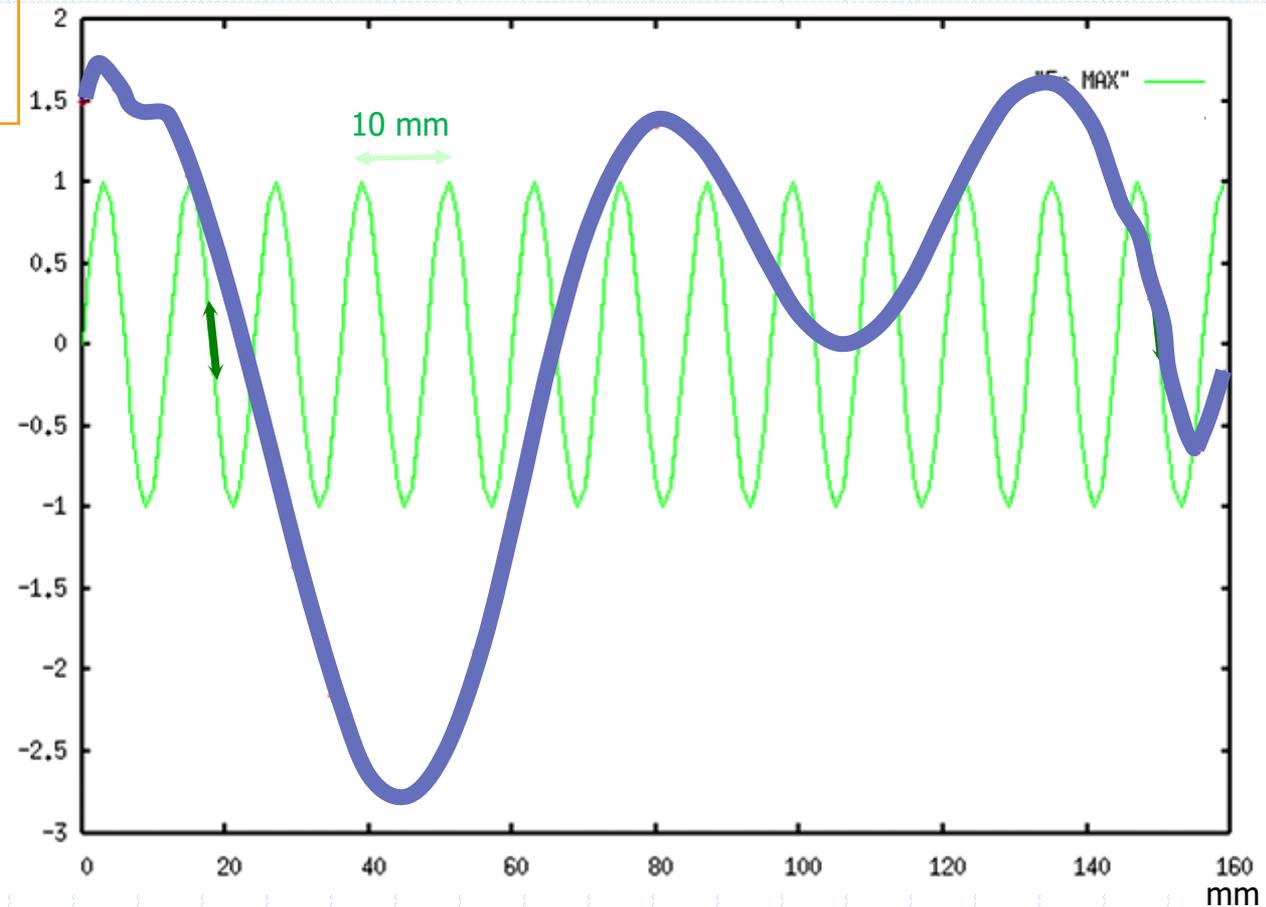
donc:

$$1/d = 2 \cdot f_{\max}$$

$$1/d = 0,2 \text{ mm}^{-1}$$

$$d = 5 \text{ mm}$$

$$160/5 = 32 \text{ points}$$

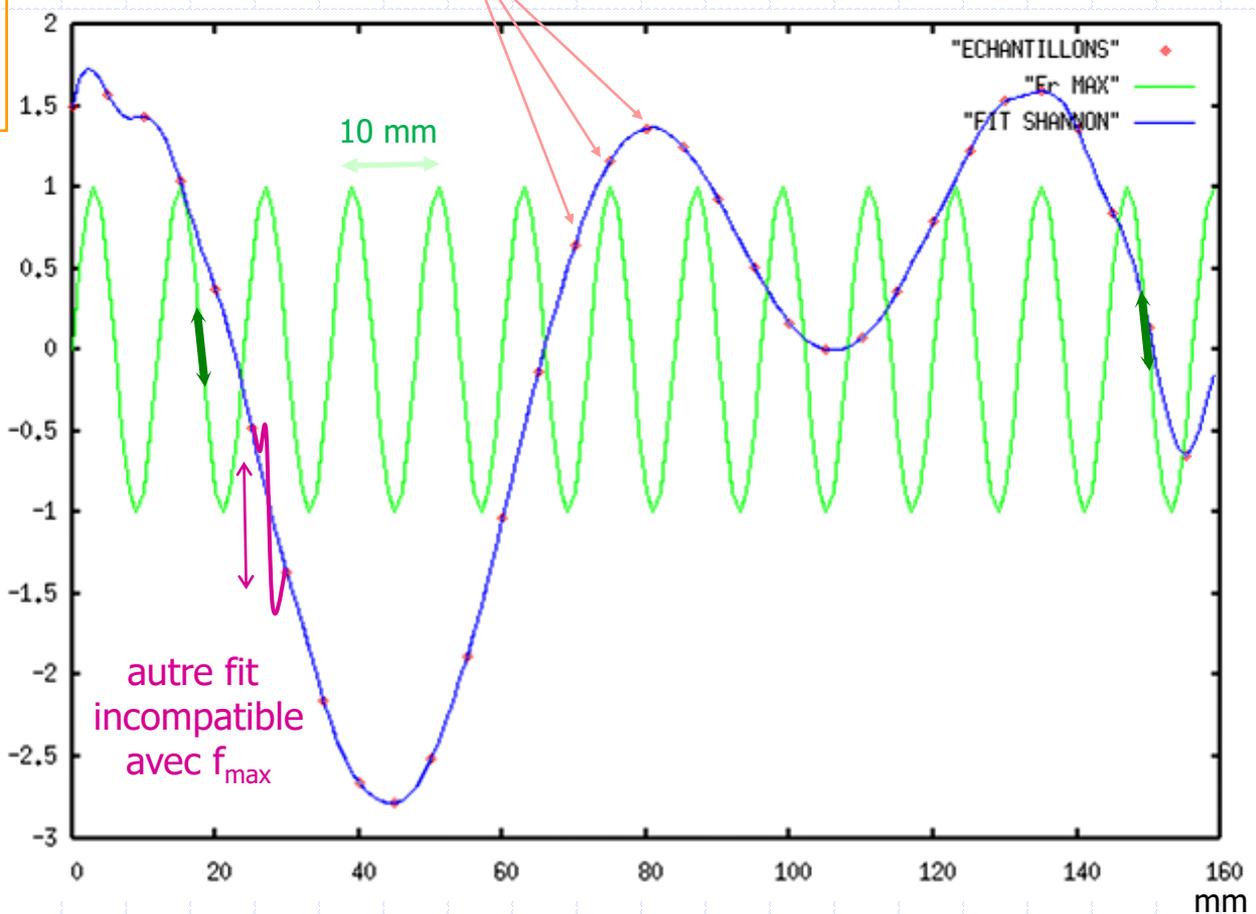


Exemple d'échantillonnage

$d = LMH/2$
 $1/d = 2/LMH$
 $f_e = 2.f_{max}$

$L = 160 \text{ mm}$
 $f_{max} = 0,1 \text{ mm}^{-1}$
 donc:
 $1/d = 2.f_{max}$
 $1/d = 0,2 \text{ mm}^{-1}$
 $d = 5 \text{ mm}$
 $160/5 = 32 \text{ points}$

$$f(x) = d \cdot \sum_{n=0}^{n=32} f(n.d) \cdot \frac{\sin[2.\pi.f_{max} \cdot (x - n.d)]}{\pi \cdot (x - n.d)}$$





[D21] Le champ d'une gamma-caméra est 40 x 50 cm en mode planaire comme tomographique. ...



1 L'échantillonnage optimal est de 200 pixels par côtés en mode planaire

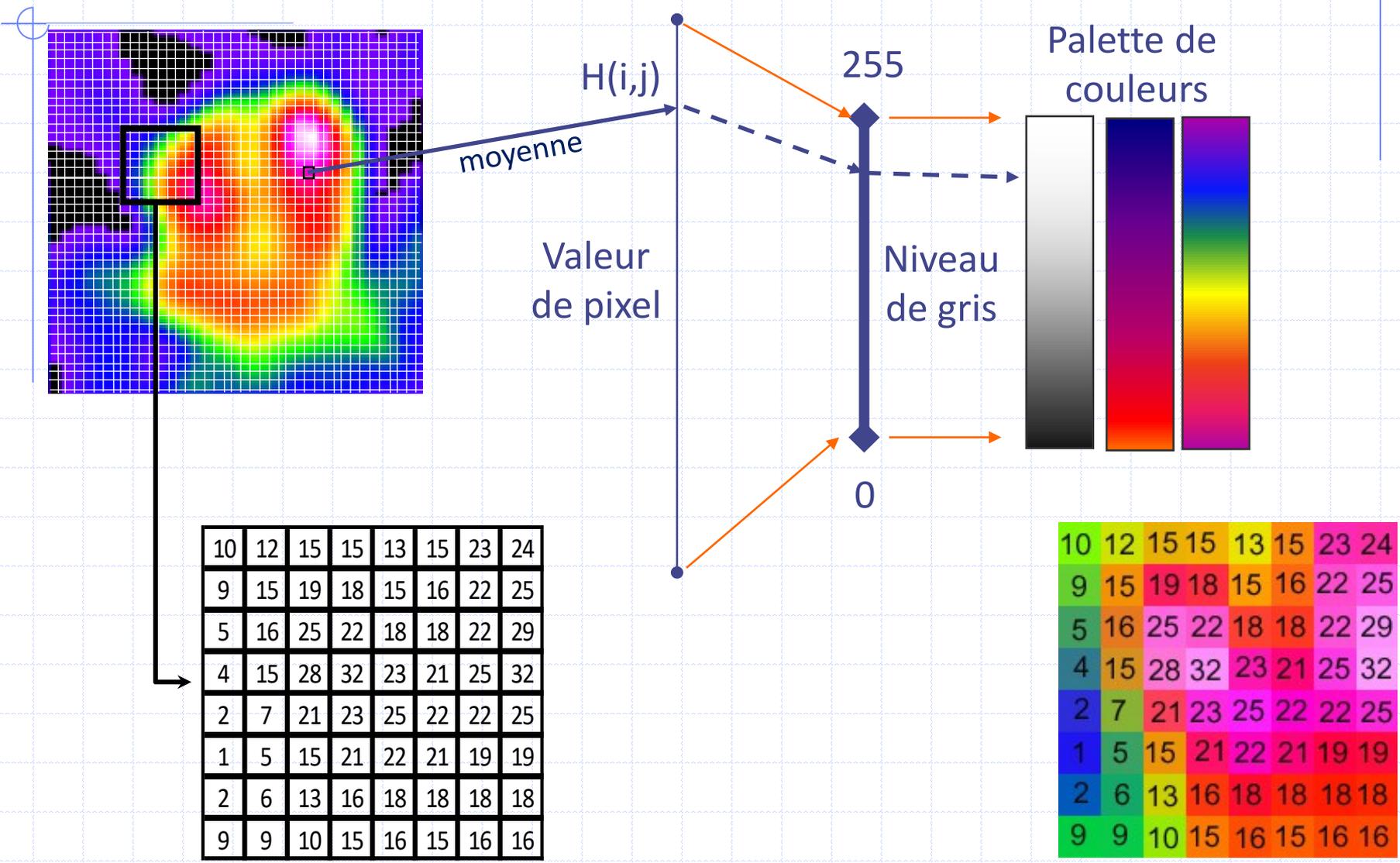
2 L'échantillonnage optimal est de 100 pixels par côtés en SPECT

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

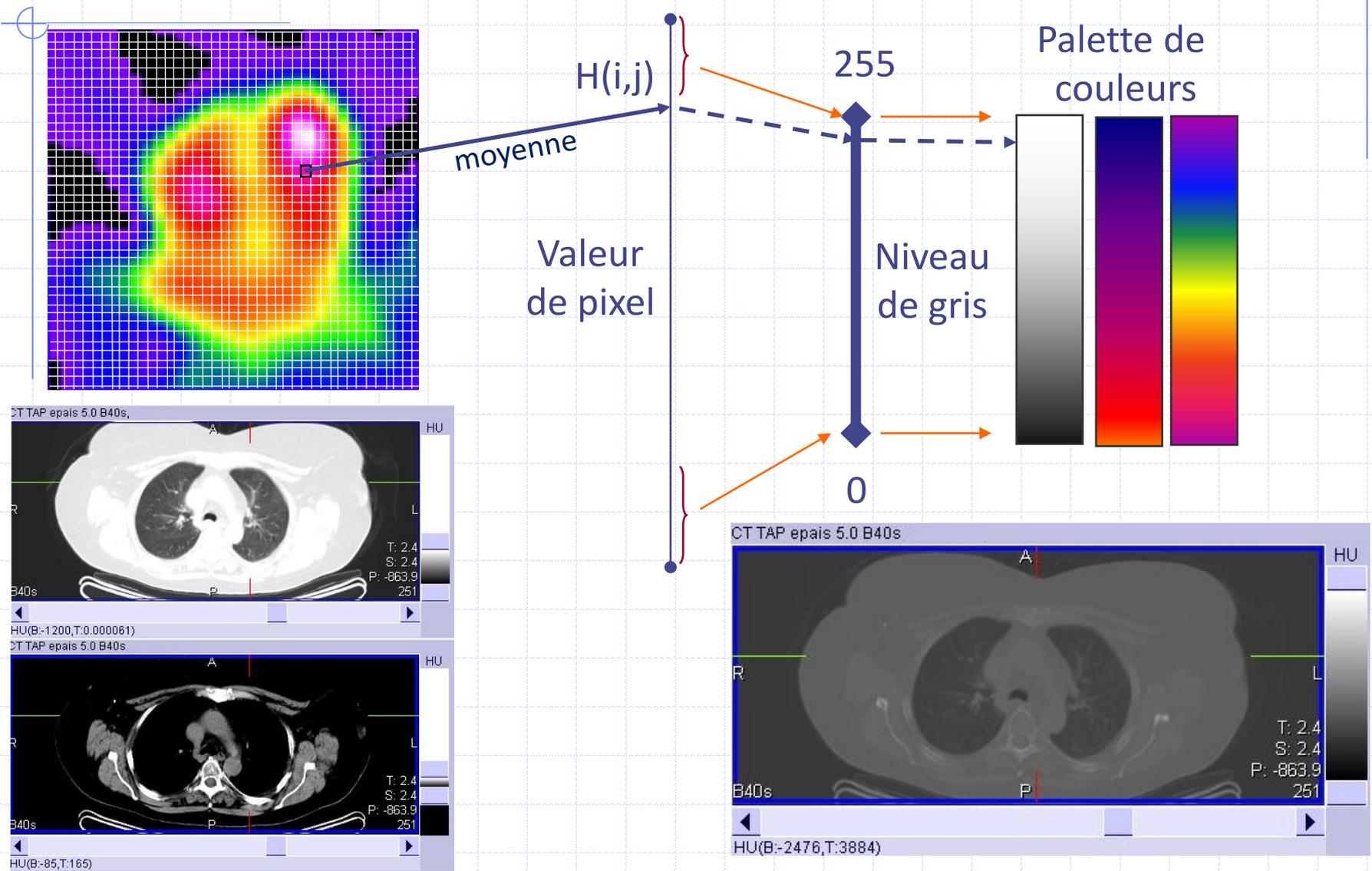
3 Echantillonner avec 256 pixels par côtés plutôt que 128 en SPECT améliorera la résolution

4 Echantillonner avec 256 pixels par côtés plutôt que 128 en SPECT améliorera la qualité d'image

PALETTES DE COULEURS



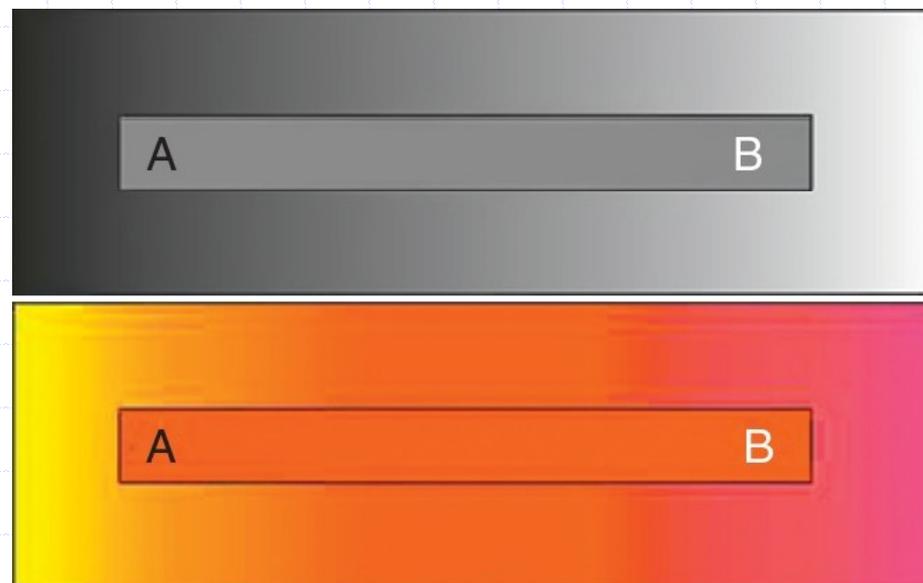
FENETRES DE VISUALISATION



PALETTE COULEUR OU N & B ?

- Sous un éclairage optimal, un humain distingue :
 - 20 teintes de gris moyens. Le codage sur un octet en offre 256
 - Intérêt des fenêtres
 - Avec une évaluation relative, plutôt qualitative

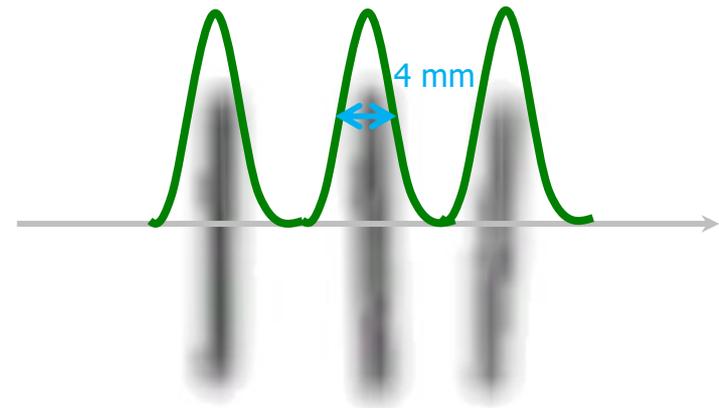
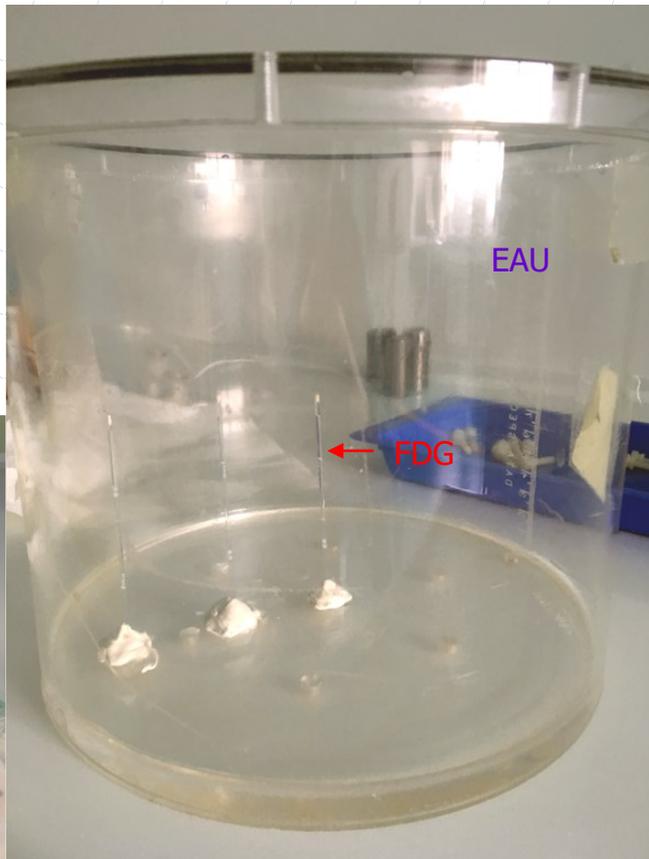
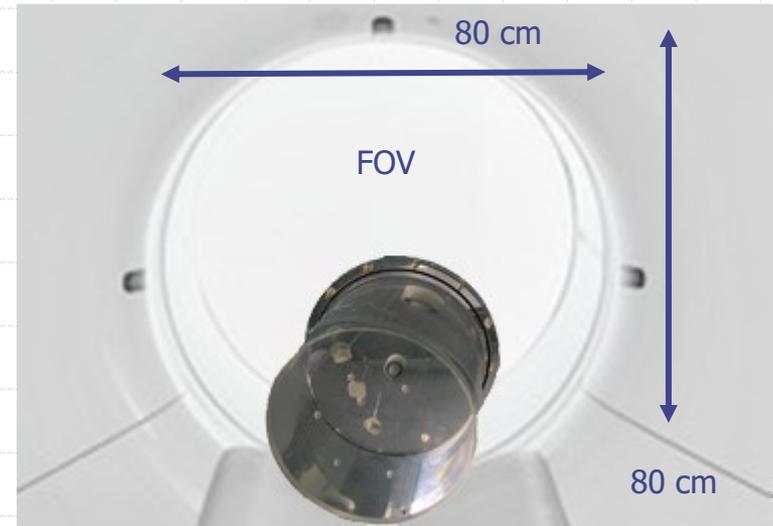
- 1 à 10 millions de couleurs
- Avec une distinction absolue entre couleurs différentes

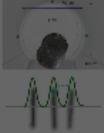


Echantillonnage en pratique (1)



PET SIEMENS mCT20 flow: le pré réglage du constructeur, 200 pixels de 4 mm par côtés, est-il optimal ?





[D 22] Le préréglage constructeur des TEP mCT20 flow propose d'utiliser 200 pixels de 4 mm par côtés en TEP cérébrale au ...



1 Ce paramétrage est optimisé par le constructeur sur sa machine. Je ne le modifie pas.

2 Ce paramétrage dégrade la résolution que cette machine peut produire.



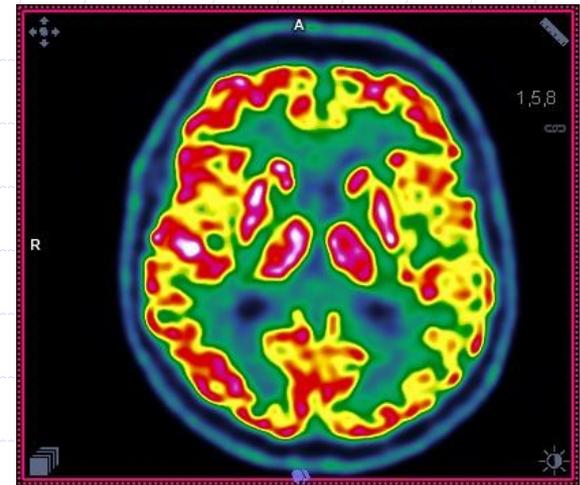
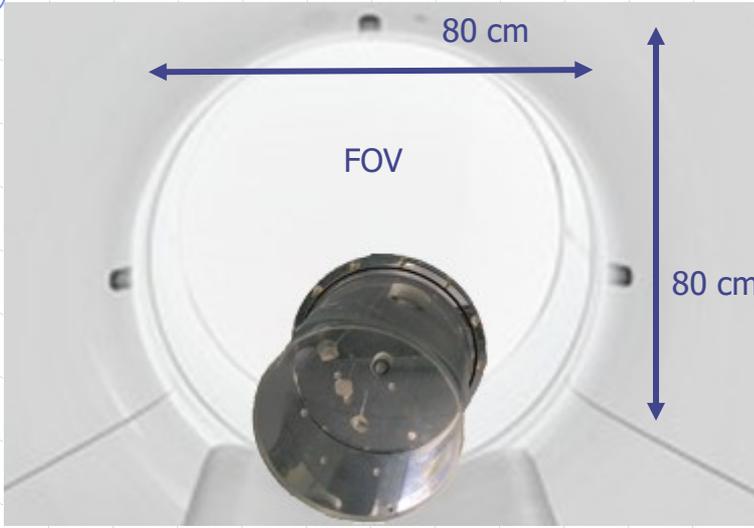
Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

3 Le paramétrage optimal en terme de résolution conduit à un choix de pixels de 2 mm au lieu de 4 mm.

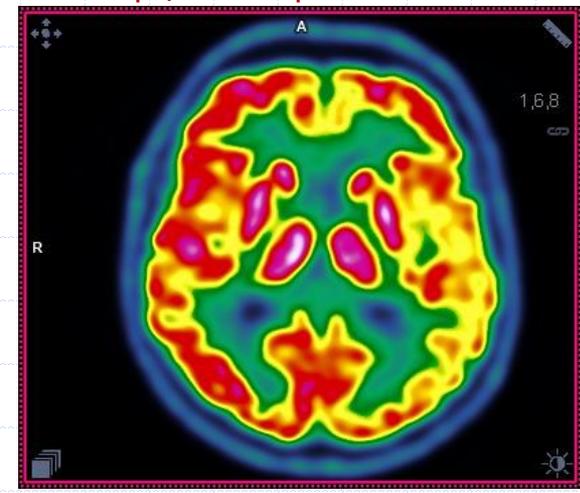
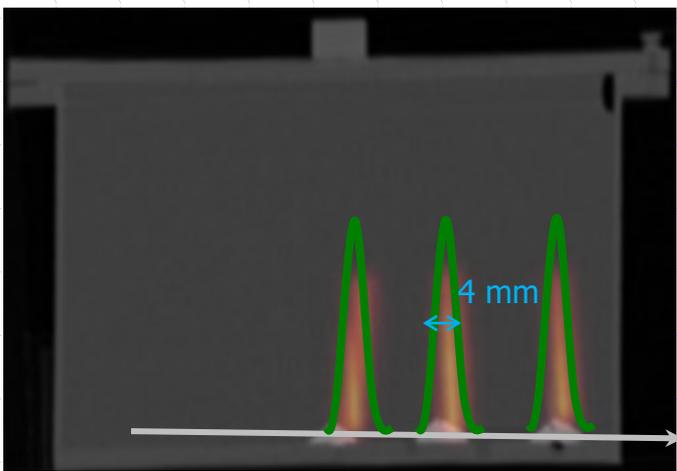
4 Le paramétrage optimal en terme de résolution conduit à des matrices 400x400

5 Le paramétrage optimal en terme de résolution peut conduire à une dégradation du rapport S/B par rapport à un échantillonnage qui dégraderait la résolution

Echantillonnage en pratique (1)



400 px/côté ⇔ pixels de **2 mm**



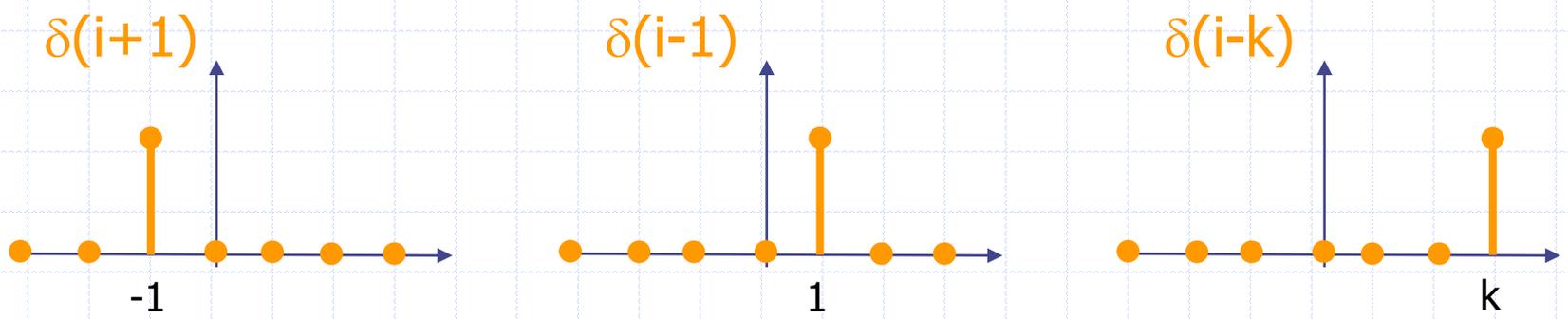
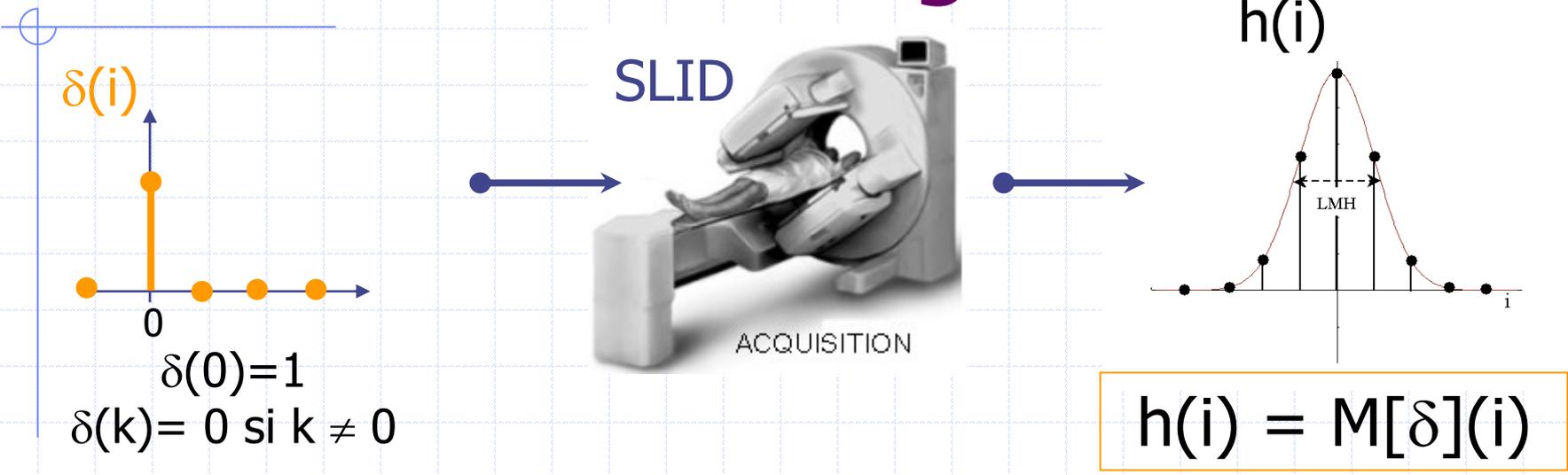
Préréglage du constructeur : 200 px de 4 mm/côté

Le préfiltrage du constructeur dégradait à 8 mm la résolution du TEP

REPONSE D'UNE γ -CAMERA

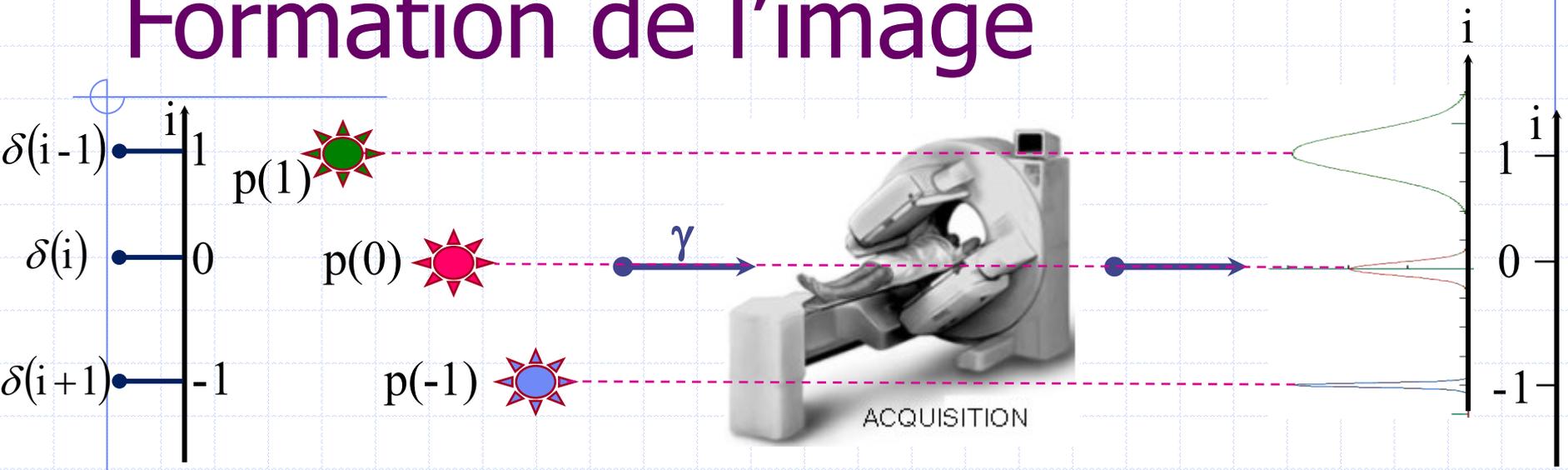
- Réponse d'une γ -caméra = Gaussienne
- LMH de la gaussienne =
 - Résolution
 - Pouvoir séparateur
 - La plus petite période de signal transmise
 - l'inverse de la fréquence spatiale maximale dans l'image
- **LMH linéaire avec distance**(source-collimateur)
- Shannon \Rightarrow **taille du pixel = LMH/2**

Formation de l'image



$\delta(i-k) = \text{impulsion centrée en } k$

Formation de l'image



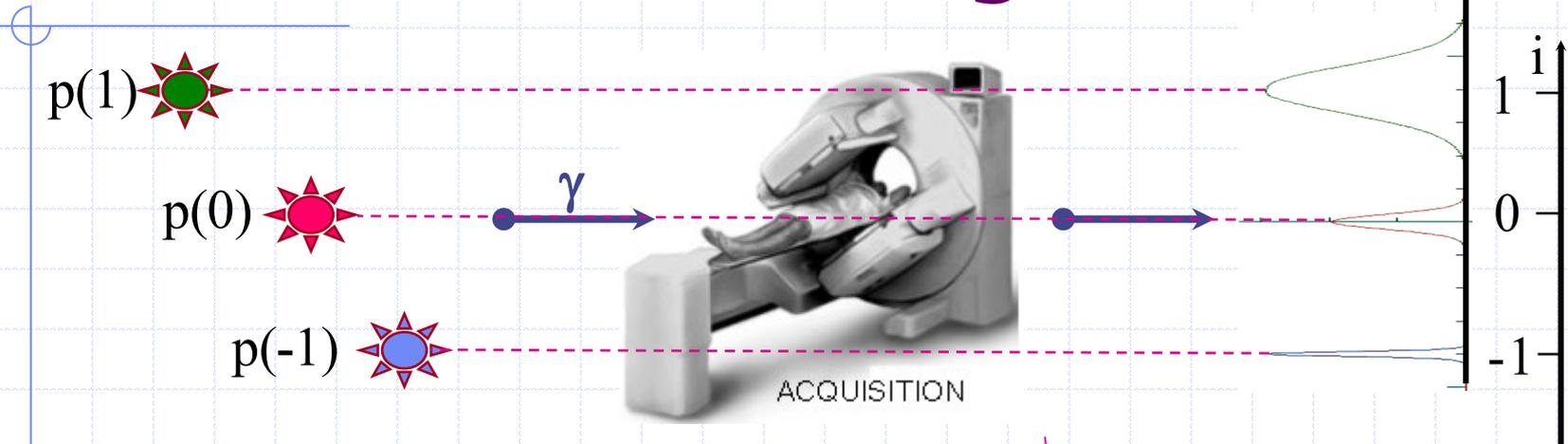
$$p(i) = p(-1)\delta(i+1) + p(0)\delta(i) + p(1)\delta(i-1)$$

exemple : $i = 1 \Rightarrow p(-1)\delta(2) + p(0)\delta(1) + p(1)\delta(0) = p(1)$

$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k), \quad i \text{ fixé}$$

= 0 sauf si $k=i$ où $\delta(0)=1$

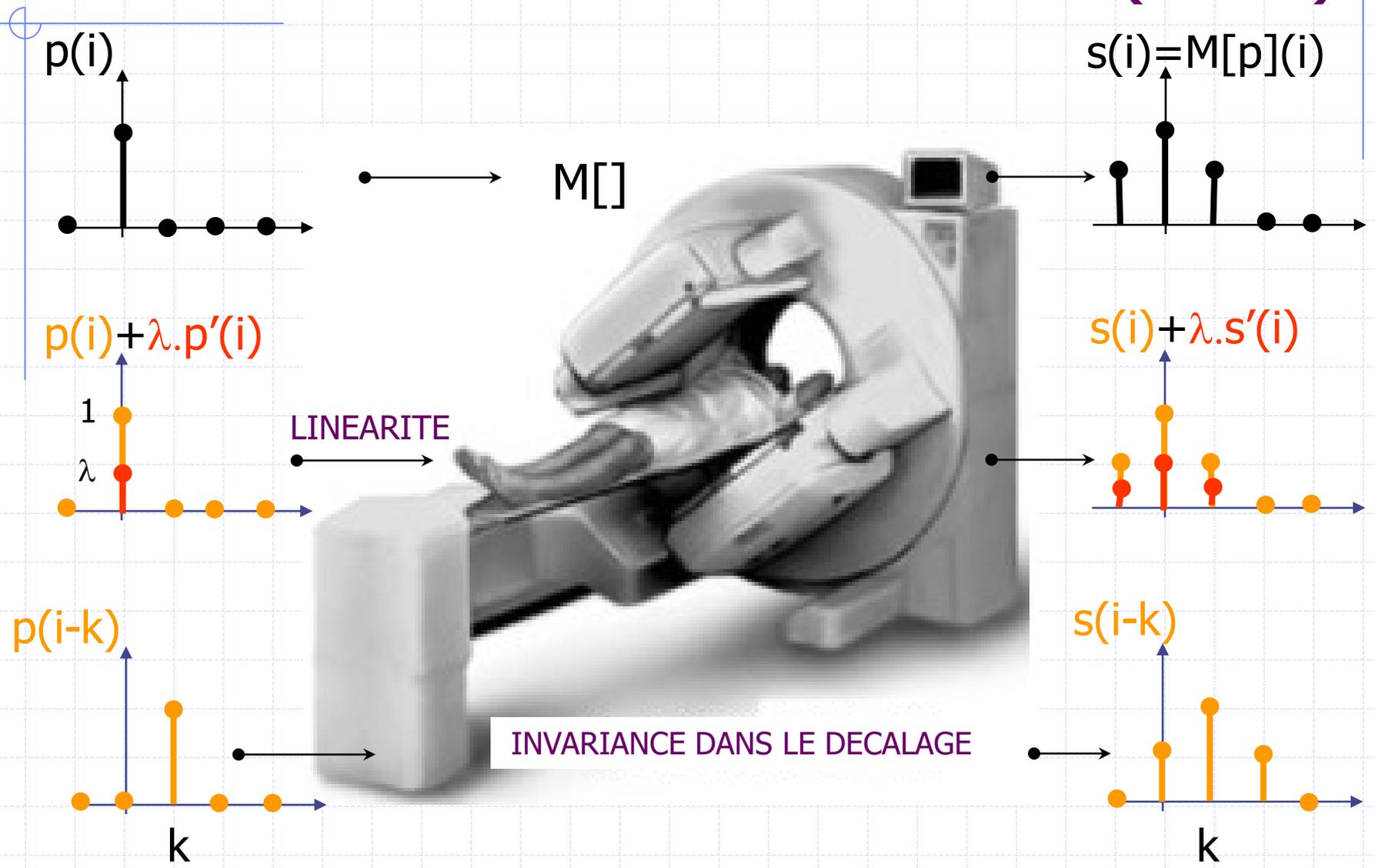
Formation de l'image



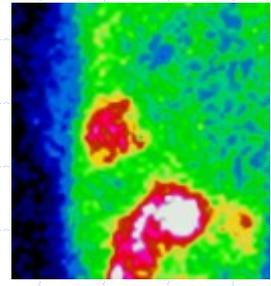
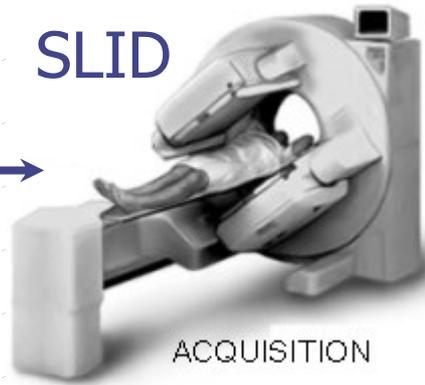
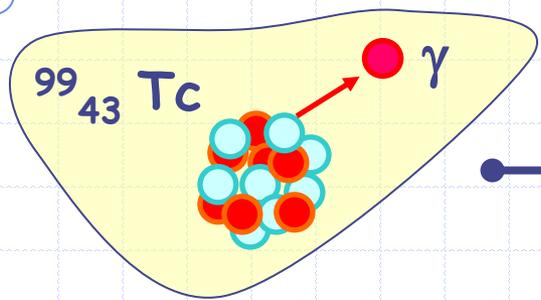
$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i-k), \quad i \text{ fixé} \quad \Rightarrow \quad s(i) = M[p](i) = ?$$

Pour déterminer s , il faut faire des hypothèses sur M , donc sur les caractéristiques de la γ -caméra...

Caméra \approx linéaire & invariante (SLID)



Formation de l'image



$$p(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i - k)$$

$$h(i) = M[\delta](i)$$

$$s(i) = M[p](i) = ?$$

$$s(i) = M\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot \delta(i - k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot M[\delta(i - k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot h(i - k)$$

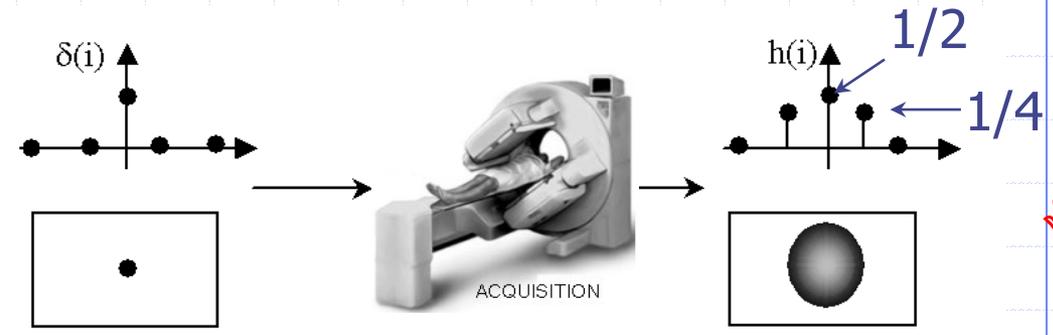
linéarité

invariance dans le décalage

$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(k) \cdot h(i - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot p(i - k) = (p * h)(i) = (h * p)(i)$$

* = produit de convolution

Interprétation

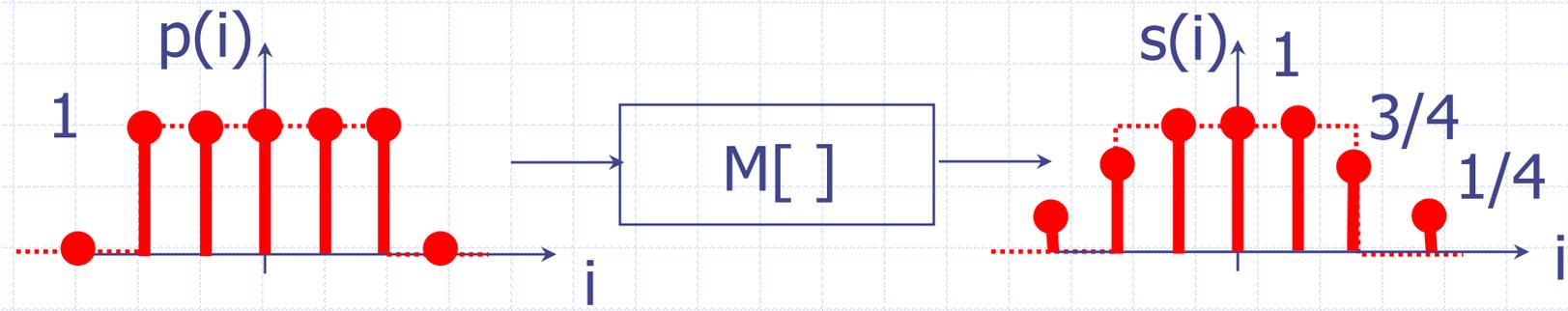


$$s(i) = \sum_{k=-1}^{+1} h(k).p(i-k)$$

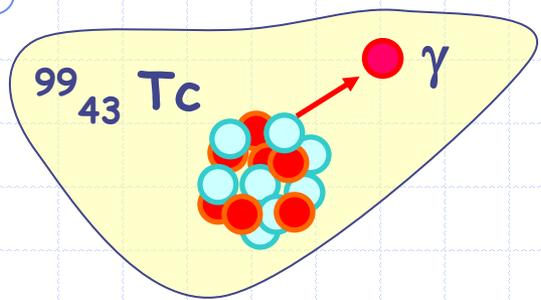
$$s(i) = h(-1).p(i+1) + h(0).p(i) + h(1).p(i-1)$$

$$s(i) = \frac{1}{4}p(i+1) + \frac{1}{2}p(i) + \frac{1}{4}p(i-1) = \frac{2.p(i) + p(i+1) + p(i-1)}{4}$$

s = moyenne pondérée par h de la grandeur physique p



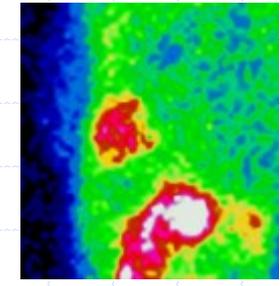
Formation de l'image



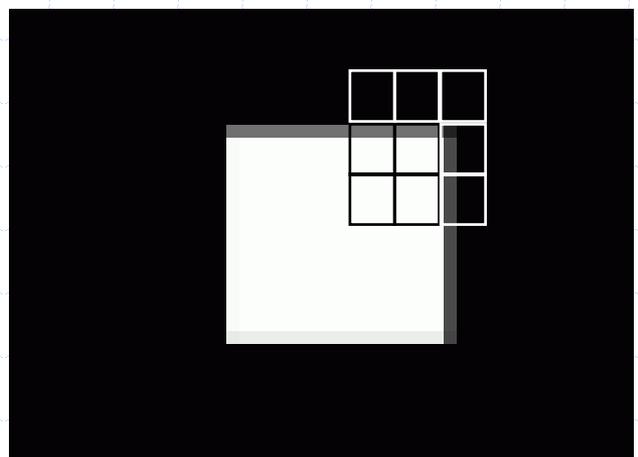
$p(i)$



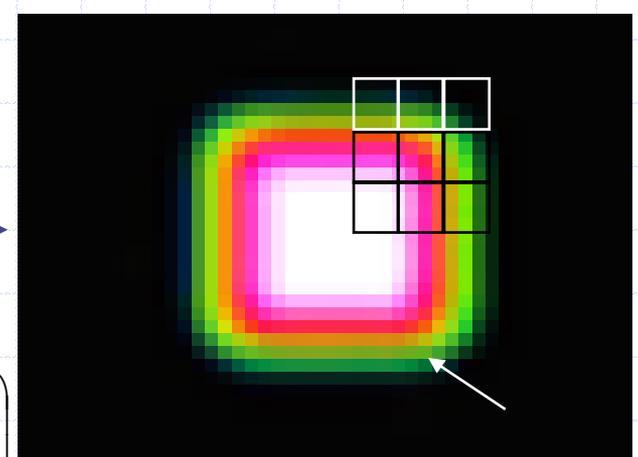
$\bullet \longrightarrow s(i)$



$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = (p * h)(i)$$



$$h(i, j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$





Exemple de formation d'image



$$h(i, j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$



?
⇒

A. $S(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

B. $S(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 12 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

C. $S(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.1 & 1.1 & 0.1 \\ 1.1 & 3.1 & 11.4 & 2.8 & 1.3 \\ 1.3 & 11.1 & 11.8 & 11.7 & 2.0 \\ 0.8 & 2.6 & 11.3 & 5.3 & 11.2 \\ 0.2 & 0.9 & 2.3 & 10.9 & 9.7 \end{pmatrix}$

OBJET

IMAGE



[D33] Quelle est l'image de l'objet radioactif $P(i,j)$ par une gamma-caméra de réponse impulsionnelle $h(i,j)$?

$$P(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$h(i,j) = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/16 & 1/16 \\ 1/16 & 1/2 & 1/16 \\ 1/16 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

1

A. $S(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

Image A

2

B. $S(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 12 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

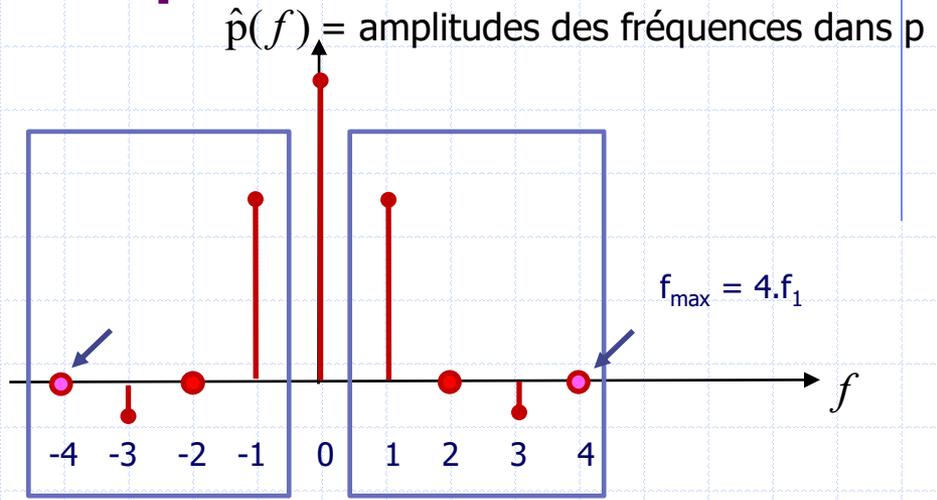
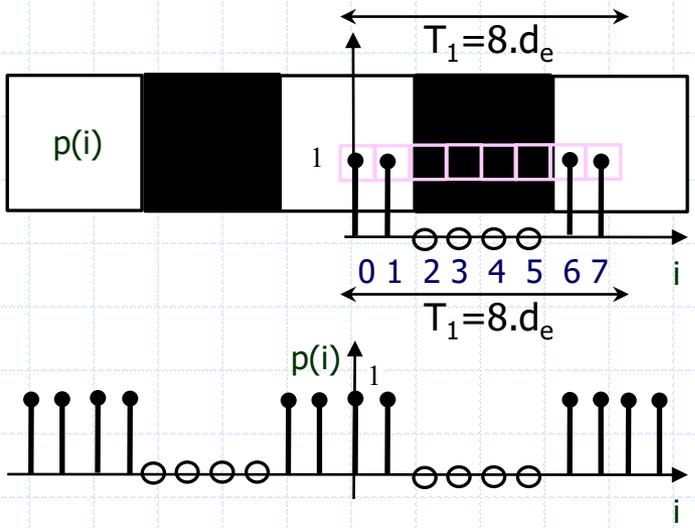
Image B

3

C. $S(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.1 & 1.1 & 0.1 \\ 1.1 & 3.1 & 11.4 & 2.8 & 1.3 \\ 1.3 & 11.1 & 11.8 & 11.7 & 2.0 \\ 0.8 & 2.6 & 11.3 & 5.3 & 11.2 \\ 0.2 & 0.9 & 2.3 & 10.9 & 9.7 \end{pmatrix}$

Image C

Interprétation en fréquence: TF

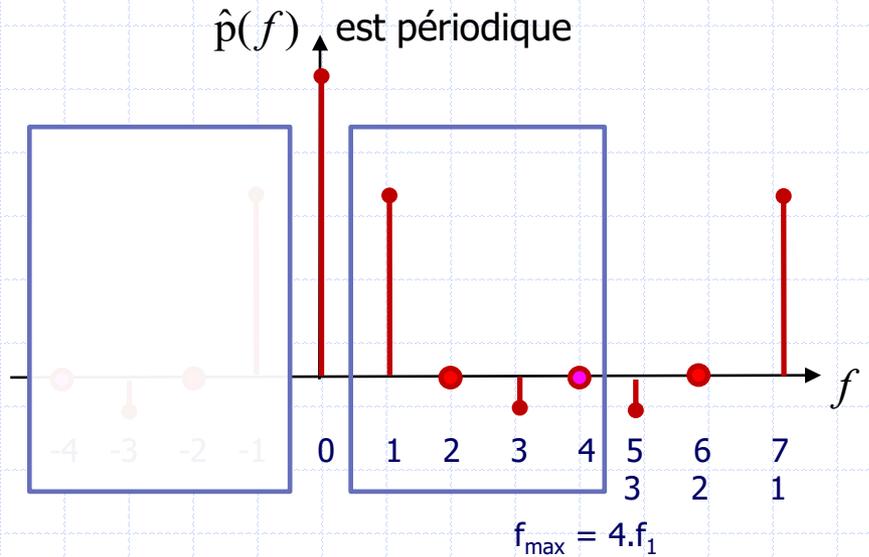


$p(i)$ de période T_1 , paire, échantillonnée sur $N = 8$ pixels de d_e mm

$$T_1 = 8 \cdot d_e \Rightarrow f_1 = \frac{1}{8} \cdot f_e$$

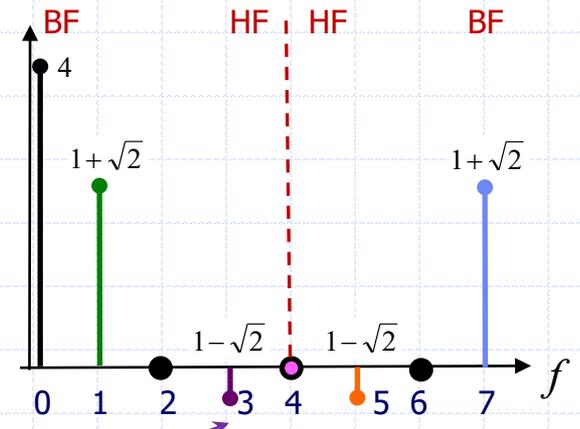
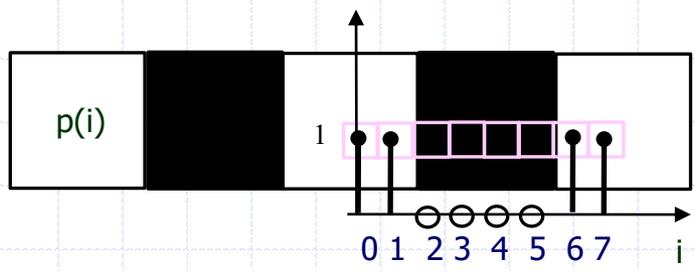
Shannon: $f_e = 2 \cdot f_{\max}$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{f_{\max}}{4} \Rightarrow f_{\max} = 4f_1 = \frac{N}{2} f_1$$



Interprétation en fréquence: TF

$$\hat{p}(f) = \sum_{i=0,1,6,7} \cos\left(f \cdot \frac{\pi}{4} \cdot i\right)$$



$$p(i) = \frac{1}{8} [4 + 2,4 \cos(\omega \cdot i) - 0,4 \cos(3\omega \cdot i) - 0,4 \cos(5\omega \cdot i) + 2,4 \cos(7\omega \cdot i)] = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} \hat{p}(f) \cdot \cos(f \cdot \omega \cdot i)$$

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{N} \quad (= \frac{\pi}{4} \text{ dans l'exemple})$$

si réelle, paire, échantillonné par N=8 points sur une période (si p impaire, remplacer cos par sin; cf. infra si p quelconque)

Le graphe représentant les amplitudes $\hat{p}(f)$ de chaque composante de fréquence f de p est appelé **spectre** (ou **transformée de Fourier**) de $p(i)$.

Les formules ci-contre permettent de les évaluer au moyen d'un calculateur électronique:

$$p(i) = \frac{1}{N} \sum_{f=0}^{N-1} \hat{p}(f) \cdot \cos(f \cdot \omega \cdot i)$$

$$\hat{p}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} p(i) \cdot \cos(f \cdot \omega \cdot i) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{N}$$

TF (transformée de Fourier) and TF-1 (inverse transformée de Fourier) are indicated by arrows.



Théorème de convolution

$$p(i) = \cos(f \cdot \omega \cdot i) \rightarrow \boxed{h(k)} \rightarrow s(i) = \sum_k h(k) \cdot p(i - k)$$

$$s(i) = \sum_k h(k) \cdot \cos[f\omega(i - k)] = \sum_k h(k) \cdot [\cos(f\omega \cdot i) \cos(f\omega \cdot k) + \sin(f\omega \cdot k) \sin(f\omega \cdot i)]$$

$$\Rightarrow s(i) = \sum_k h(k) \cdot [\cos(f\omega \cdot i) \cos(f\omega \cdot k)] + \sum_k h(k) \cdot [\sin(f\omega \cdot k) \sin(f\omega \cdot i)]$$

$$\Rightarrow s(i) = \cos(f\omega \cdot i) \cdot \sum_k h(k) \cdot \cos(f\omega \cdot k) + \sin(f\omega \cdot i) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot \sin(f\omega \cdot k)$$

pour la démonstration

$$\parallel \underbrace{\sum_k h(k) \cdot \cos(f\omega \cdot k)}_{\hat{h}(f)}$$

TF de h = MTF =
réponse en fréquence

= 0 car h est paire

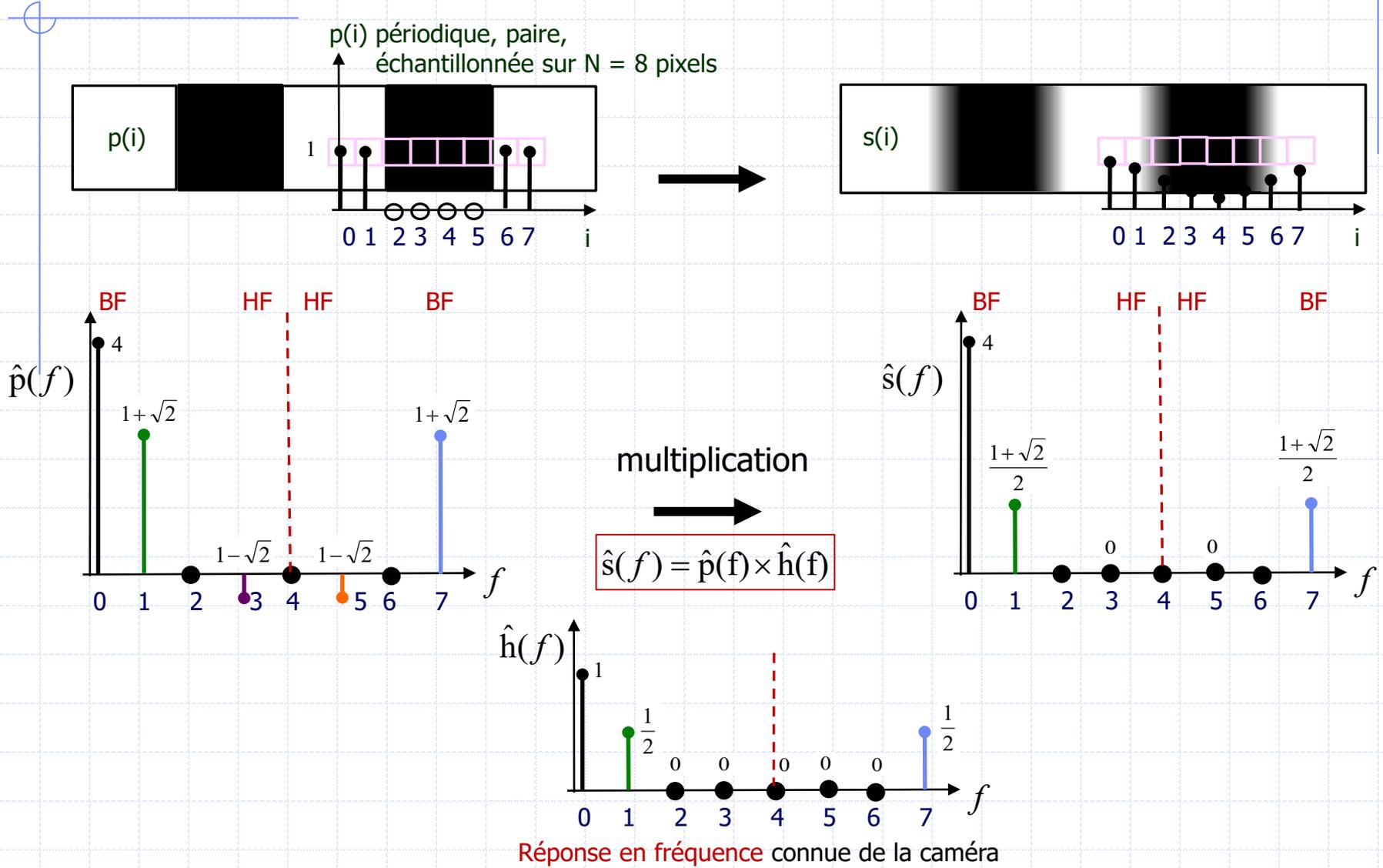
$$\forall k, h(k) \cdot \sin(f \cdot \omega \cdot k) + h(-k) \cdot \sin(-f \cdot \omega \cdot k) = h(k) \cdot \sin(f \cdot \omega \cdot k) - h(k) \cdot \sin(f \cdot \omega \cdot k) = 0$$

$$s(i) = p(i) \cdot \hat{h}(f)$$

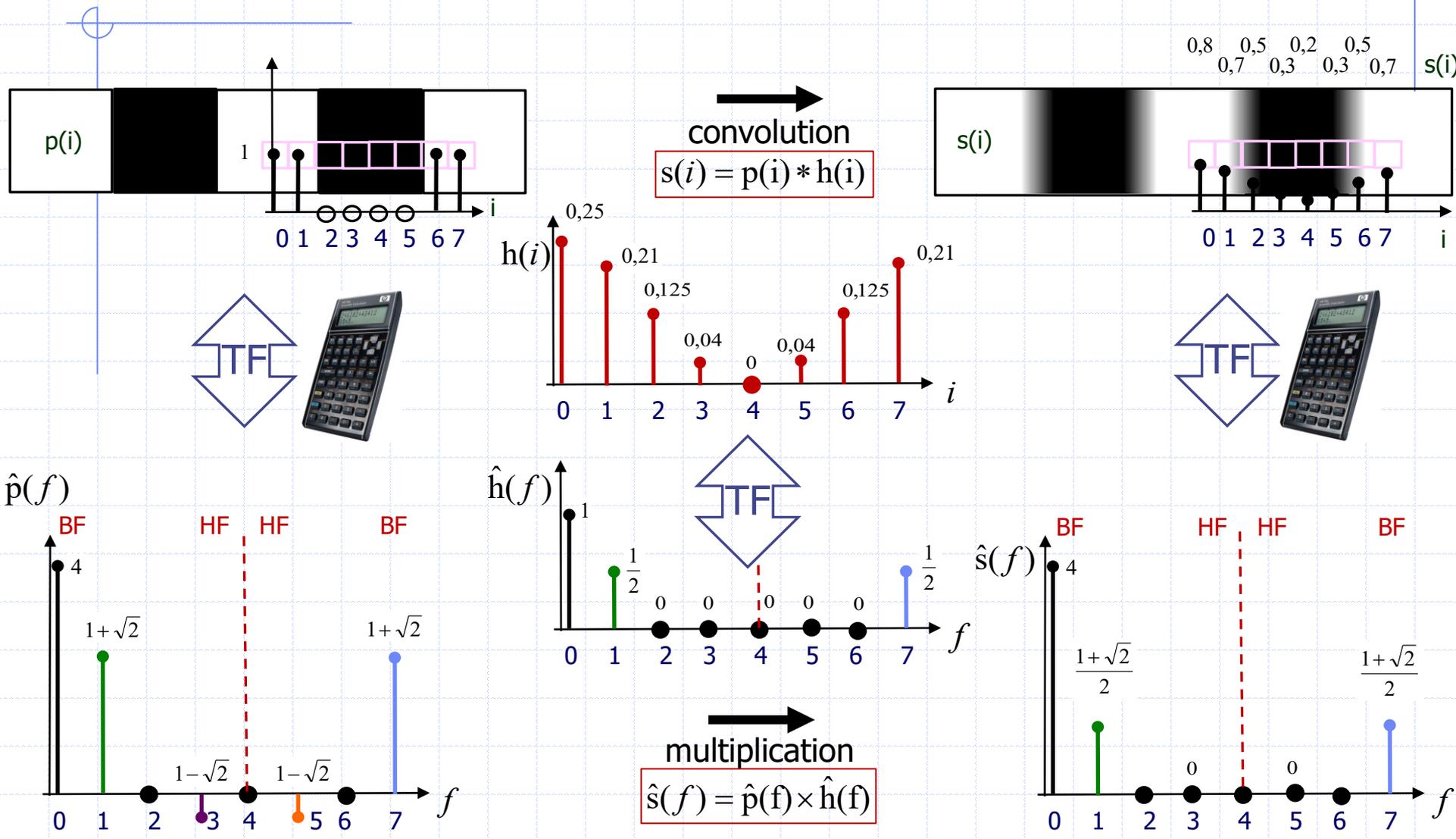
Un SLID agit sur l'harmonique f en l'amplifiant par la **réponse en fréquence** en f, $\hat{h}(f)$ (MTF = Modulation Transfer Function)



Calcul des fréquences de l'image



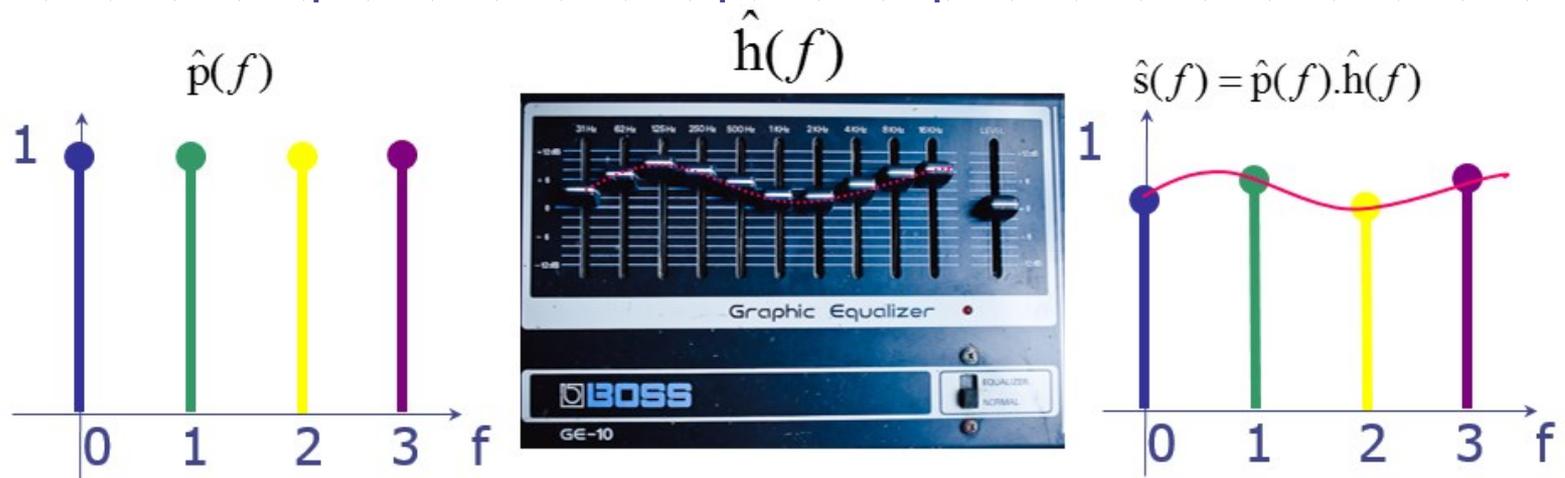
Les enseignements de l'exercice: 🙌🙌🙌





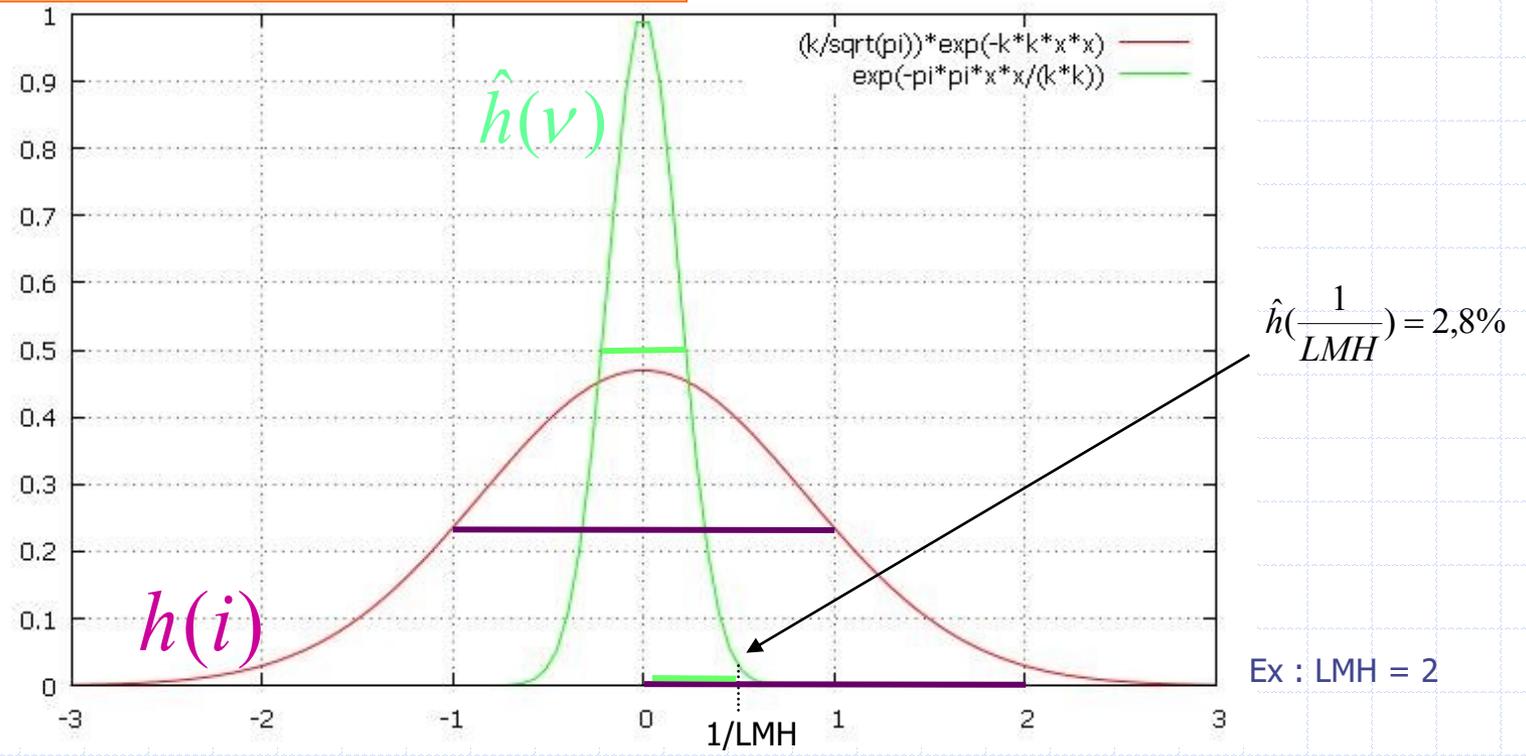
Autrement dit ...

- un pixel d'image contient la moyenne pondérée des signaux objets (distribution de radioactivité) au voisinage de ce pixel. Les coefficients de pondération sont donnés par les valeurs de la réponse impulsionnelle.
- Par rapport à l'objet, une image présente une atténuation des hautes fréquences spatiales, donc un lissage des bords, une diminution de contraste et un effet de volume partiel. Les coefficients d'atténuation sont donnés par la TF de la réponse impulsionnelle.



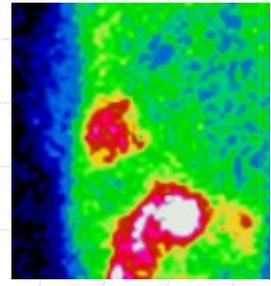
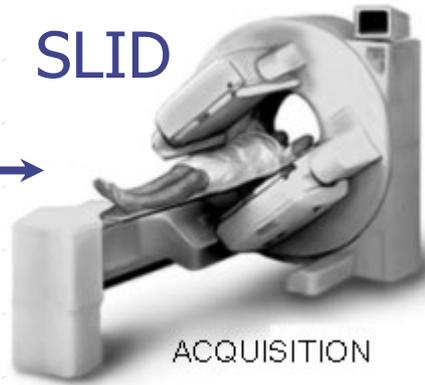
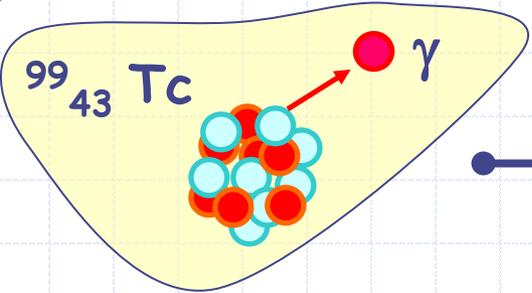
TF d'une gaussienne

$$h(i) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-(C \cdot i)^2} \Leftrightarrow \hat{h}(v) = e^{-\left(\frac{\pi \cdot v}{C}\right)^2} \quad C = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$

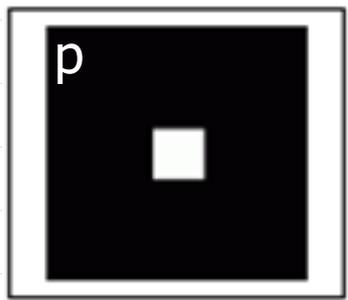


La TF d'une réponse impulsionnelle gaussienne σ est une gaussienne σ' avec $\sigma\sigma' = 1/(2\pi)$ soit $LMH \cdot LMH' = 4 \cdot \ln 2 / \pi = 0.9 \approx 1$

Application à des images



$s(i)$

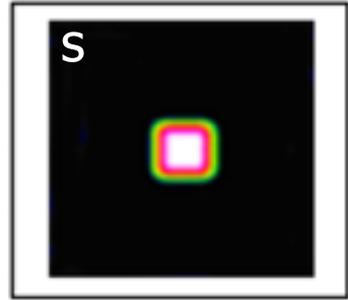


$p(i)$



$$s(i) = (p * h)(i)$$

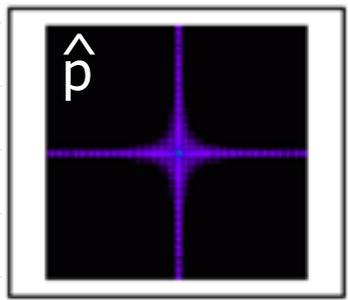
$$= \sum_k h(k) \cdot p(i-k)$$



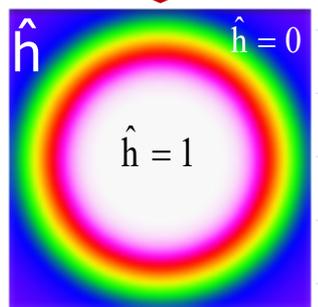
TF

TF

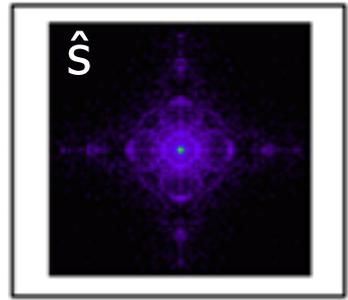
TF⁻¹



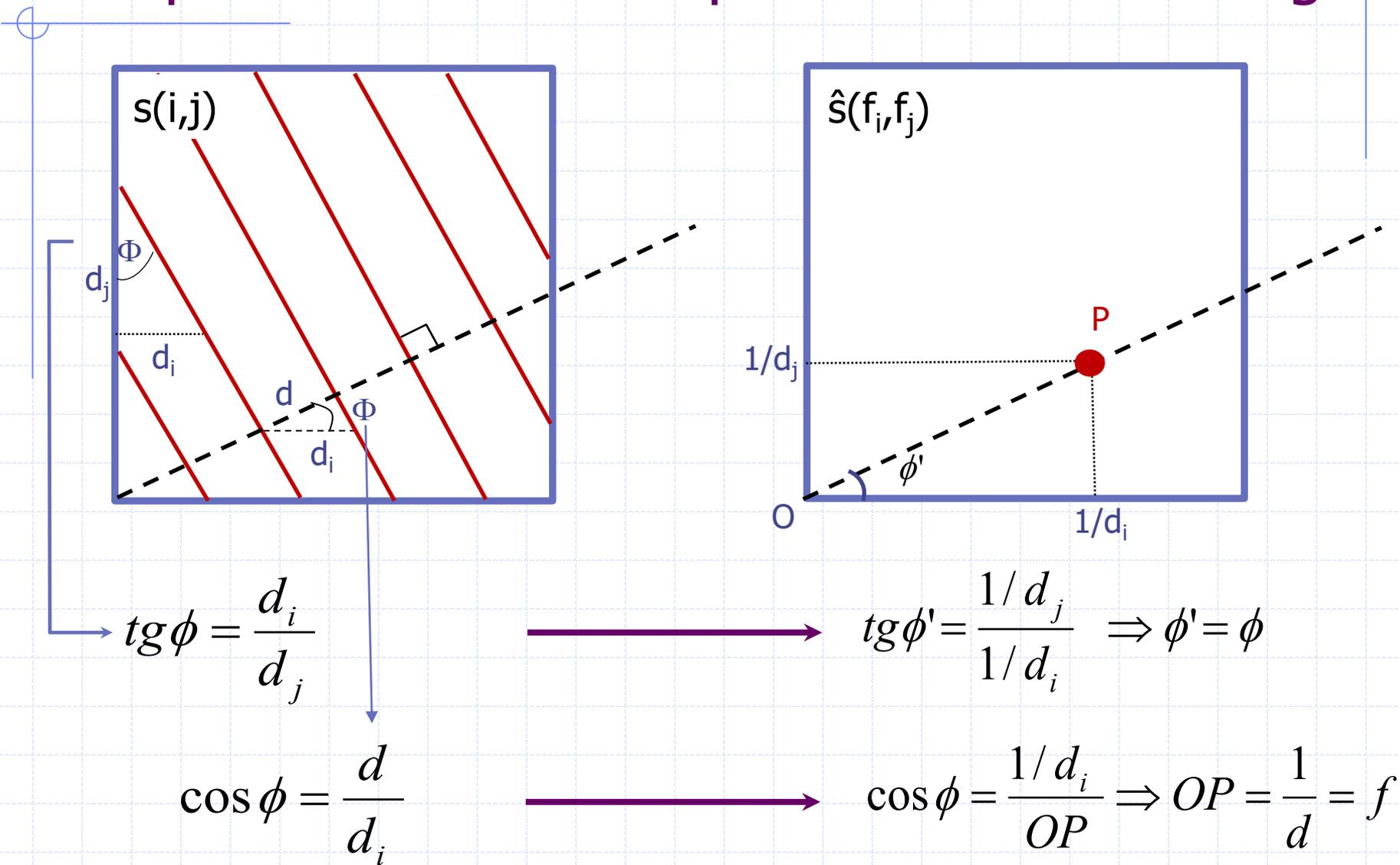
$\hat{p}(f)$



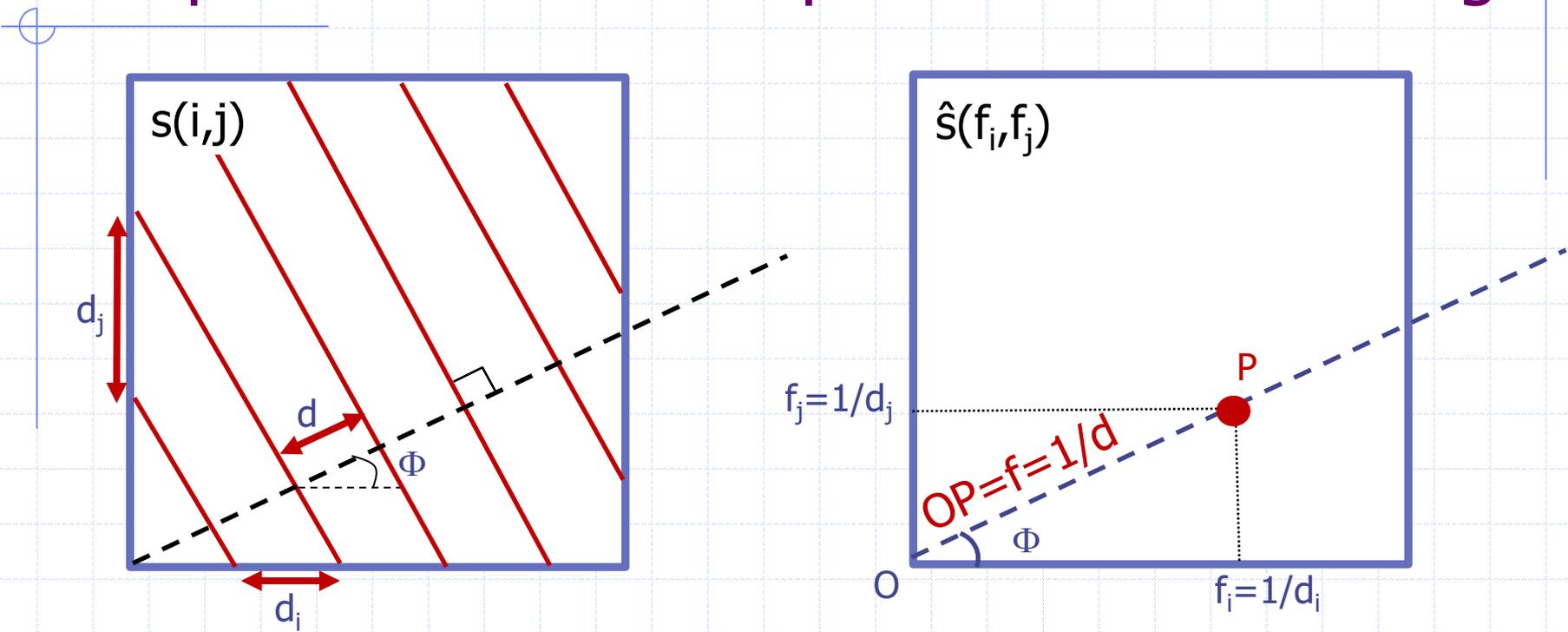
$$\hat{s}(f) = \hat{p}(f) \times \hat{h}(f)$$



Interprétation d'une fréquence dans une image



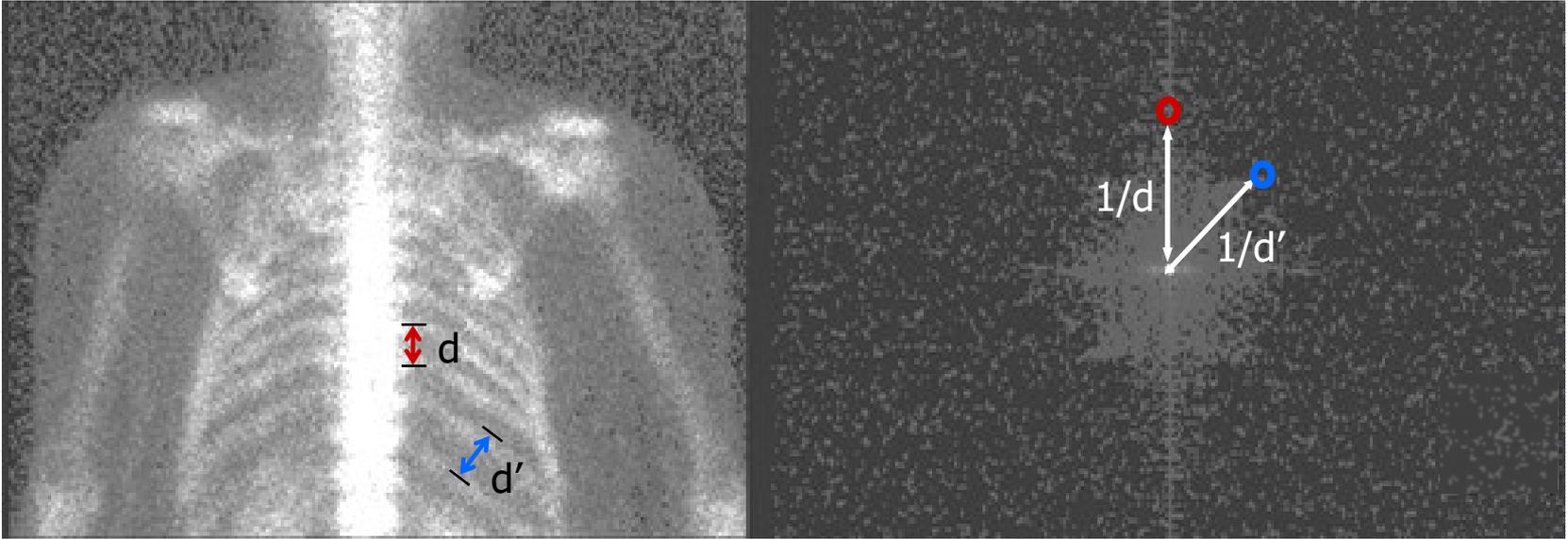
Interprétation d'une fréquence dans une image



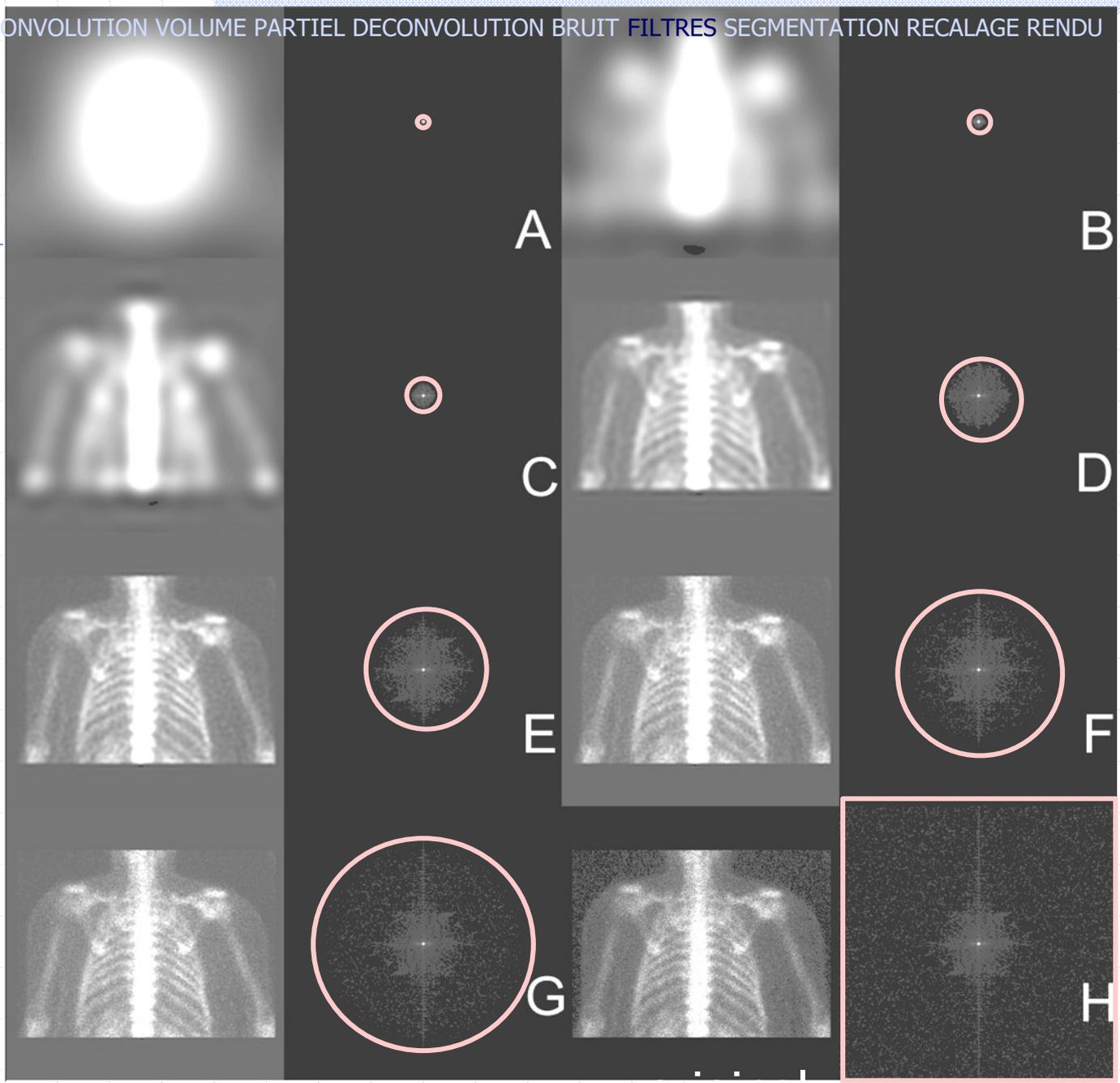
Un motif de période d incliné d'un angle Φ par rapport à l'axe (O,i) est représenté dans le domaine des fréquences par un seul point P distant de $1/d$ de l'origine sur une droite inclinée de Φ par rapport à l'axe (O,i) .

donc en représentation en fréquence...

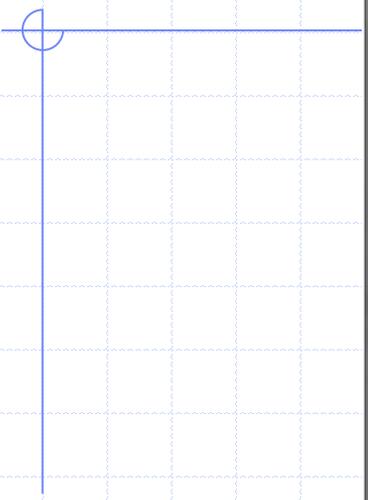
Les signaux constitués de **droites parallèles** espacées de d (arcs post. des côtes) sont représentées dans l'espace de Fourier par **un seul point** localisé sur la droite perpendiculaire aux signaux (axe vertical donc) et à la distance $1/d$ de l'origine



Arcs postérieurs des côtes
Arcs moyens des côtes à 45%



De A à H, l'image est reconstruite en prenant en compte de plus en plus de fréquences.



FORMATION D'UNE IMAGE

- **Convolution** du signal acquis par la réponse impulsionnelle de la γ -caméra
 - **Moyenne pondérée** dans un voisinage du signal RA par les amplitudes de la réponse impulsionnelle (gaussienne)
 - Agit en **lissant** les contours des parties du signal RA acquis

|||

- **Multiplication** du spectre du signal acquis par la réponse en fréquence gaussienne de la γ -caméra
 - Amplification des amplitudes des composantes fréquentielles du signal par les amplitudes de la réponse en fréquence (gaussienne)
 - Agit en diminuant l'influence des HF

Cq1: Résolution et distance

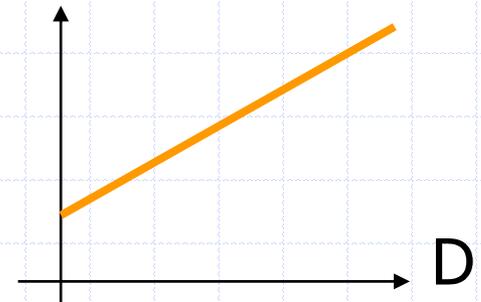


s = moyenne pondérée par h de la grandeur physique p

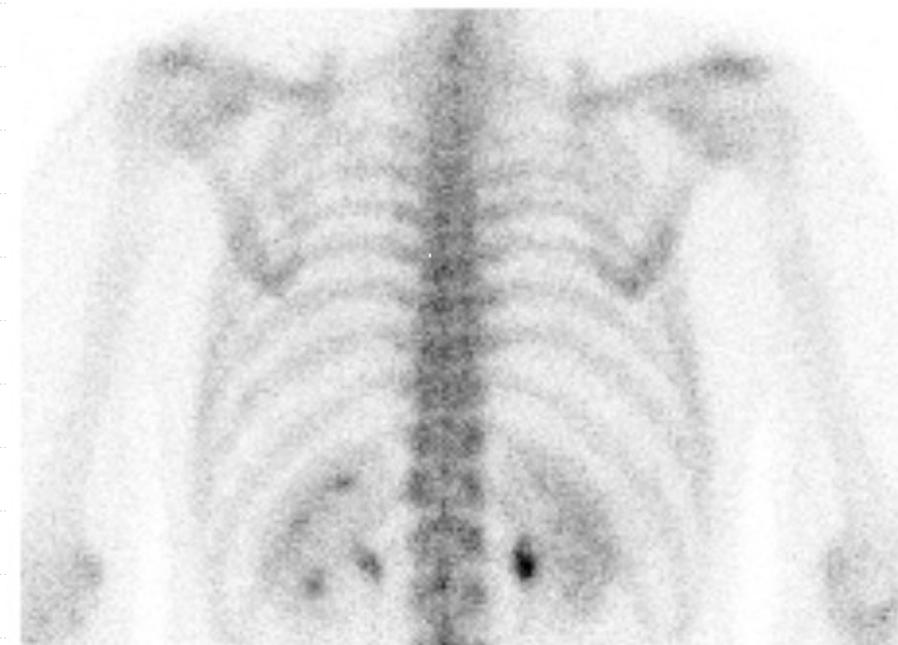
- plus le détecteur est **proche** du patient...
- plus la réponse impulsionnelle est **étroite**
- ...et plus l'image est **fidèle** à l'objet !

- Sinon : lissage = **flou** !

$$\sigma = k.D + k'$$



Cq1: Résolution et distance



FP
AU CONTACT

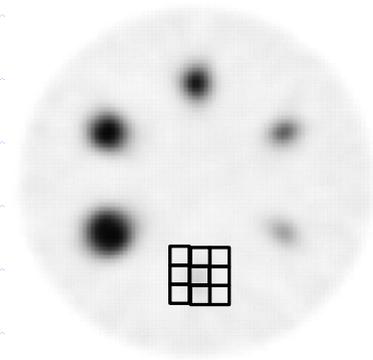
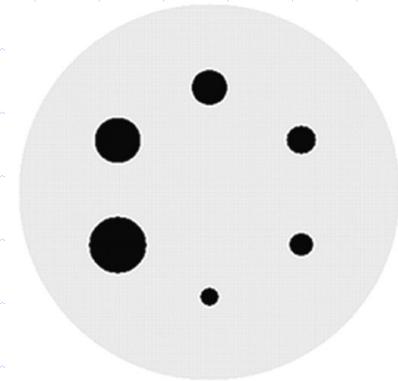
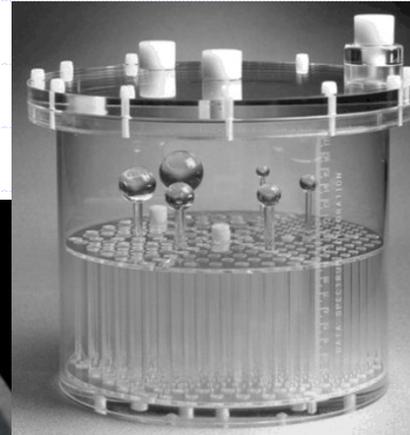
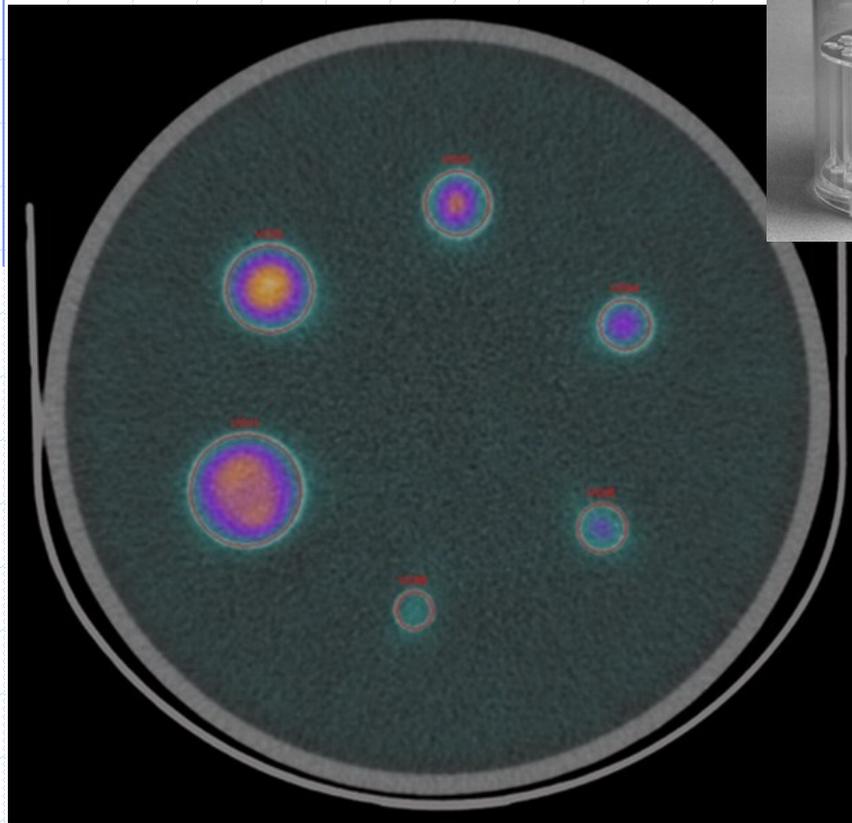
DT



FPOST
A 50CM

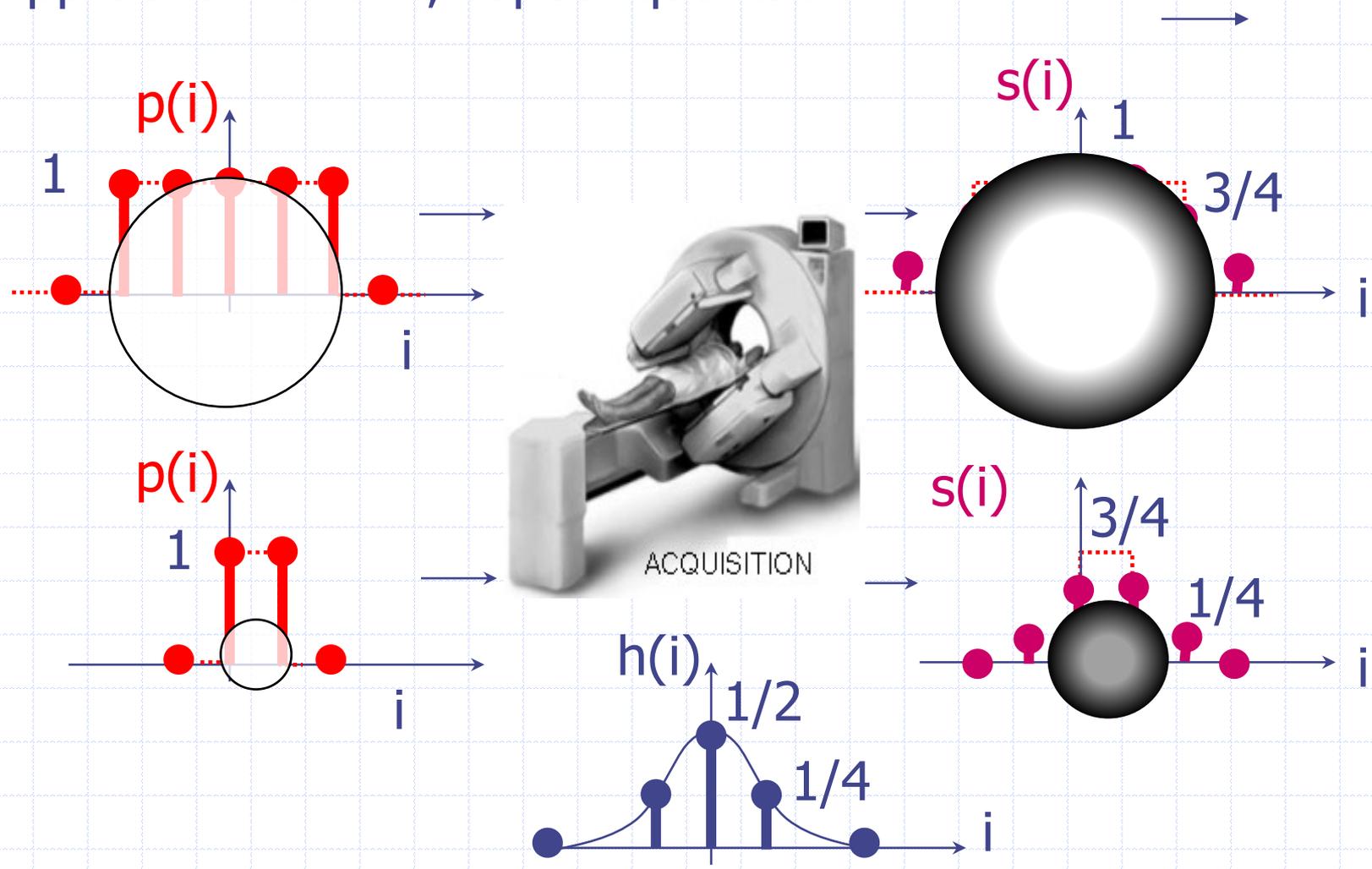
DT

Cq2: « Effet de volume partiel » »



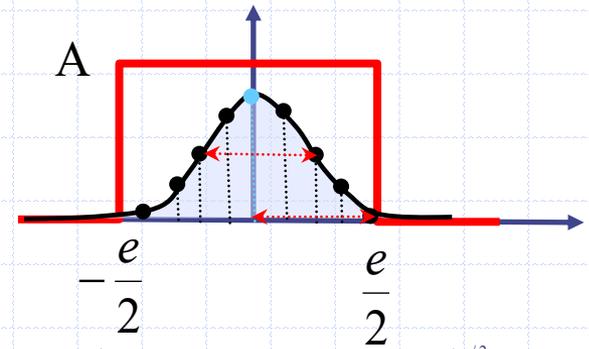
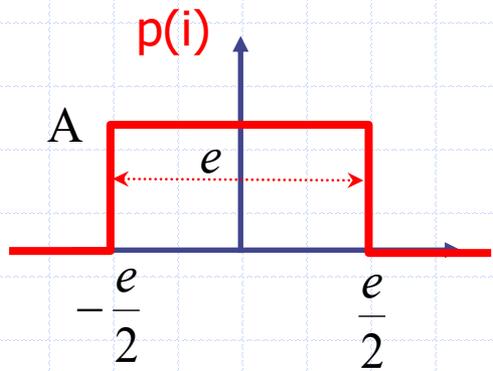
Cq2: « Effet de volume partiel »

Approche intuitive, aspect qualitatif :



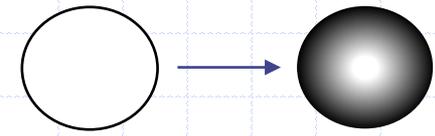
Cq2: « Effet de volume partiel »

Approche intuitive, si $e/2 > LMH$:

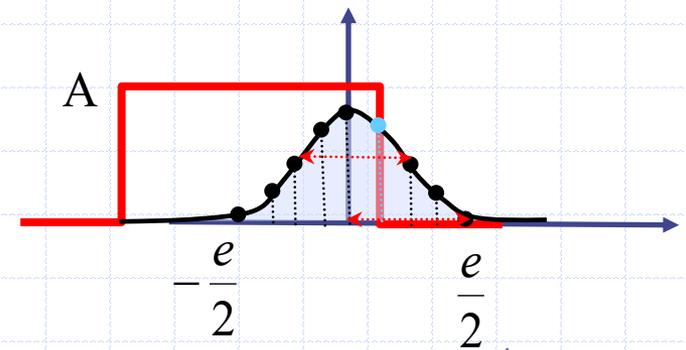
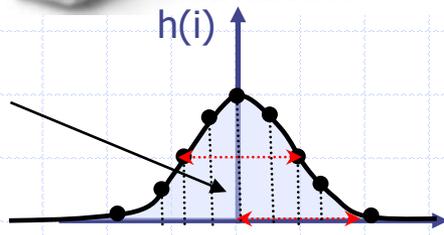


$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(0-k) = A. \sum_{k=-e/2}^{+e/2} h(k) \approx A$$

Le centre de l'image est transmis si $e > 2.LMH$



Surface = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2.i^2} = 1$
 $C = \frac{2.\sqrt{\ln 2}}{LMH}$



$$s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(i-k) = A. \sum_{k=-e/2}^1 h(k) < A$$

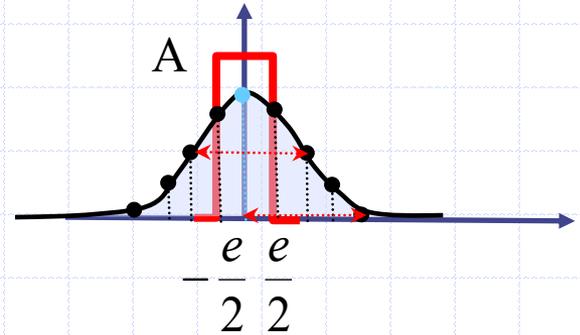
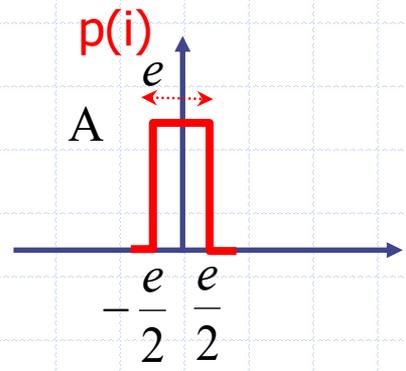
Les bords de l'image sont sous-estimés

98% de l'intégrale d'une gaussienne se trouve entre $\pm LMH$:

$$\sum_{k=-LMH}^{LMH} h(k) \approx 1$$

Cq2: « Effet de volume partiel »

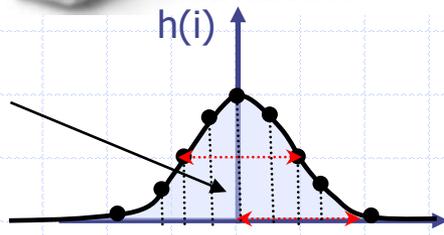
Approche intuitive, si $e/2 < LMH$:



$$s(i=0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k).p(0-k) = A. \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k) < A$$



$$\text{Surface} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2.i^2} = 1$$



(Même) le centre de l'image est sous-estimé par un facteur CR :

$$CR = \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k)$$

$CR < 1$ si $e < 2.LMH$

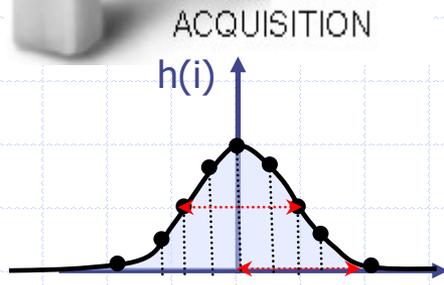
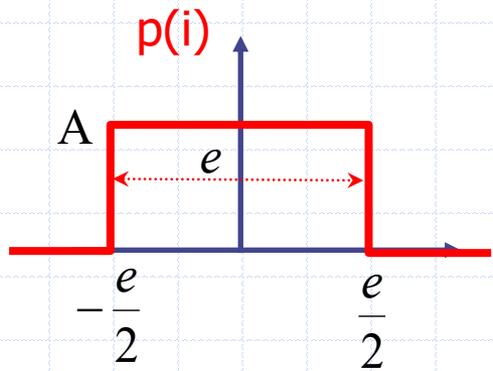
$CR \approx 1$ si $e \geq 2.LMH$

Cq2: « Effet de volume partiel »

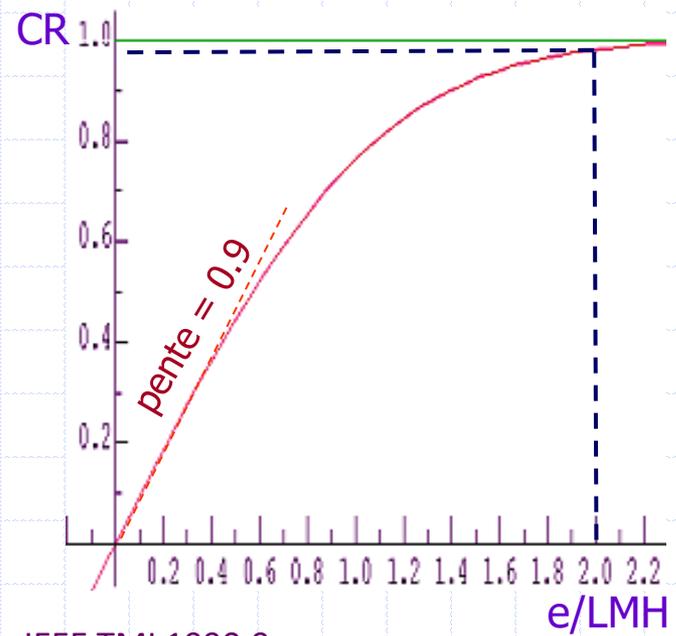


Généralisation :

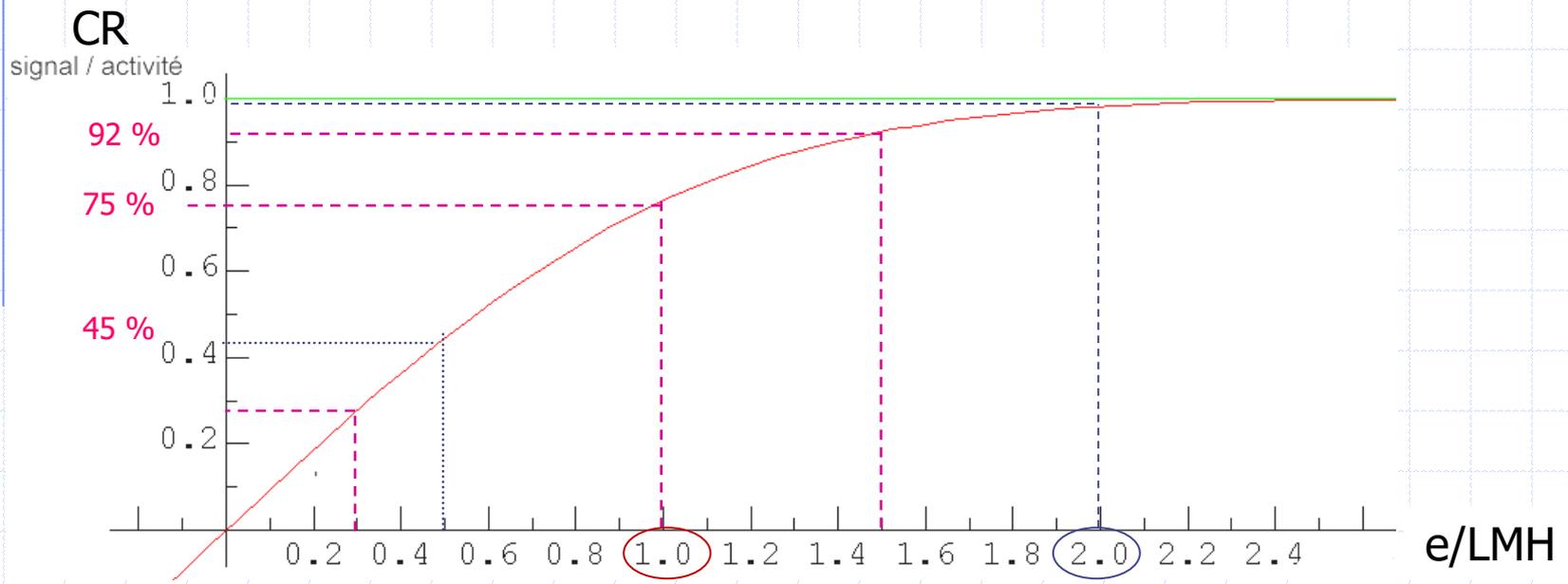
$s(0)$ est le produit du signal A par un Coefficient de Restauration CR:



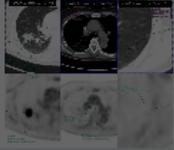
$$CR(e) = \sum_{k=-e/2}^{e/2} h(k)$$



Cq2: Coefficient de Recouvrement



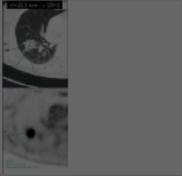
TEP	1	2	4	6	8	(mm)
CZT		3	6	9	12	(mm)
SPECT Anger		7	15	22	30	(mm)
Vraie fixation		2,2	1,3	1,1	1	(x signal)



[D54] Sur ces coupes pulmonaires acquises au FDG avec un TEP de 4 mm de FWHM,



1



Le SUVmax du nodule de 25.3 mm est correctement estimé (par le logiciel) à 12,2

2

Le SUV du nodule de 25.3 mm est correctement estimé pour tous les voxels du volume d'intérêt.

3

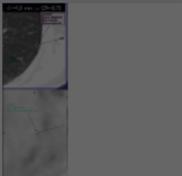


Le SUVmax du ganglion de 6,4 mm est correctement estimé par le logiciel à 2.95

4

Le SUVmax du ganglion de 6,4 mm est de 3,2

5



Le SUVmax du nodule de 4,5 mm est le quart de celui de 6,4 mm

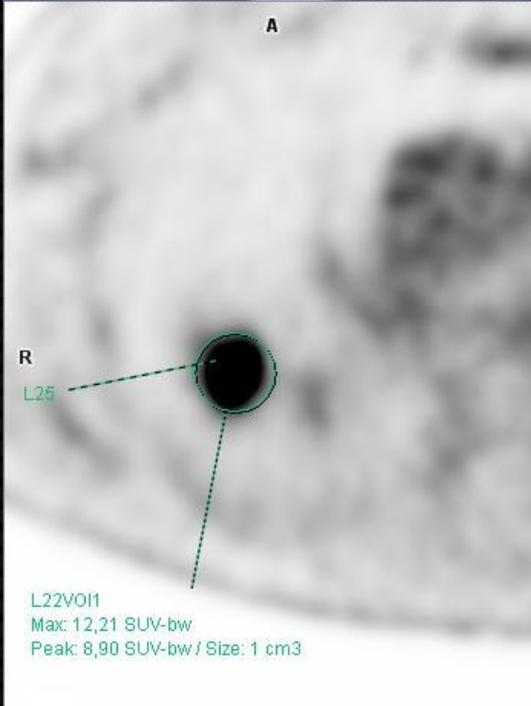


Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

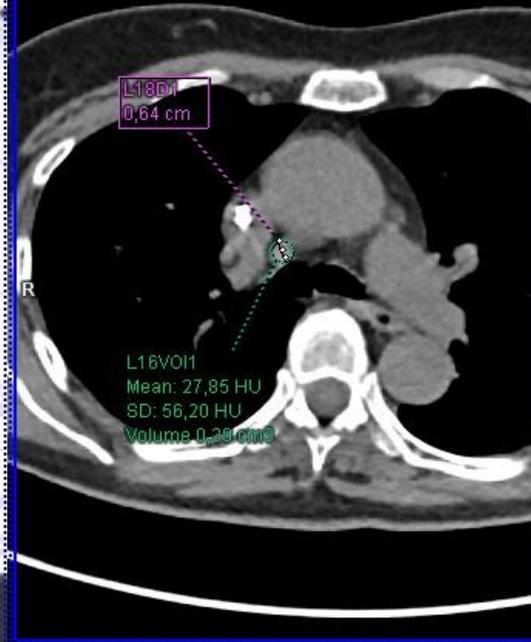
$\varnothing=25.3 \text{ mm} \Rightarrow \text{CR}=1$



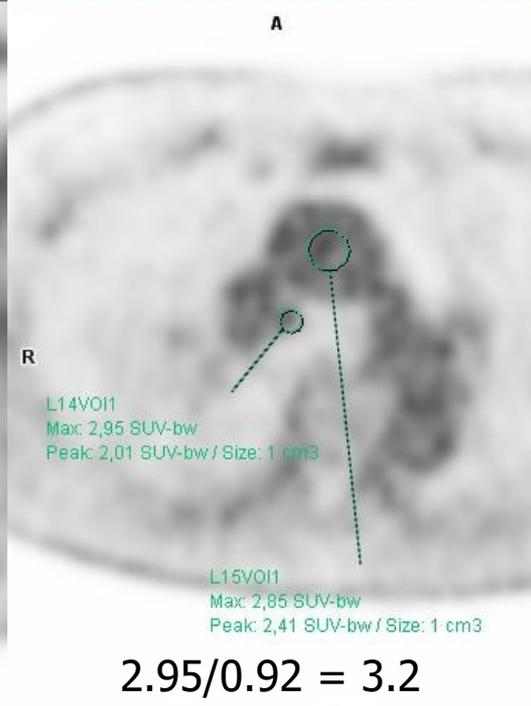
A



$\varnothing=6.4 \text{ mm} \Rightarrow \text{CR}=0.92$

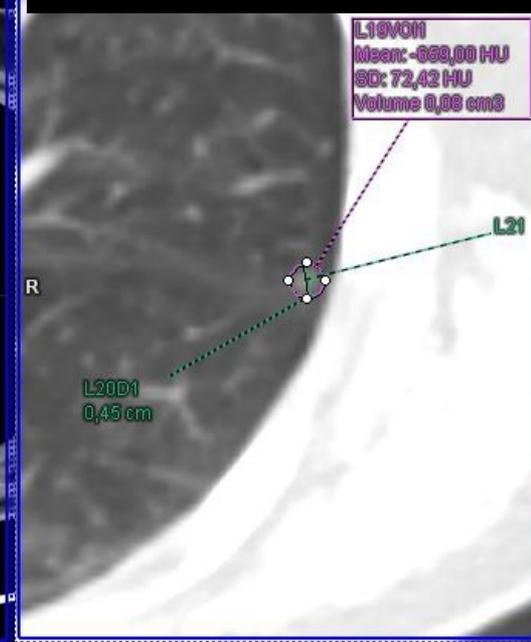


A

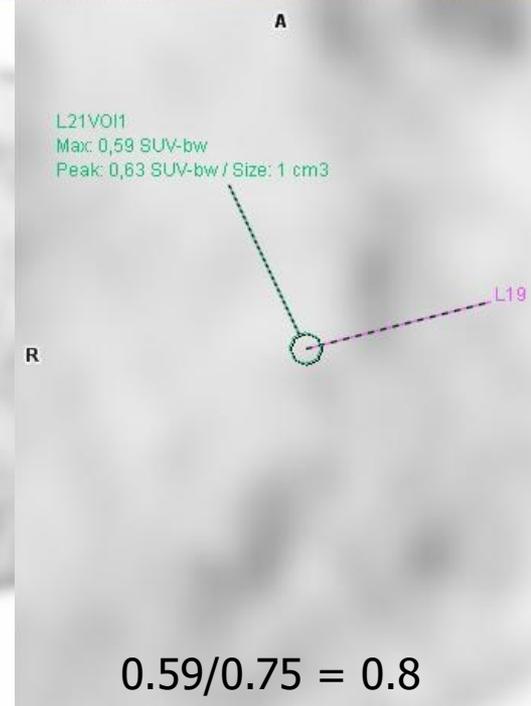


$2.95/0.92 = 3.2$

$\varnothing=4.5 \text{ mm} \Rightarrow \text{CR}=0.75$



A



$0.59/0.75 = 0.8$



Cq2: « Effet de volume partiel »

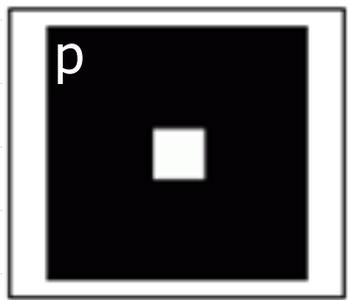
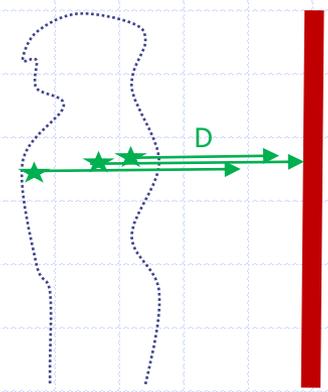
- **Activité sous-estimée si $e < 2.LMH$**
 - 75 % de l'activité est mesurée si $e = LMH$ (donc x 1,3)
 - 45 % de l'activité est mesurée si $e = LMH/2$ (donc x 2,2)
 - Approximation linéaire possible si $e < LMH$
 - Rappel : $LMH \approx 4-6$ mm en PET-CZT et 15 mm en SPECT
- **Rien à voir avec le théorème d'échantillonnage !**
 - échantillonnage sans perte \Rightarrow dimension du pixel $d \leq LMH/2$
- **Artefact exploitable**
 - mouvements $<$ résolution (cf. épaissement systolique)
- Pour limiter cet artefact : **déconvolution**

Cq3: Déconvolution, pour...

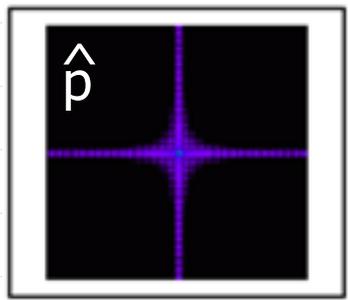
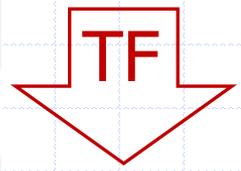
- corriger l'EVP en améliorant la résolution
 - Via un coef. de restauration = activité mesurée/vraie
 - Niveau pixel(s) ou ROI(s), dans les coupes ou les projections
 - Par déconvolution (filtres de Metz, Wiener)
 - ♦ en 2D ou après reconstruction, sous hypothèse d'invariance
 - ♦ En 3D, dans l'espace des projections, en prenant en compte la distance au collimateur (principe fréquence-distance)
 - Par modélisation de la PSF dans l'opérateur de Radon (projection/rétroprojection)
- corriger les artefacts de dilution & recirculation d'un bolus

Cq3: Déconvolution (planaire)

Dans une image de projection, la distance entre la source et le détecteur où se forme l'image est inconnue. On néglige donc la dépendance en D de la réponse impulsionnelle.



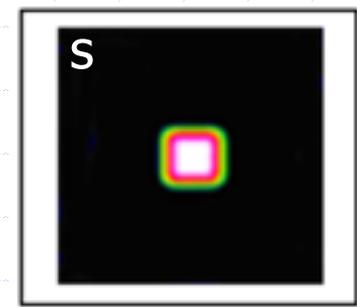
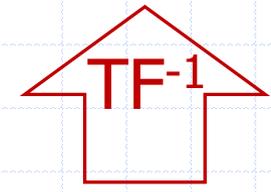
$$p(i)$$



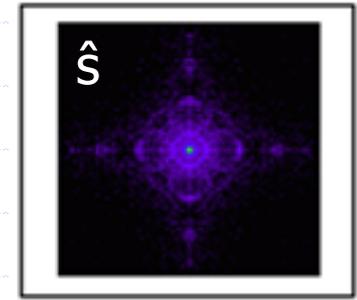
$$\hat{p}(f)$$



$$s(i) = (p * h)(i)$$



$$\hat{s}(f) = \hat{p}(f) \times \hat{h}(f)$$

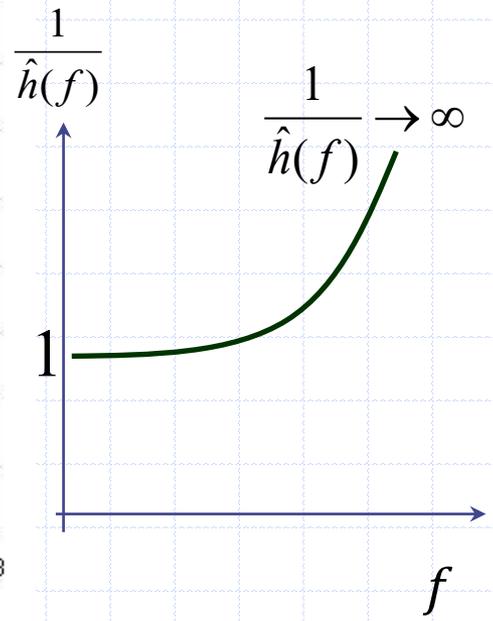
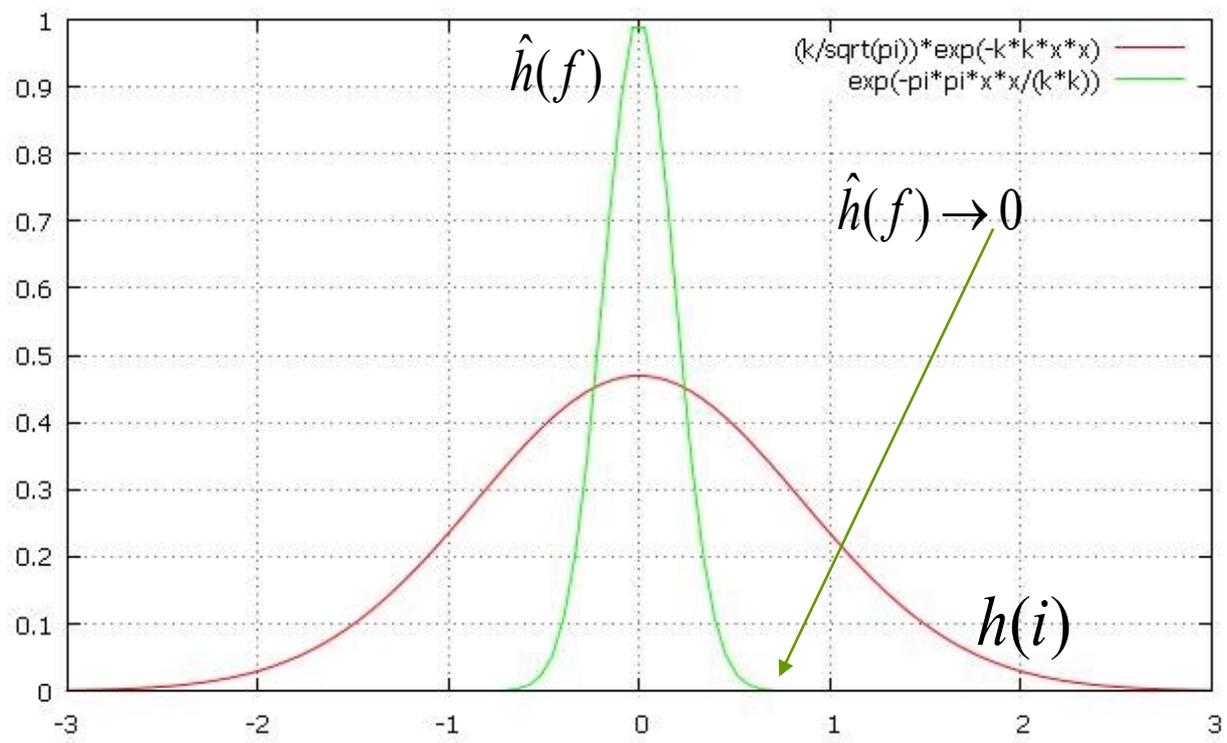


$$\hat{s}$$

TF d'une gaussienne

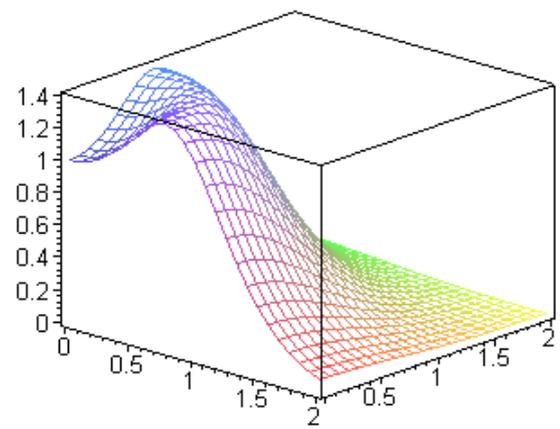
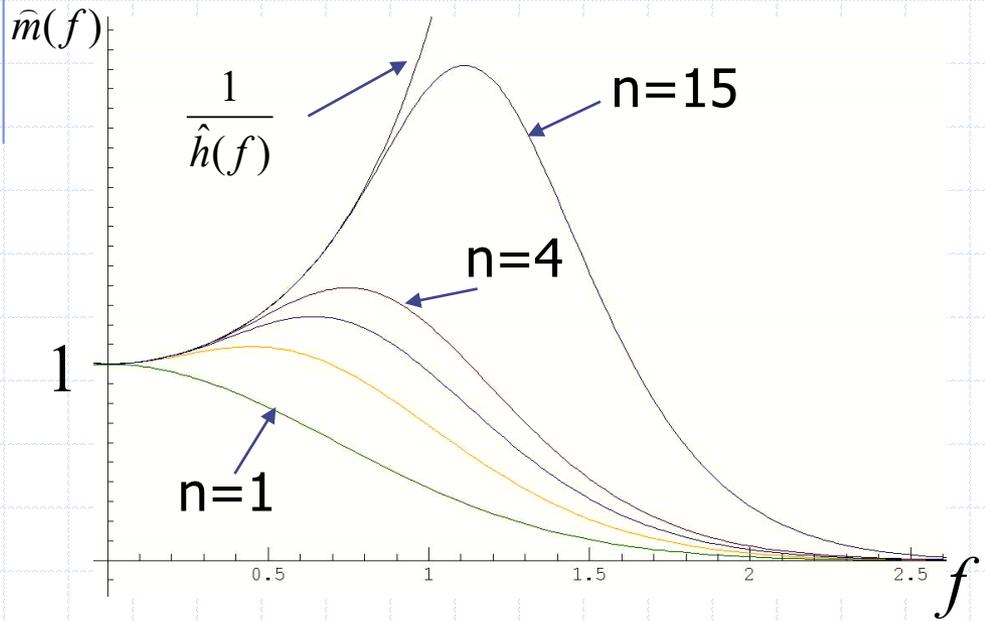
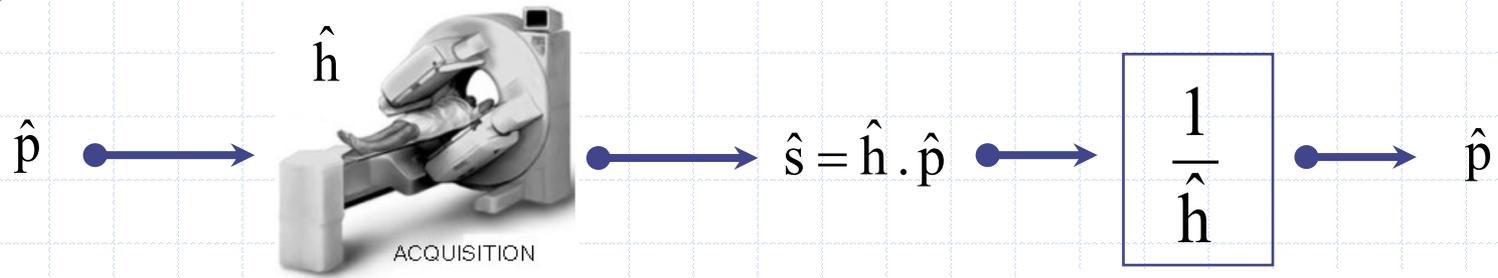
$$h(i) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-(k \cdot i)^2} \Leftrightarrow \hat{h}(f) = e^{-\pi^2 \left(\frac{f}{k}\right)^2}$$

$$k = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{LMH}$$



Réponse impulsionnelle supposée invariante

Filtre de déconvolution de Metz

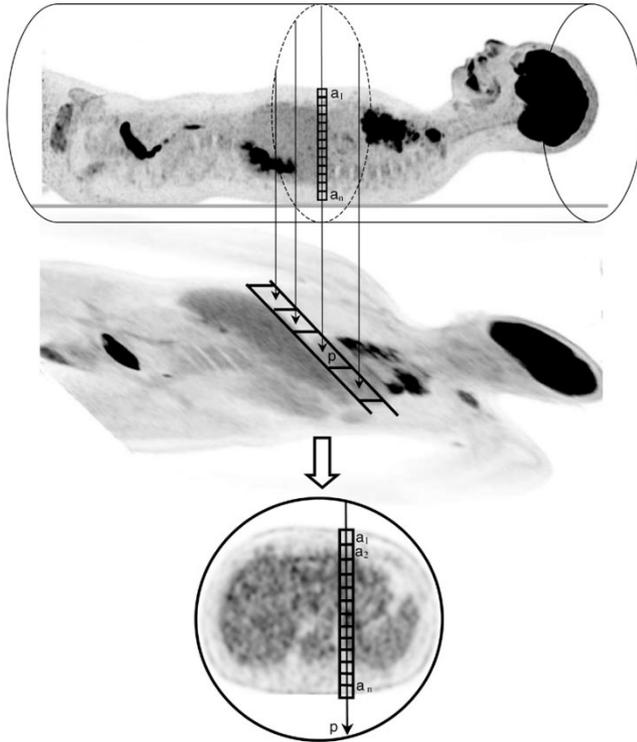


$$\hat{m}(f_1, f_2) = \frac{1 - \left[1 - \hat{h}(f_1, f_2)^2 \right]^n}{\hat{h}(f_1, f_2)}$$

$$n = 0,834 \cdot \ln(C) - 7,774$$

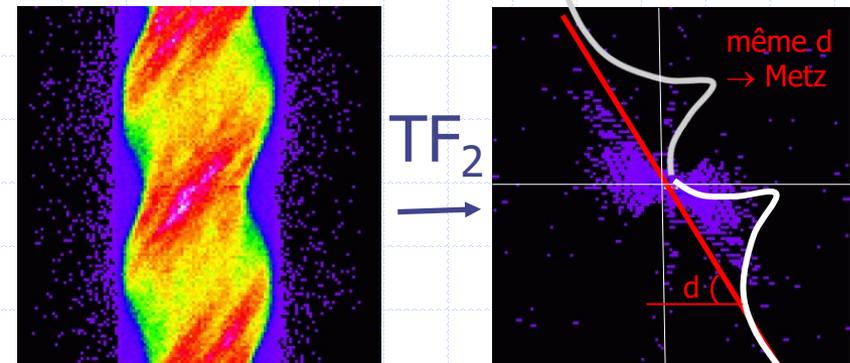
Pb: \hat{h} dépend de la d(source, collimateur)

Déconvolution en TEMP et TEP



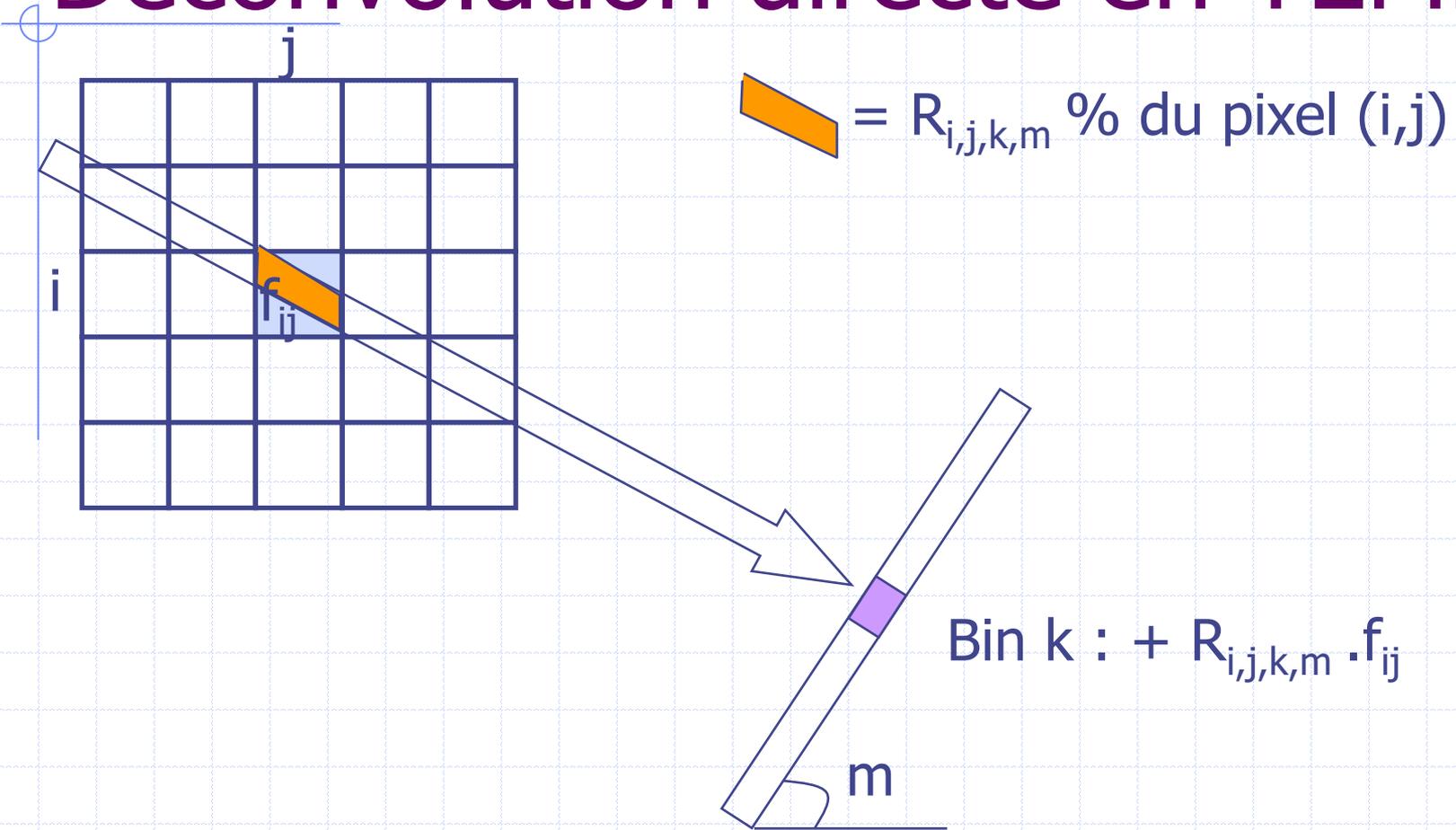
2 techniques de déconvolution en TE :

- Le principe fréquence-distance (cf. annexe):
 - Identification de la distance de la source sur la TF du sinogramme et filtrage de Metz



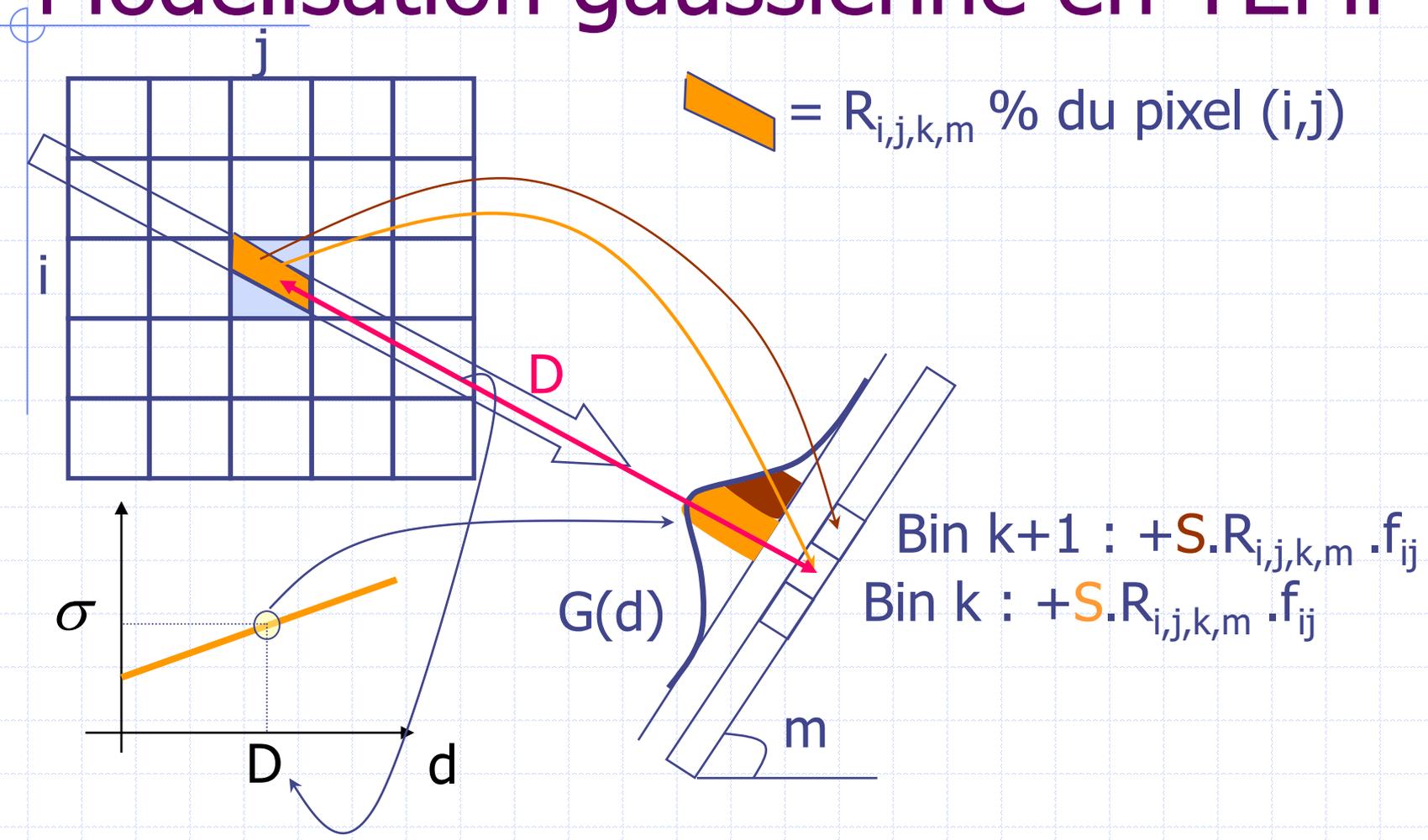
- La modélisation de la réponse impulsionnelle du tomographe dans les opérateurs de retro/projection. C'est la technique la plus utilisée de nos jours.

Déconvolution directe en TEMP

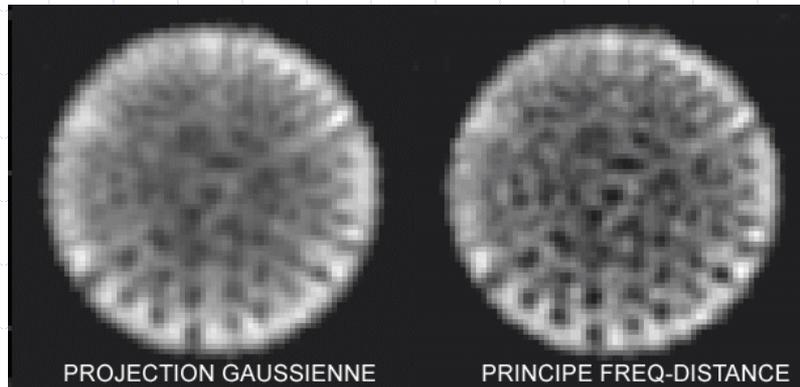
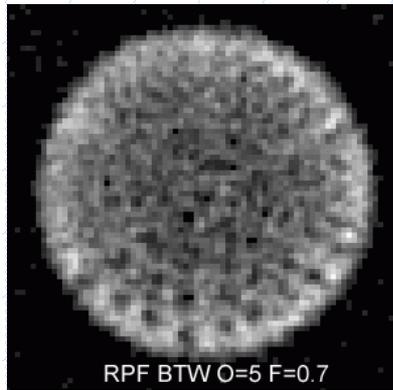




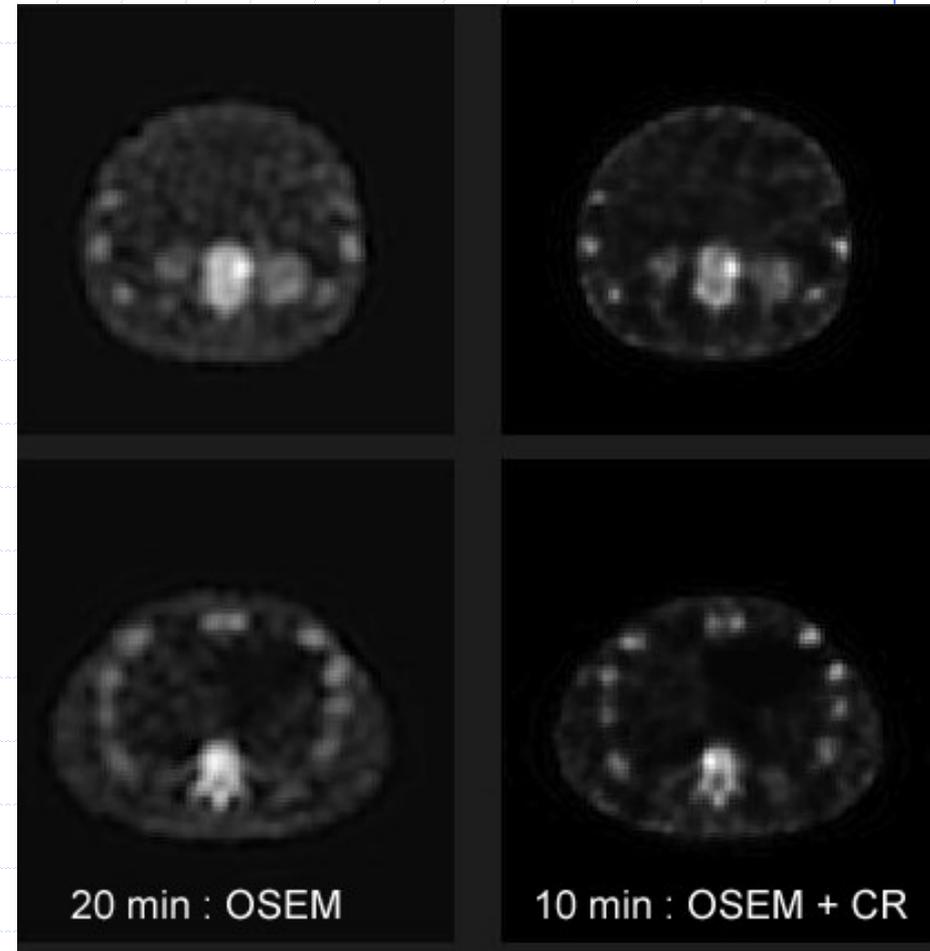
Modélisation gaussienne en TEMP



Exemple de déconvolution



Kohli Phys Med Biol 1998;43.



Applications cliniques: TEP, restore[®], evolution for bone[®]...

Généralisation de la méthode

La modélisation de la réponse impulsionnelle est valable pour tous les algorithmes de reconstruction tomographique utilisant des fonctions de projection et de rétroprojection, c'est-à-dire pour:

- les méthodes **itératives** (ART, MLEM, OSEM, GC...)
- mais aussi la **rétroprojection filtrée**

(seule l'inversion directe par la formule de Radon ne peut pas en bénéficier)

En revanche, l'inversion de la transformée de Radon (directe ou par rétroprojection filtrée) se plie mal à une correction des artefacts d'atténuation, ce qui explique, avec leur **validité en cas de projections tronquées**, le développement d'OSEM en SPECT et PET.

CONVOLUTION

- Image = convolution de la distribution de radioactivité par la réponse impulsionnelle
 - = moyenne pondérée d'une activité par les activités voisines
 - = atténuation (par x) des fréquence spatiales les plus hautes
- Effet de volume partiel =
 - sous estimation de l'activité si dimension anatomique $< 2.LMH$
 - Environ -25% si $e=LMH$; environ -55% si $e=LMH/2$.
- Déconvolution
 - En / par la réponse en fréquence puis filtre passe-bas (Metz)
 - En / par la réponse en fréquence dans la TF2 du sinogramme
 - En modélisant la projection gaussienne dans le projecteur

② BRUIT & FILTRAGES

Statistique de Poisson

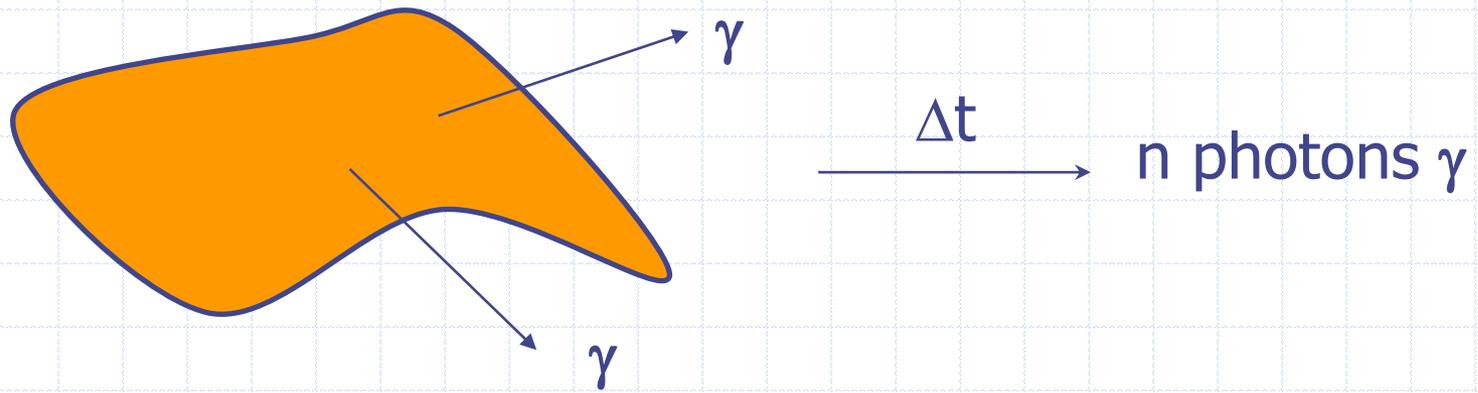
Rapport signal sur bruit

Filtrages Linéaires

Filtrages non linéaires

Désintégration radioactive

- **N** = Nombre de noyaux radioactifs
- **λ** = proba. qu'un isotope se désintègre/unité t
 $\lambda = (-dN/N)/dt$ soit $dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$
donc en moyenne $\bar{C} = N \cdot \lambda \cdot \Delta t$ désintégrations en Δt
- **$P(C_{\Delta t} = n)$** : probabilité de mesurer n désintégrations dans un intervalle de temps Δt



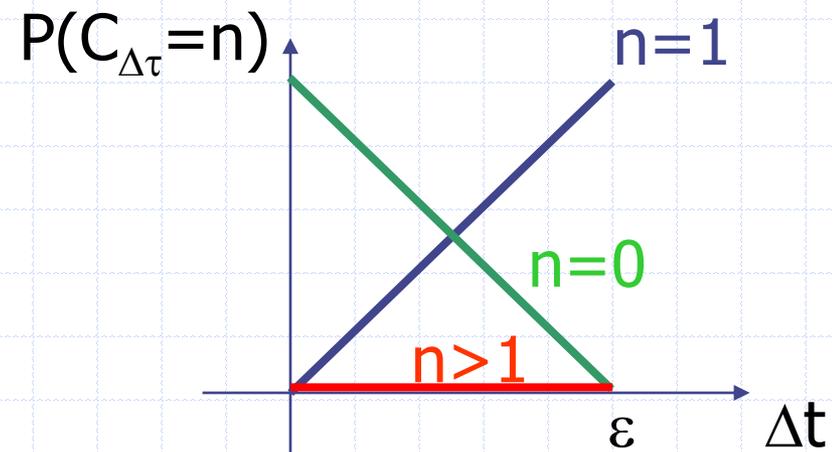
Désintégration radioactive

- **Sans mémoire** (désintégrations indépendantes)
 - les désintégrations qui ont eu lieu avant l'instant t n'influent pas sur celles qui auront lieu après l'instant t .

- **Stationnaire** la probabilité d'une désintégration entre t et $t+h$ ne dépend que de h (et pas de t)

- **Rare** : Si $\Delta t \rightarrow 0$, alors

- $P(C_{\Delta t} = 1) \rightarrow \lambda N \cdot \Delta t$
- $P(C_{\Delta t} = 0) \rightarrow 1 - \lambda N \cdot \Delta t$
- $P(C_{\Delta t} > 1) \rightarrow 0$



Statistique de Poisson (2)

*Phénomène rare,
sans mémoire
et stationnaire*



Radioactivité = Processus **POISSONNIEN**

$$P(C_{\Delta t} = n) = e^{-\lambda N \Delta t} \frac{(\lambda N \Delta t)^n}{n!}$$

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 3 \cdot 2$$



Statistique de Poisson (3)



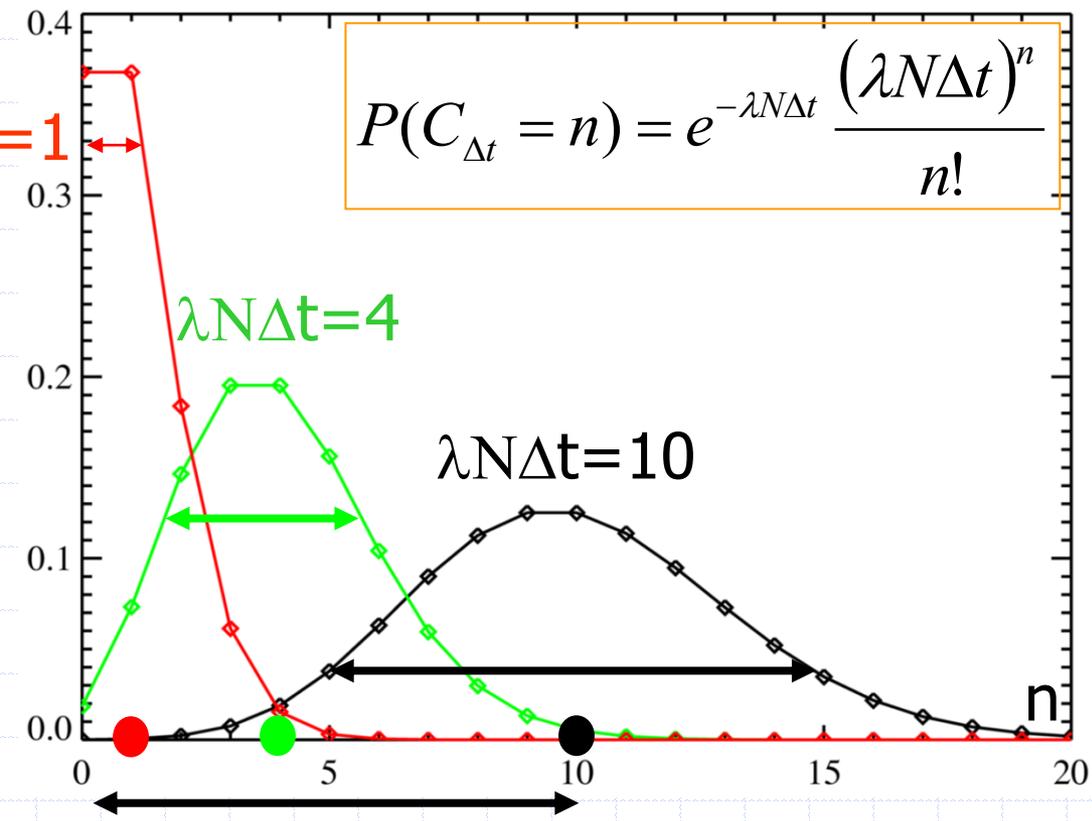
$$P(C_{\Delta t}=n)$$

$$\bar{C} = \lambda N \Delta t = 1$$

$$E = \sigma^2 = \lambda N \Delta t = \bar{C}$$

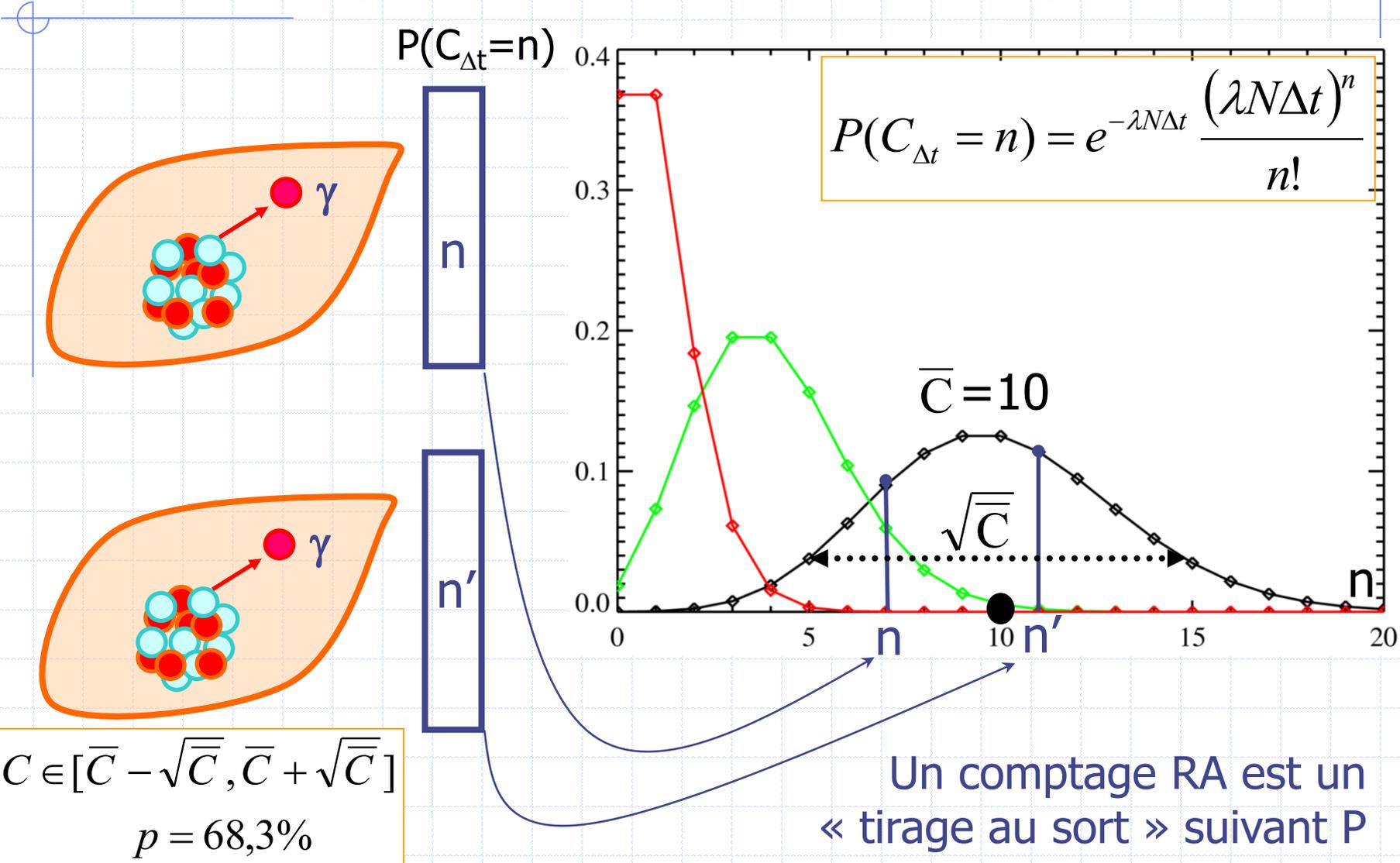
$$\Rightarrow \frac{S}{B} = \frac{E}{\sigma} = \frac{\bar{C}}{\sqrt{\bar{C}}} = \sqrt{\bar{C}}$$

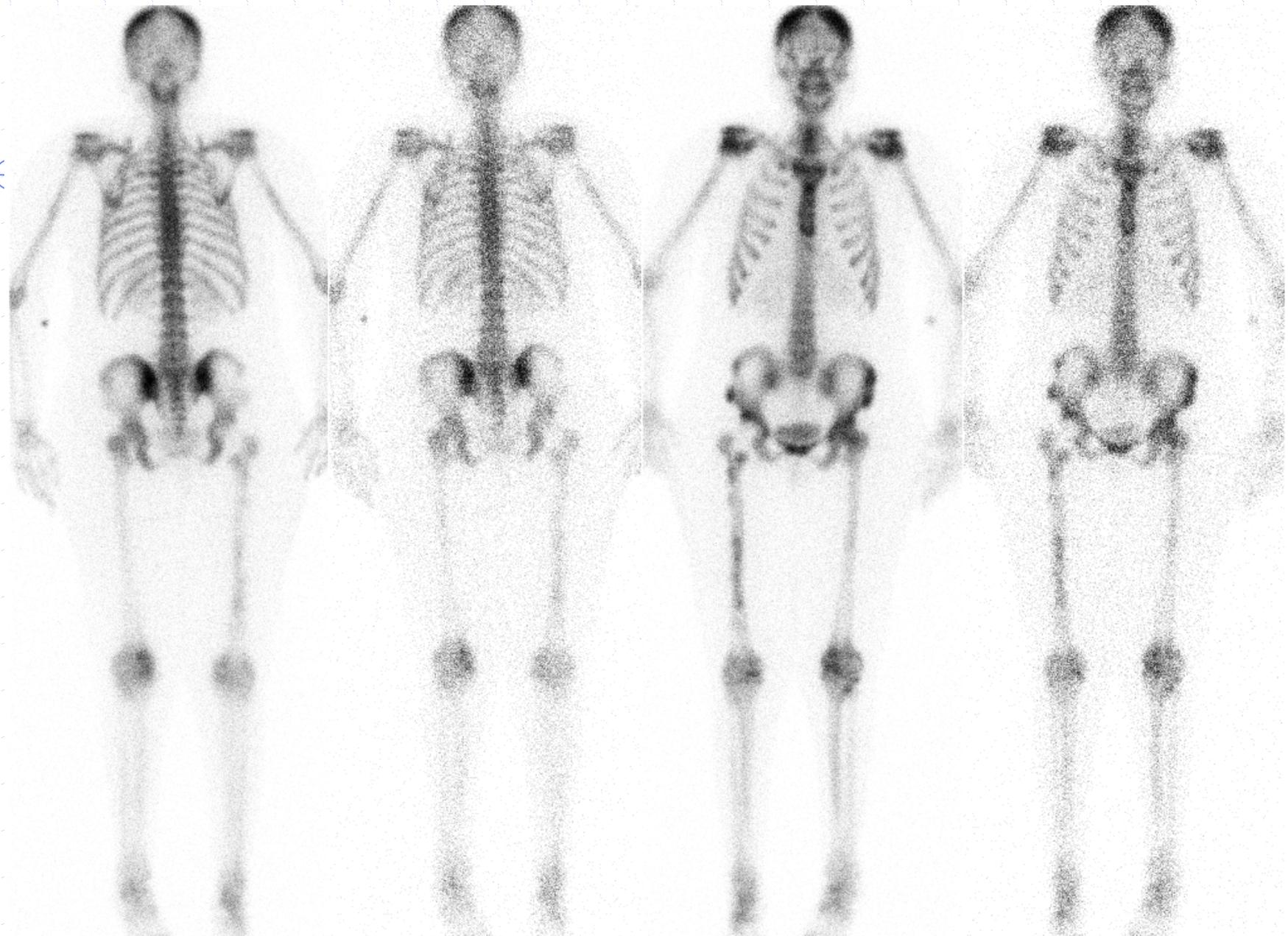
$$\frac{S}{B} = \sqrt{\bar{C}}$$



\bar{C} nombre moyen de désintégration pendant $\Delta t = \lambda \cdot N \cdot \Delta t$

Statistique de Poisson (4)





12 cm/min

60 cm/min

12 cm/min

60 cm/min

[D72] Si le balayage entre deux acquisitions de scintigraphies osseuses passe de 12 à 60 cm/min,



1 Le taux de comptage moyen par pixel diminue d'un facteur 5

2 Le taux de comptage purement aléatoire par pixel diminue d'un facteur 2,2

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

3 Le rapport S/B est dégradé de plus de 50%

4 Dans les valeurs des pixels, la proportion de signal aléatoire (%), sans signification médicale, fera plus que doubler

ECHANTILLONNAGE pratique (2)

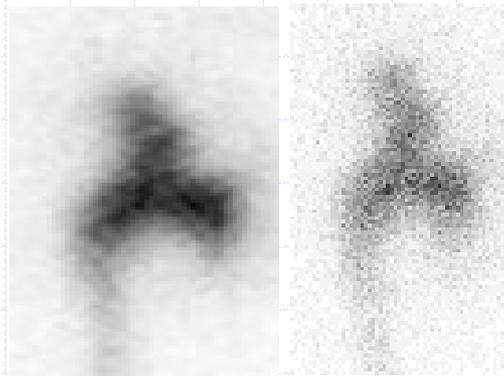
256

512

1024



256



1024



[D73] Le champ d'une gamma-caméra est 40 x 50 cm.
Sa LMH en mode planaire est en moyenne de 5 mm en mode planaire et de 10 m...



- 1 La résolution potentielle de la caméra sera préservée avec une échantillonnage 256 en planaire et 128 en SPECT
- 2 Si l'on échantillonne en 512 en planaire, la résolution est inchangée, mais le S/B est divisé par 2.
- 3 Si l'on échantillonne en 256 en SPECT, la résolution est améliorée et le S/B inchangé.
- 4 Utiliser des pixels de dimension $< LMH/2$ ne change pas la résolution, mais augmente la part de bruit dans les pixels
- 5 Le même examen doit être échantillonné avec moins de pixels en SPECT qu'en planaire



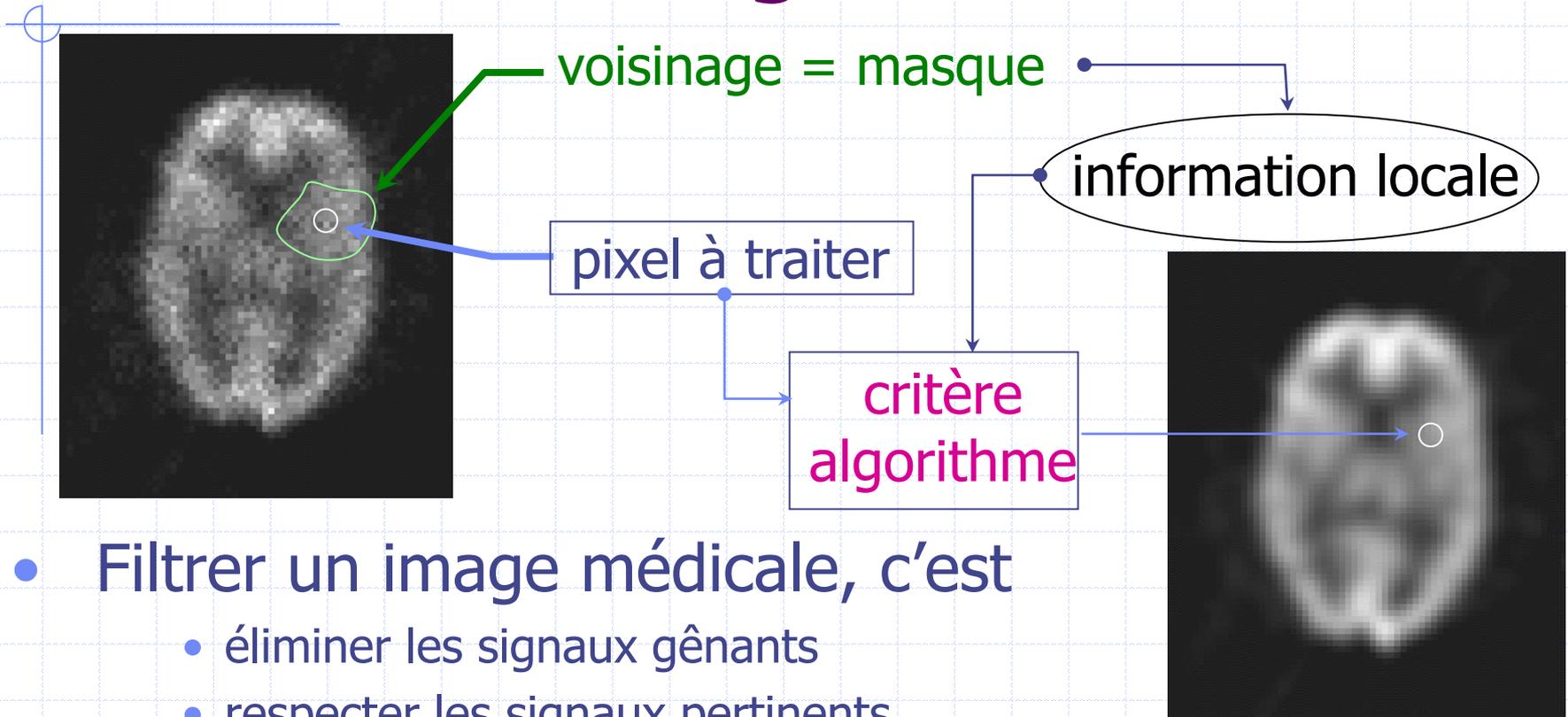
Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question



TAUX DE COMPTAGE

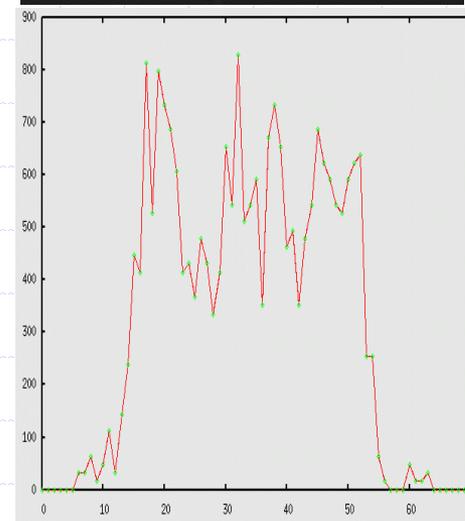
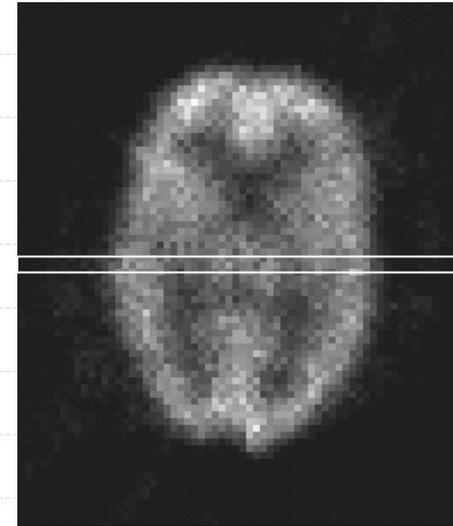
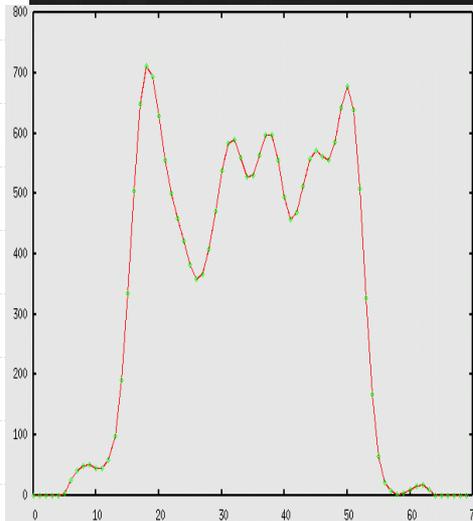
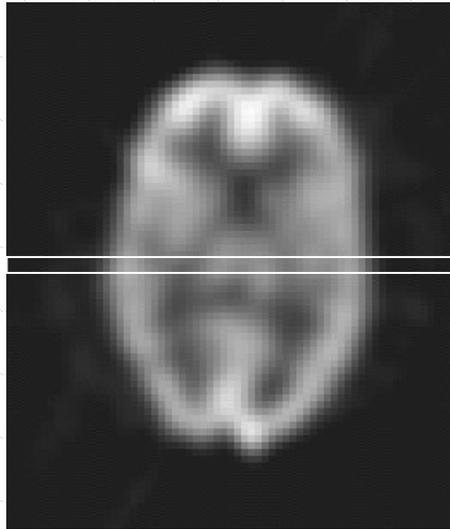
- Désintégration = rare, sans mémoire, stationnaire
 - Donc statistique de Poisson de moyenne $\bar{C} = \sigma^2$
 - Donc $S/B = \sqrt{\bar{C}}$
- Conséquence : optimiser le taux de comptage
 - Activité injectée suffisante, pas de point d'injection (masqué)
 - Mais surtout : temps de pose suffisant
- Taille des pixels lors de la numérisation
 - $d = LMH/2$
 - Si $d < LMH / 2$, on dégrade le rapport S/B sans gain en résolution.
 - Si $d > LMH / 2$ on dégrade la résolution et on aggrave les effets de volume partiel.

Notion de filtrage

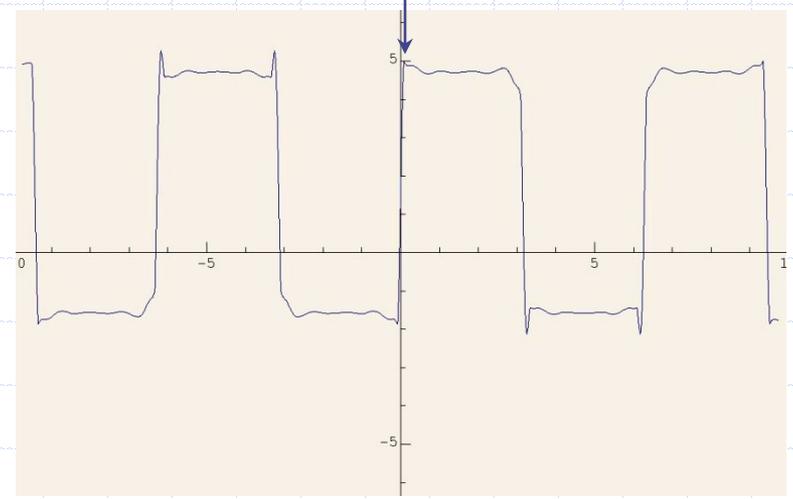
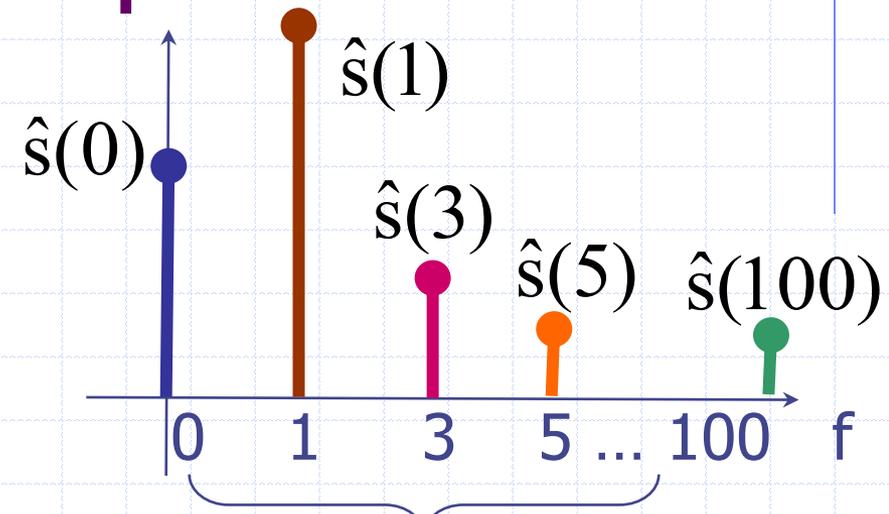
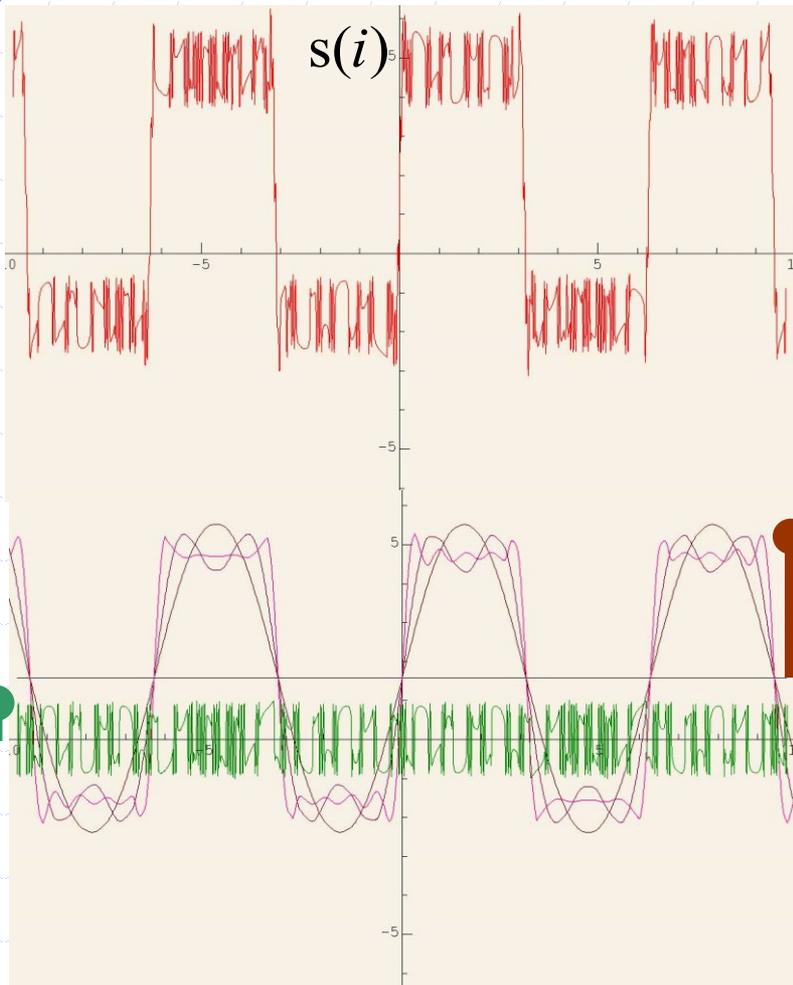


- Filtrer un image médicale, c'est
 - éliminer les signaux gênants
 - respecter les signaux pertinents
- C'est donc au médecin nucléaire de définir :
 - un critère pour discriminer signaux parasites et pertinents
 - un algorithme pour éliminer les signaux parasites

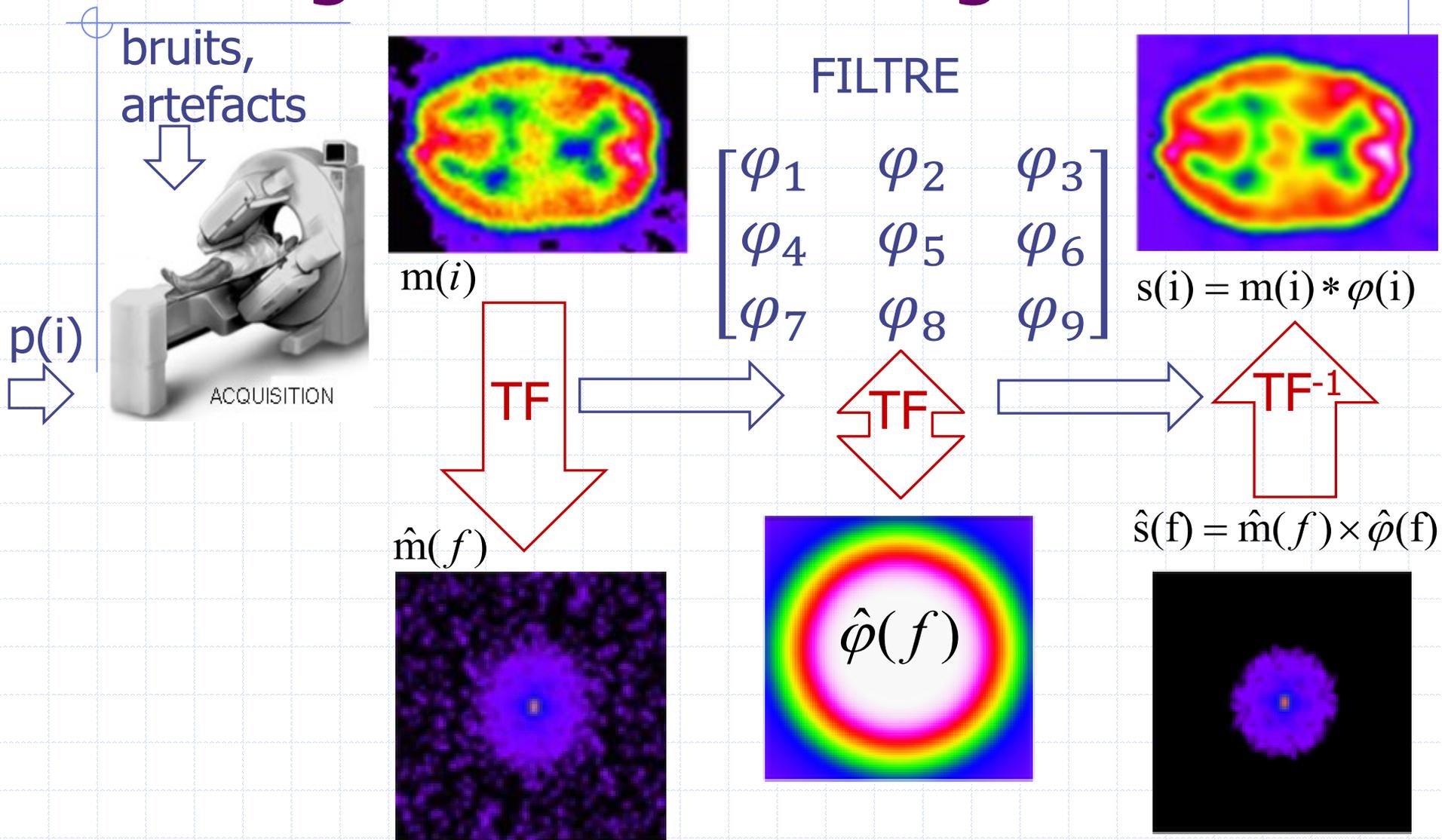
1° idée : critère fréquentiel



Représentation fréquentielle



Filtrage linéaire d'image = SLID



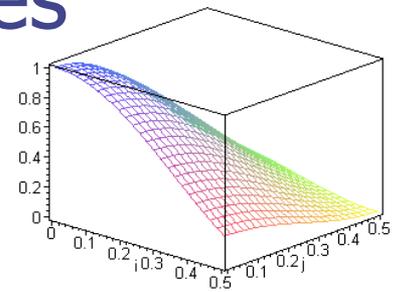


Filtres passe-bas

- Convolution: $s(i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k).m(i - k)$
- Remplace chaque NG par une moyenne pondérée des NG voisins $\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

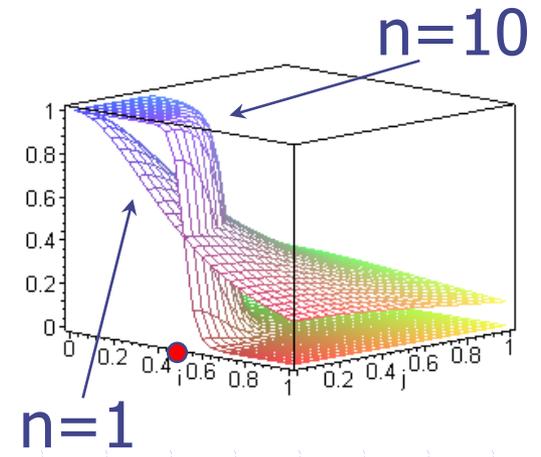
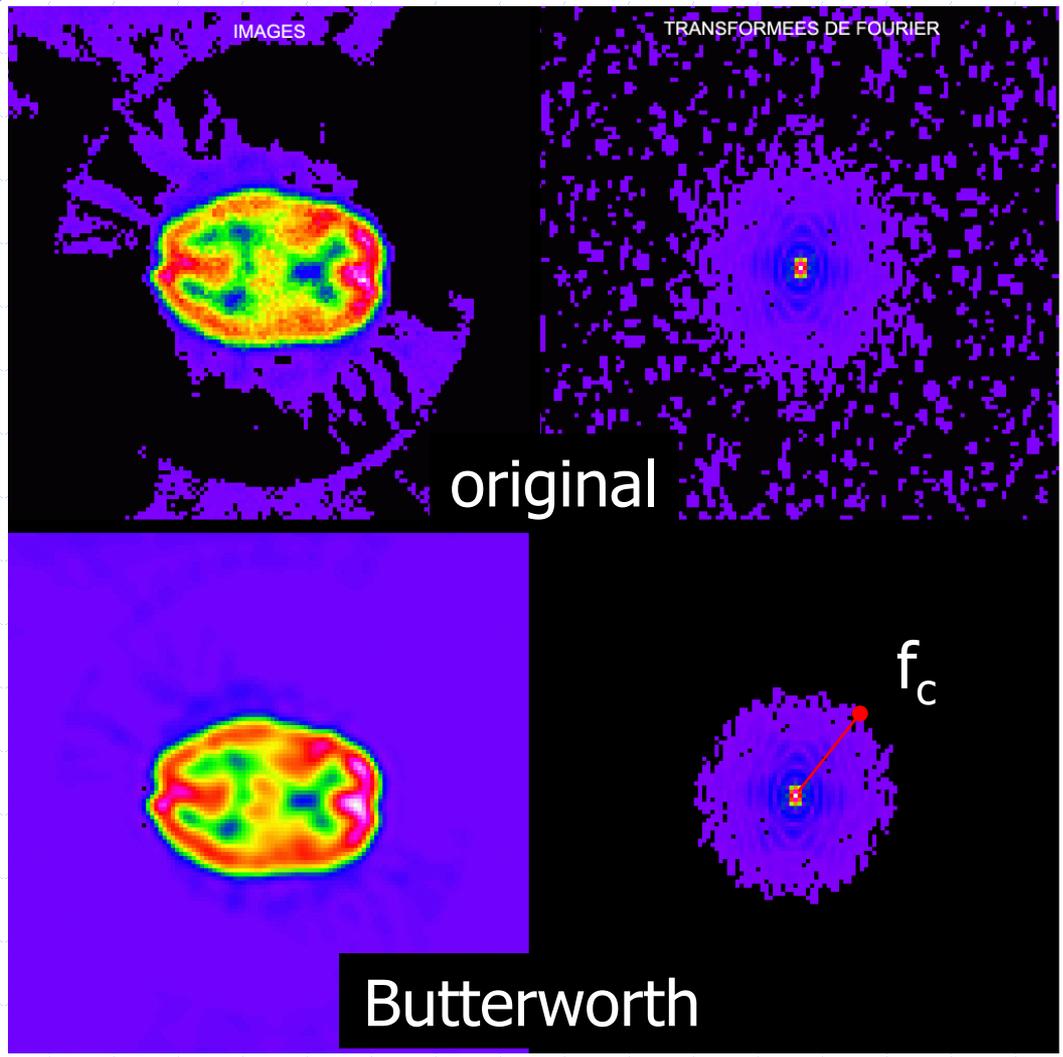
- Atténuation sélective de certaines fréquences

$$\hat{\phi}(f) = 0,5 \cdot \left[1 + \cos\left(\pi \frac{f}{f_e}\right) \right]$$



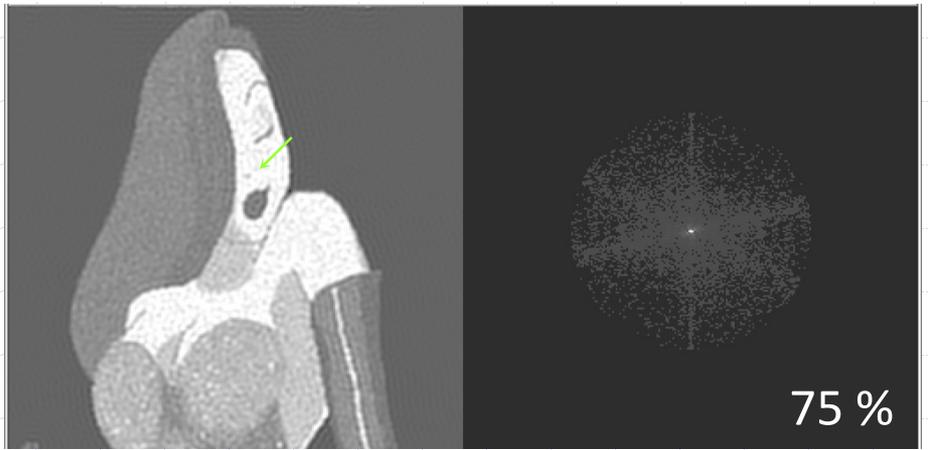
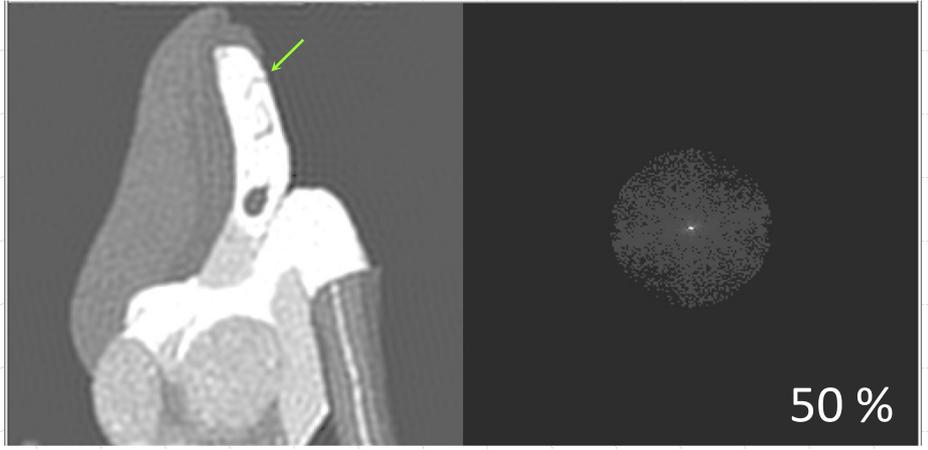
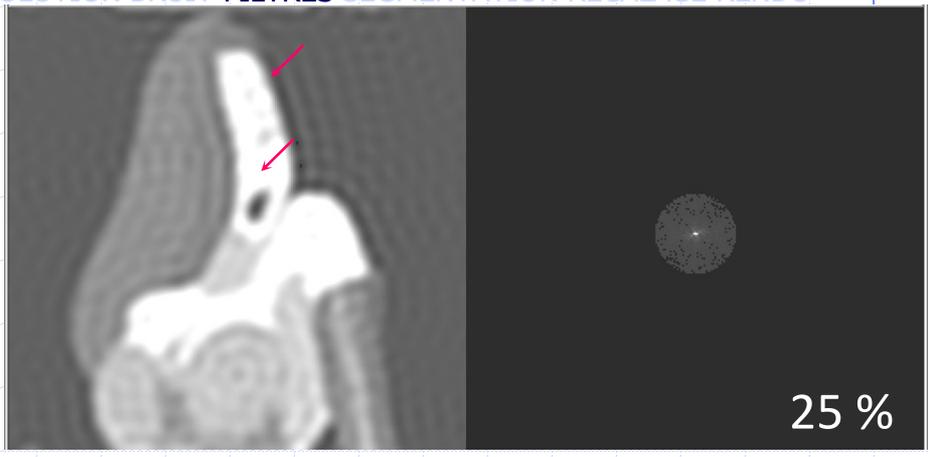
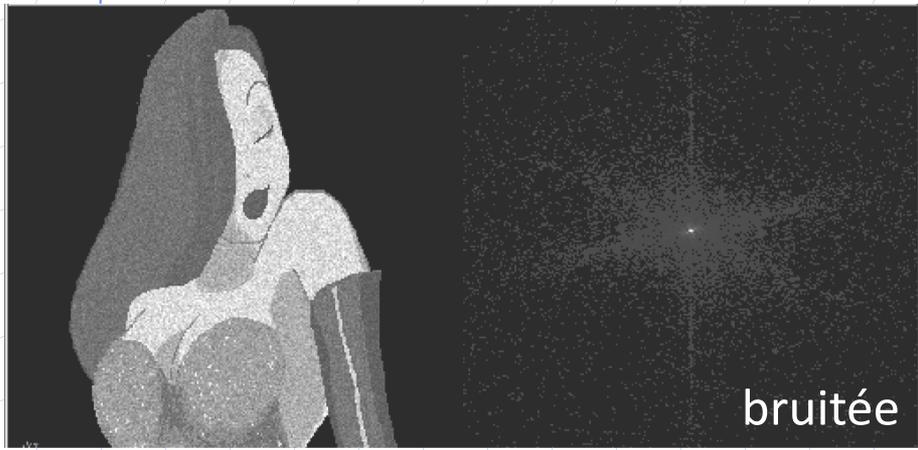
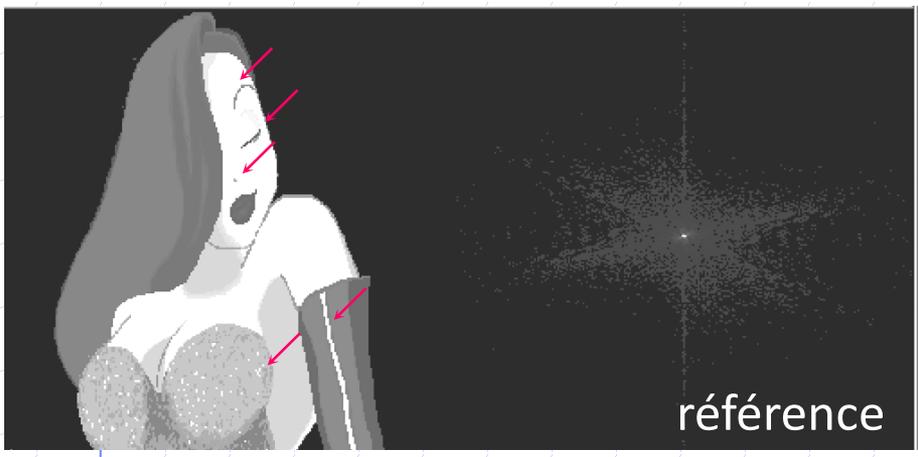
- Un appareil d'imagerie est un exemple de filtre linéaire passe-bas

Exemple: filtres de Butterworth



$$\hat{\phi}(f_1, f_2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}{f_c} \right)^{2.n}}$$

Filtres linéaires





[D82] Un filtre linéaire PB de gabarit carré et de fréquence de coupure 50% appliqué à une image acquise avec une caméra de LMH 1 cm,



- 1 dégrade la résolution de la gamma-caméra.
- 2 donne une image de résolution équivalente à celle d'une caméra de LMH 2 cm.
- 3 donne une image de niveau de bruit équivalent à celle d'une caméra de LMH 2 cm.
- 4 diminue les effets de volume partiels
- 5 améliore le rapport S/B dans l'image
- 6 supprime certaines hautes fréquences, que celles ci contribuent aux contrastes ou au bruit dans l'image.

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question



FILTRES LINEAIRES

Ils opèrent par convolution (moyenne pondérée) ou par amplification sélective des fréquences spatiales. Ces filtres sont réversibles si $\hat{h}(f) \neq 0$ pour toute fréquence de l'image.

▲ Facilité (relative) de synthèse

- ▲ via une fréquence de coupure et un gabarit
- ▲ ou par définition d'un masque de convolution

▲ Contrôle des caractéristiques modifiées

- ▲ via les fréquences spatiales amplifiées
- ▲ en lien avec la résolution de la γ -caméra

▼ Information de voisinage mal prise en compte

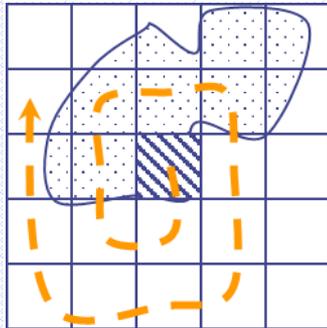
▼ Altération de la résolution si filtrage passe-bas

- ▲ ne préservent pas les contours, \uparrow EVP

D'autres types de filtrages...

ALGORITHME MASQUE	MOYENNE PONDEREE	AUTRE
INVARIANT	FILTRE LINEAIRE (\bar{x} , masque fixe, discrimination en fréquences)	FILTRE MEDIAN (MEDIANE) FILTRE MORPHOLOGIQUE (MIN, MAX)
NON INVARIANT	LISSAGE SUR MASQUE ADAPTE (\bar{x} sur masque variable)	SHINE (ACP) FILTRE MORPHOLOGIQUE (MIN, MAX)

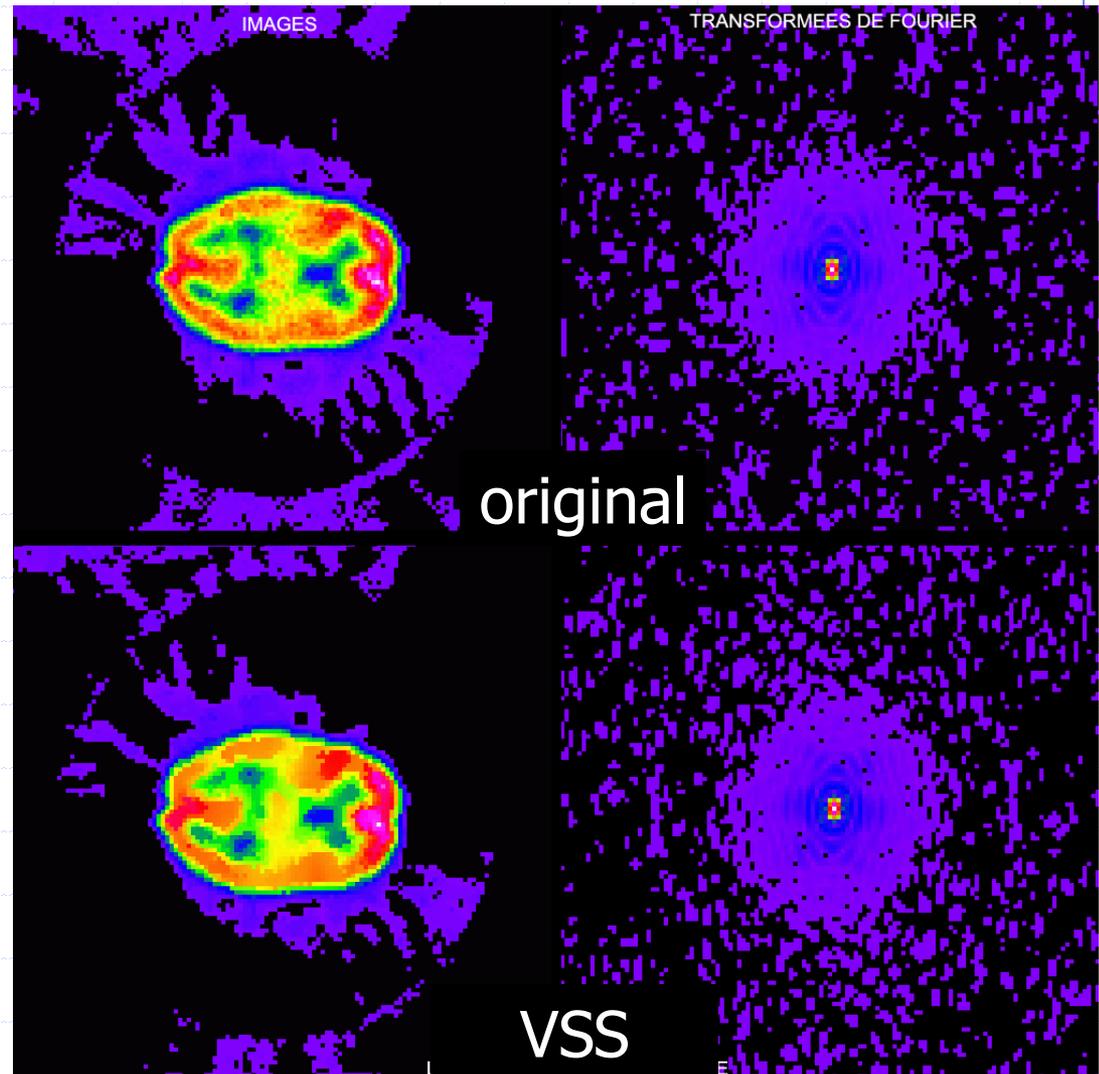
Lissage sur masque adapté (VSS)



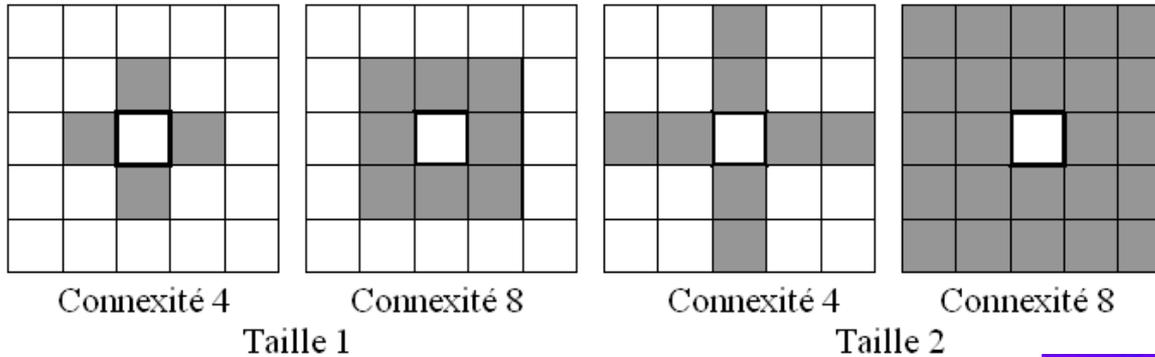
Accumulation pour
moyenne des

$$s(i',j') \in s(i,j) \pm 2\sqrt{s(i,j)}$$

Ce filtre opère toujours une
moyenne, mais n'est plus
linéaire car non invariant en
translation (le masque change).

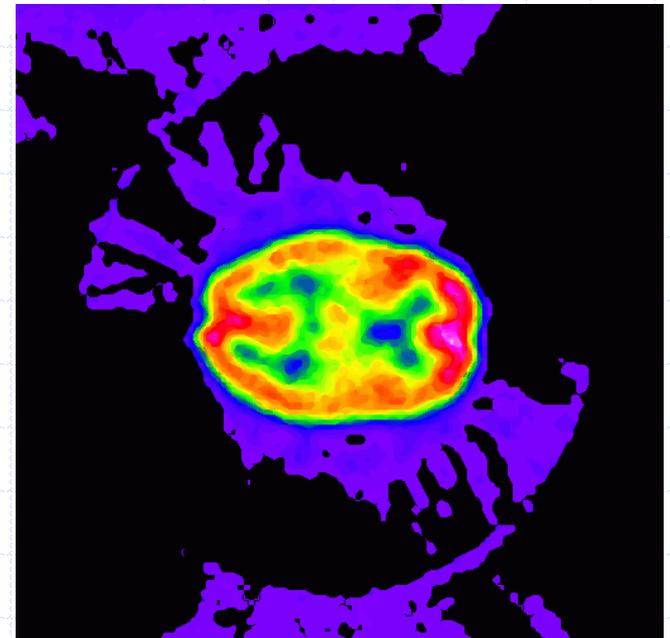


Filtre médian



On remplace $s(i,j)$ par la valeur de pixel médiane dans un voisinage fixe de (i,j)

Ce filtre opère de façon non linéaire (il ne calcule pas de moyenne pondérée)





Opérateurs morphologiques

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

EROSION :

$$\varepsilon(i, j) = \text{Inf}_{(i', j') \in V(i, j)} s(i', j')$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Voisinage :

$$V(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

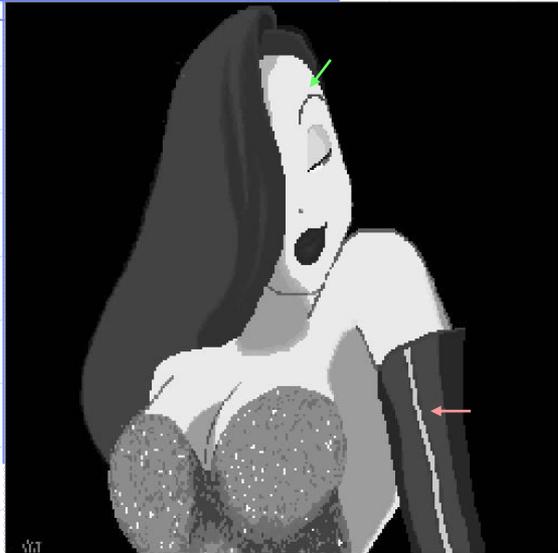
DILATATION :

$$\delta(i, j) = \text{Sup}_{(i', j') \in V(i, j)} s(i', j')$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

ε remplace chaque valeur de pixel par le minimum des valeurs des pixels du voisinage
 δ remplace chaque valeur de pixel par le maximum des valeurs des pixels du voisinage

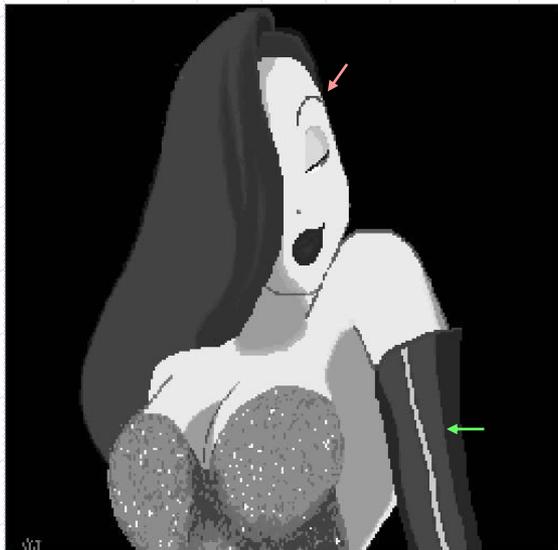
Opérateurs morphologiques



ε →



ε diminue le signal,
élargit les hypo-sinaux,
gomme les hyper-sinaux



δ →



δ augmente le signal,
gomme les hypo-sinaux,
élargit les hyper-sinaux

Filtres morphologiques

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 14 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$



$$\rightarrow \varepsilon(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

OUVERTURE:

$$\rightarrow \gamma(i, j) = \delta \varepsilon(i, j) =$$

↳ gomme les hyper-signaux
petits par rapport à V

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 14 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \delta(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 16 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

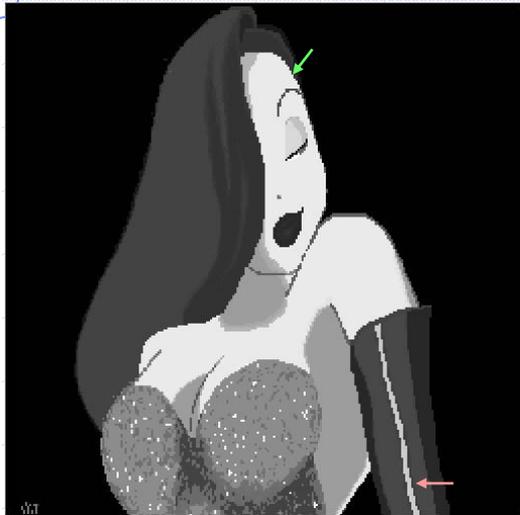
FERMETURE:

$$\rightarrow \varphi(i, j) = \varepsilon \delta(i, j) =$$

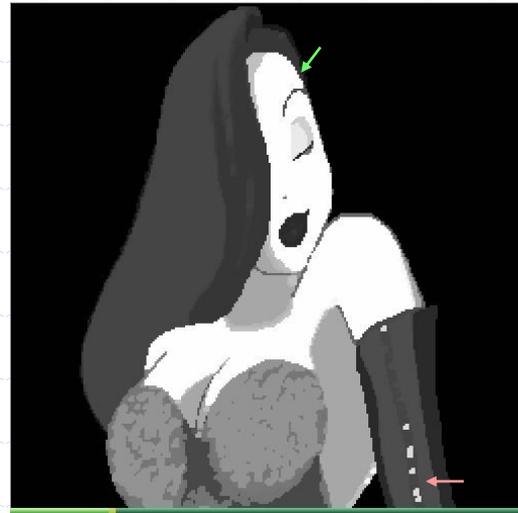
↳ gomme les hypo-signaux
petits par rapport à V

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Filtres morphologiques

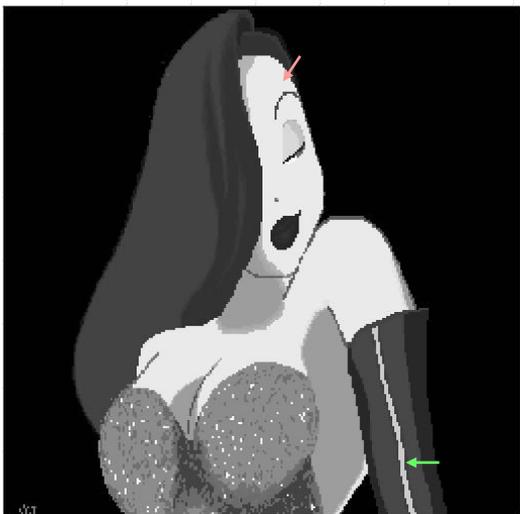


γ



OUVERTURE:

↪ gomme les hyper-signaux
petits par rapport à V



ϕ



FERMETURE:

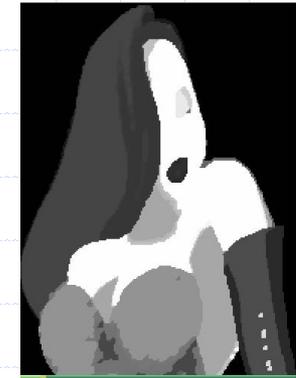
↪ gomme les hypo-signaux
petits par rapport à V

Combinaisons de filtres morphologiques

- Filtres alternés séquentiels:

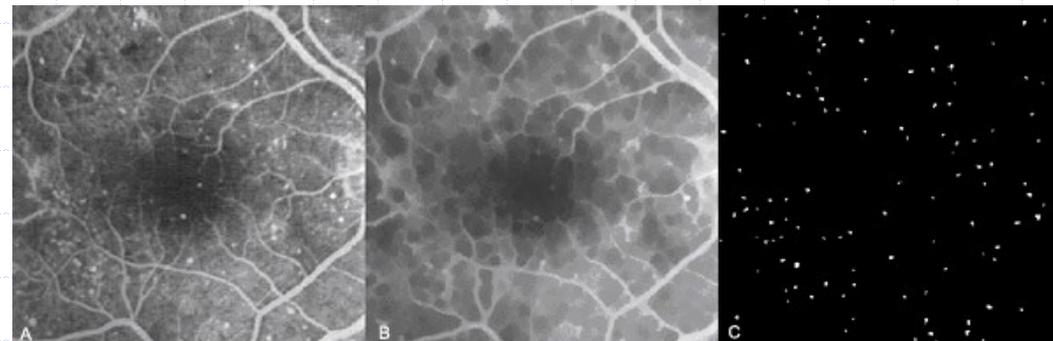
$$\gamma\varphi(s) = (\delta \circ \varepsilon)(\varepsilon \circ \delta)$$

$$F = \gamma_2\varphi_2 \circ \gamma_1\varphi_1$$



- Opérateurs géodésiques:

- ♦ dilater $m < s$
tant que $\delta(m) < s$
- ♦ éroder $m > s$
tant que $\varepsilon(m) > s$



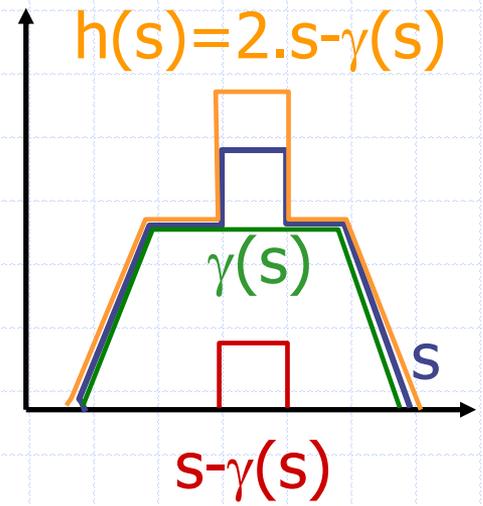
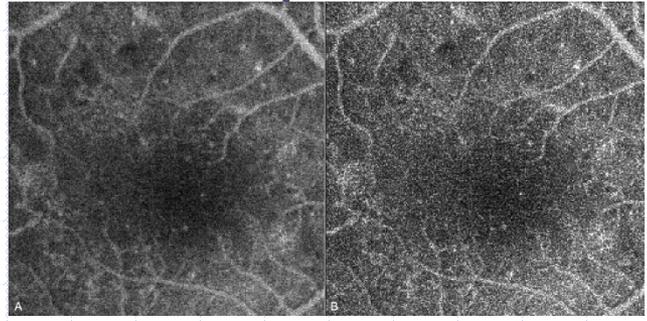
$\delta_s^\infty(\varepsilon)$ puis $\varepsilon_s^\infty(\delta_B)$

- Centres morphologiques:

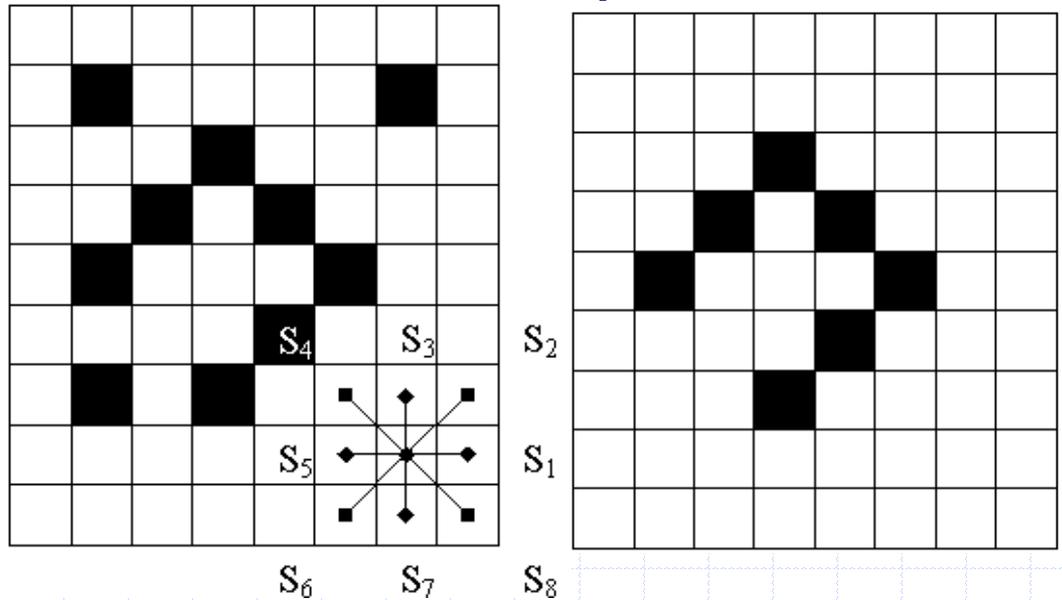
- ♦ pour chaque pixel, on choisi le moins actif des filtres d'une famille si tous dans le même sens, sinon, pixel inchangé.

Combinaisons de filtres/opérateurs morpho.

- Filtre chapeau haut de forme



- Sup/Inf d'opérateurs vs S_k :



On érode (dilate) avec un segment de direction choisie pour fournir le résultat le plus (moins) élevé.

$$\varepsilon(s)(i,j) = \text{Sup}_k (\varepsilon_{S_k})(s)(i,j)$$

FILTRES NON LINEAIRES

- Il s'agit toujours de comparer des a priori sur la nature du signal et du bruit à l'information de voisinage, mais de façon non linéaire, ce qui les rend irréversibles.
- Non invariants dans le décalage
 - Mode opératoire différent suivant la région de l'image traitée
 - Ex : lissage sur masque adapté
- N'opérant pas par moyenne pondérée
 - Ex : filtres de nature statistique: filtre médian, SHINE
 - Ex : filtres morphologiques : ouvertures et fermetures.
- Avantages :
 - ils peuvent préserver les HF (contours, petits objets)
- Difficultés
 - Pour paramétrer et pour contrôler l'activité de ces filtres.

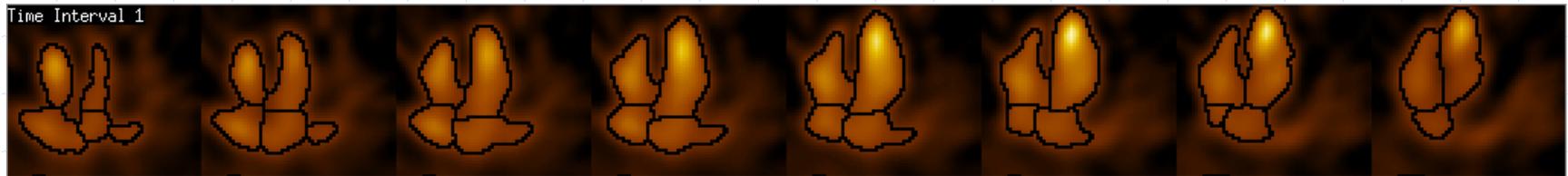
③ SEGMENTATION

Définition et généralités

Application de seuils

Recherche de frontières

Notion de segmentation



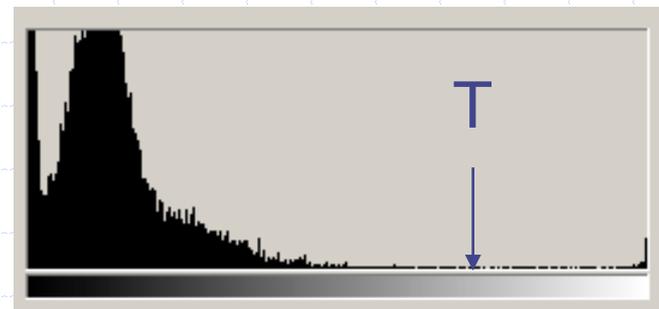
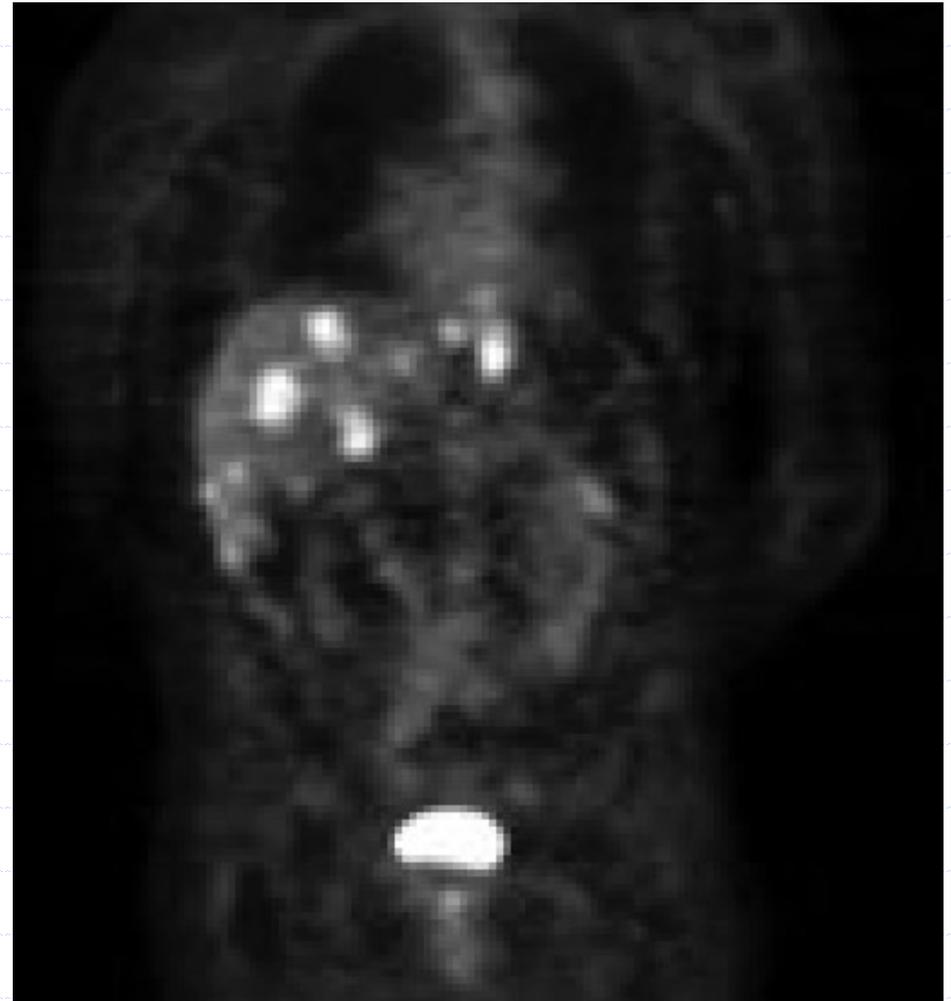
- Partition d'une image en régions d'intérêt (ROI)
- Première étape d'une analyse d'image
 - Extraction d'une mesure physique dans une ROI
- Quantification morphologique ou fonctionnelle

Méthodes de segmentation

- Seuillages
- Croissance de régions
- Recherches de frontières entre objets
 - Méthodes dérivatives
 - Méthodes morphologiques (gradients, LPE)
- Autres (non traitées)
 - Champs de Markov, réseaux de neurones, regroupement de pixels, étiquetage par analogie à des modèles, modèles déformables, atlas, analyse d'une évolution temporelle (ventriculographie, scintigraphie rénale...)

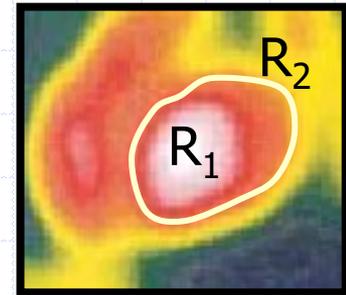
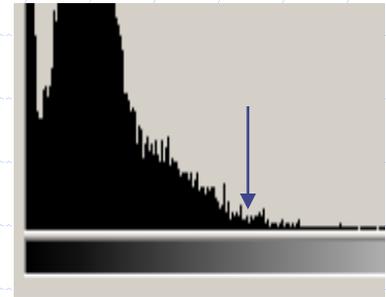
Seuillage simple

- Définition d'un seuil T sur l'image ou l'histogramme
- Sélection des pixels de niveau supérieurs ou inférieurs à T

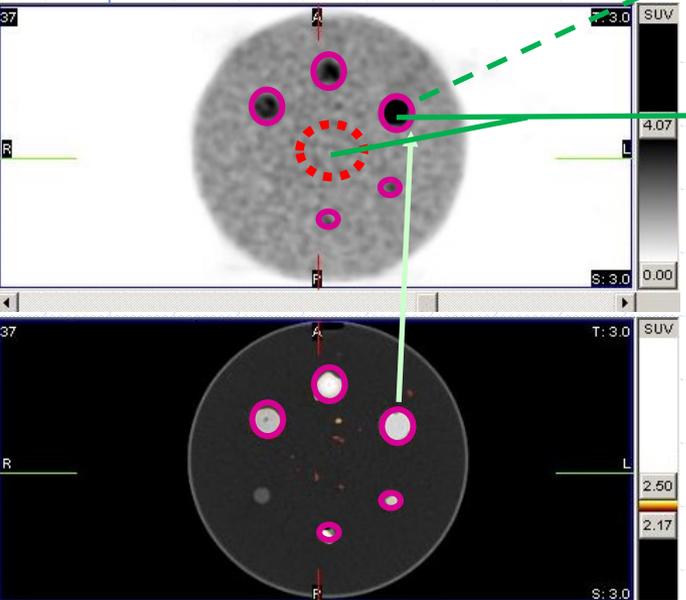
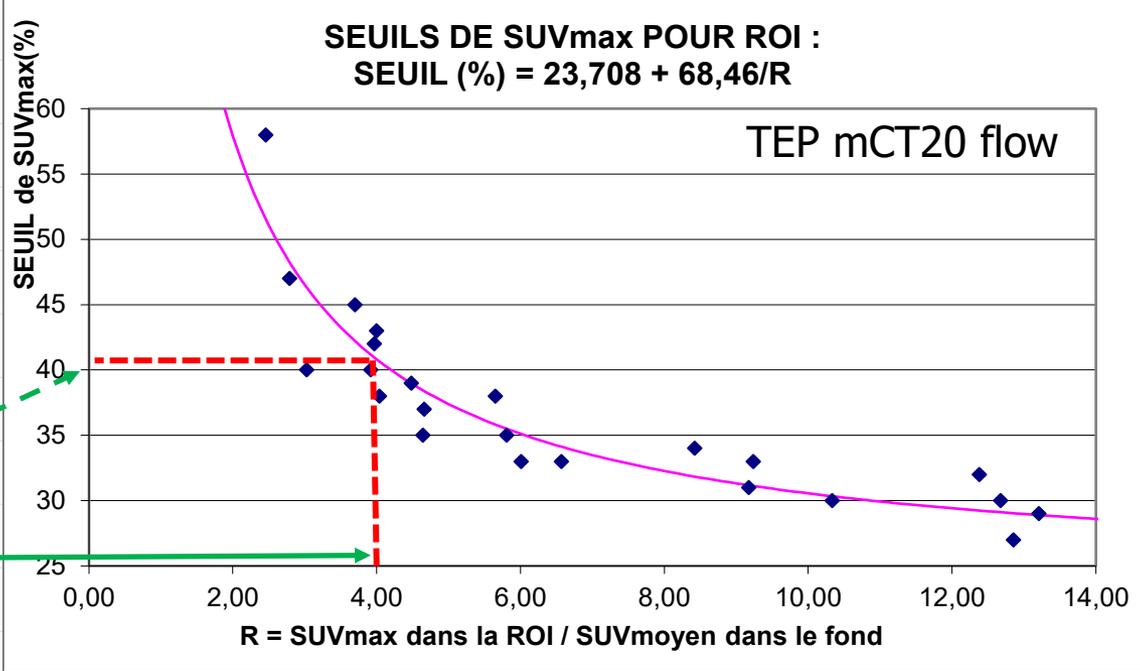


Choix du seuil

- Minimum de l'histogramme
- % d'un maximum de l'image
- Automatique:
 - Initialisation de T
 - $R_1 = \{(i,j) / S(i,j) > T\}$ et $R_2 = \{(i,j) / S(i,j) \leq T\}$
 - $M_1 = \text{Moyenne}_{R_1} S(i,j)$ et $M_2 = \text{Moyenne}_{R_2} S(i,j)$
 - $T = (M_1 + M_2) / 2$ tant que M_1 ou M_2 change
- Optimisation d'une fonctionnelle
- **Seuillage adaptatif en % d'un maximum**



SEUILLAGE ADAPTATIF (Daisne)



→ % SUV max qui conduit à une ROI sphérique de rayon exact
 % SUV moyen dans le fond
 → On trace l'hyperbole $\%SUV_{max} = f(SUV_{max}/SUV_{fond})$

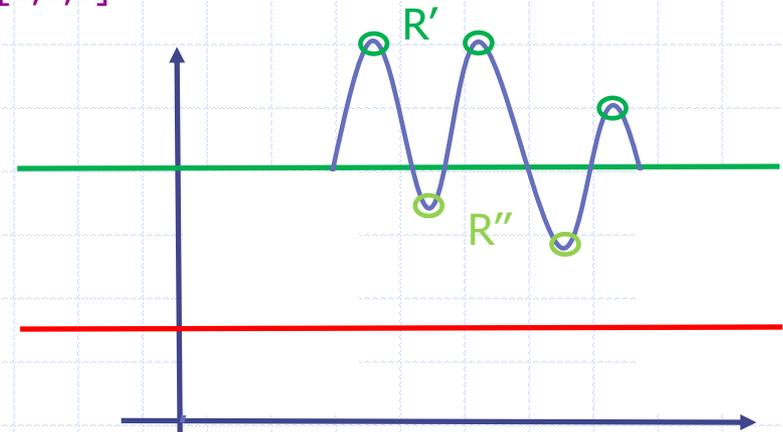
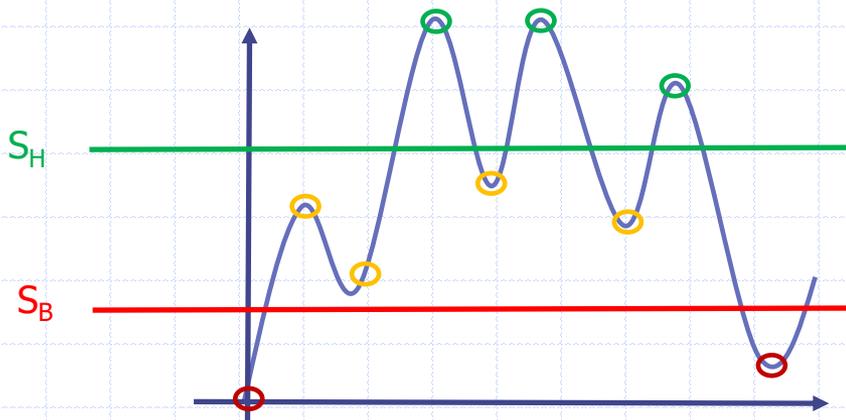
S Vauclin, Eur J Nucl Med 2006

Seuillage par hystérésis

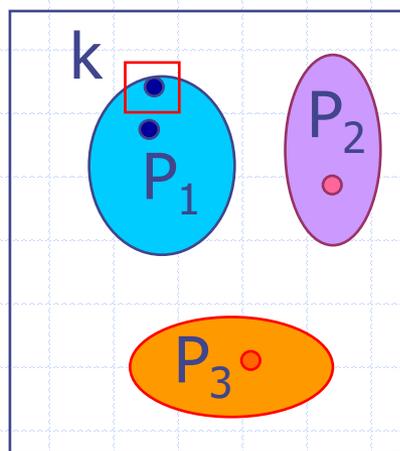


- Définition d'un seuil haut S_h et d'un seuil bas S_b
- Seuillage haut: $R' = \{ (i,j) / S(i,j) > S_h \}$
- $R'' = \{ (i,j) / S(i,j) > S_b$
 et (i,j) connexe à des $(i',j') \in R' \}$
- $R = R' \cup R''$

Exemple avec $V = [1,1,1]$

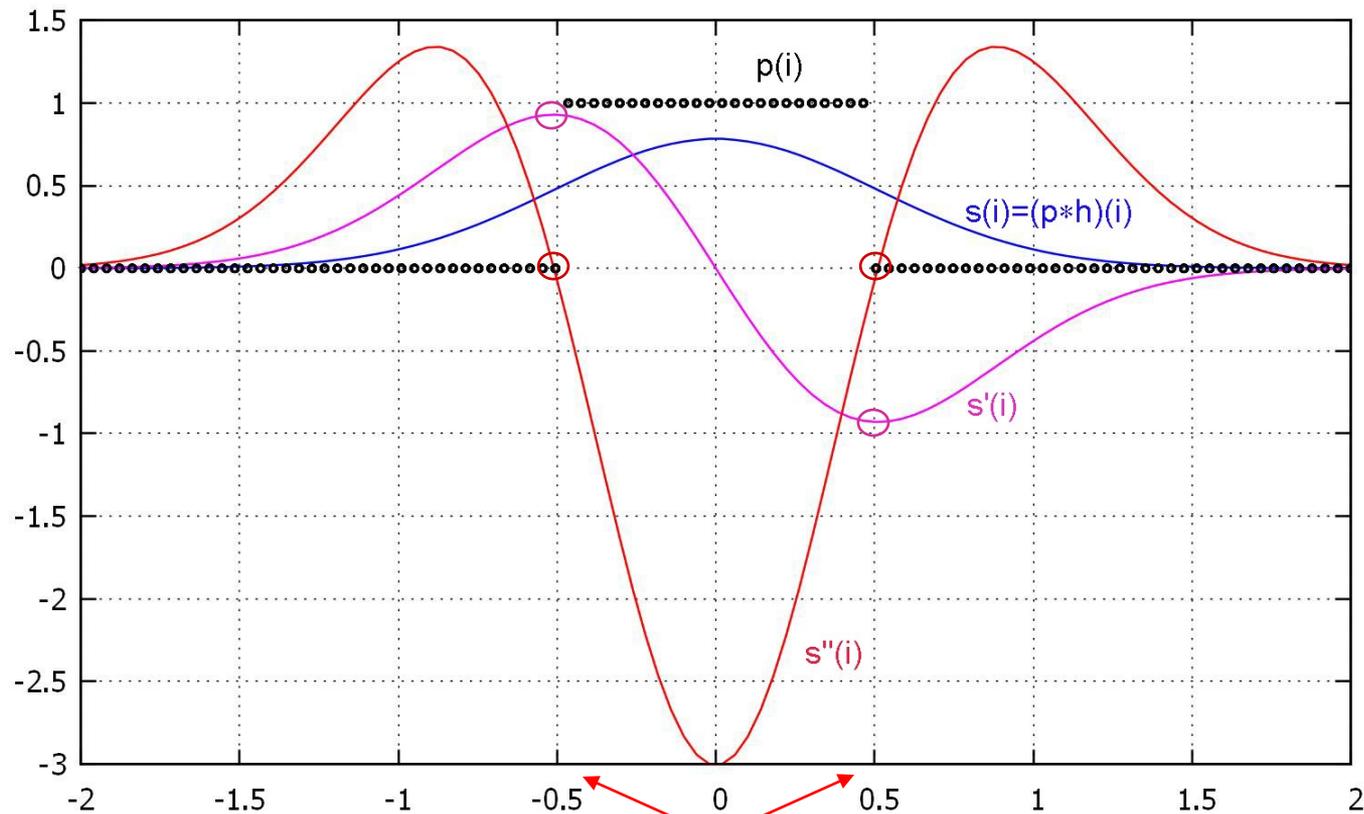


Croissance de régions



- Initialisation: $R_i = \{P_i\}, i=1-3$
- Pour chaque région i
 - $M_i =$ Moyenne des pixels dans R_i
 - Pour chaque pixel k au bord de R_i
 - Pour chaque pixel (x,y) voisin de k
 - Si (x,y) non affecté et $|S(x,y) - M_i| < \epsilon$
 - alors $R_i = R_i \cup \{(x,y)\}$
 - $M_i =$ moyenne des pixels dans R_i
- Si au moins un pixel affecté

Méthodes dérivatives



Frontières :

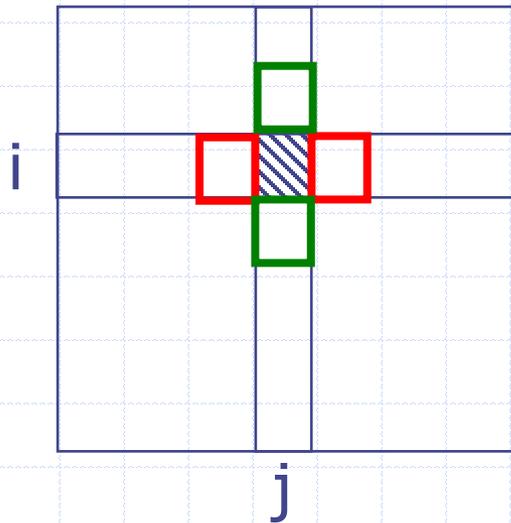
- Extrema du gradient (s') ○
- Passages par zéro du Laplacien (s'') ○

Filtres passe-haut: Gradients



$$g_h(i, j) = f(i+1, j) - f(i-1, j) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

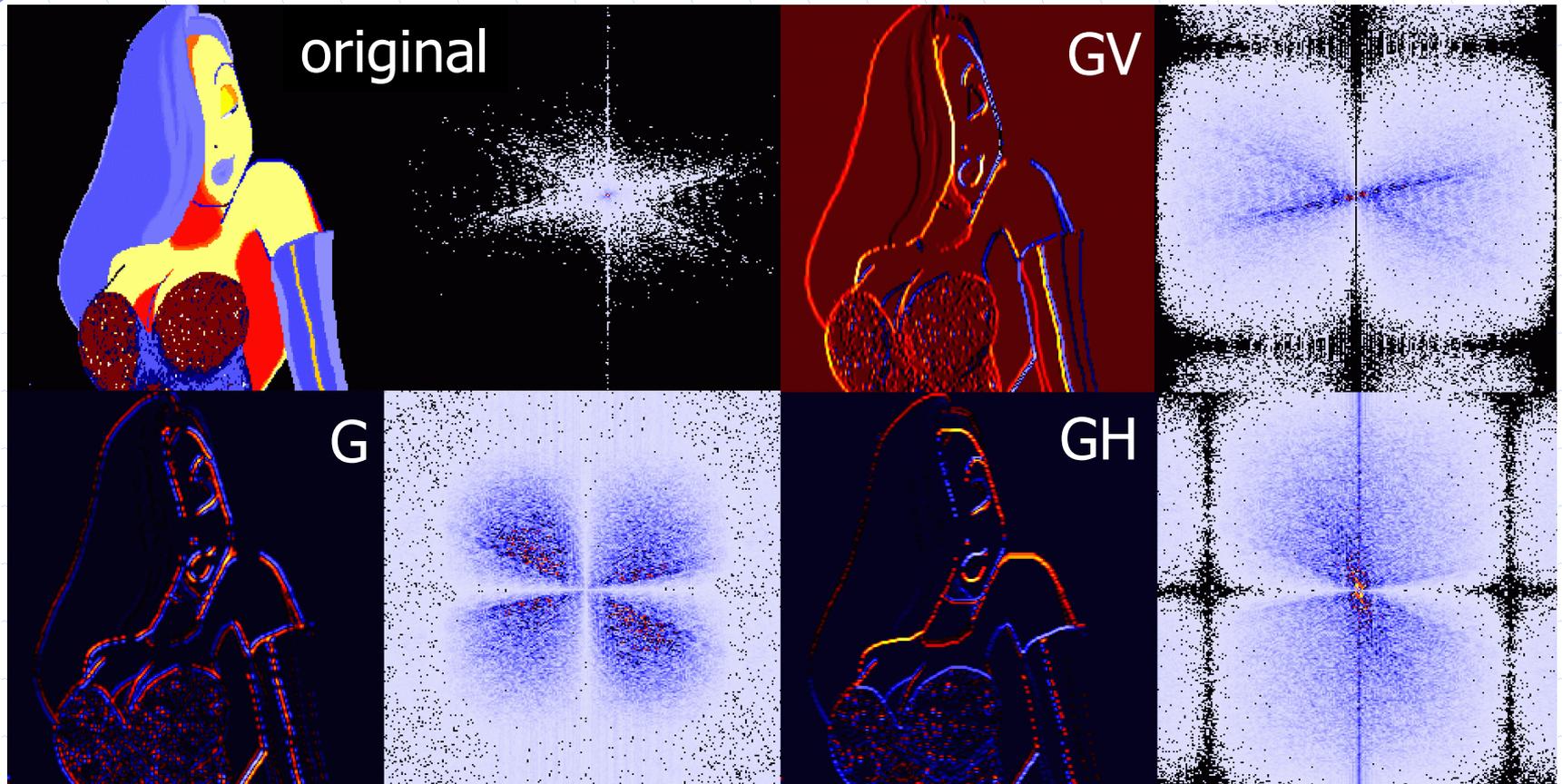
$$g_v(i, j) = f(i, j+1) - f(i, j-1) \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemple de généralisation 2d:

$$G_h = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \quad G_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtres passe-haut: Gradients

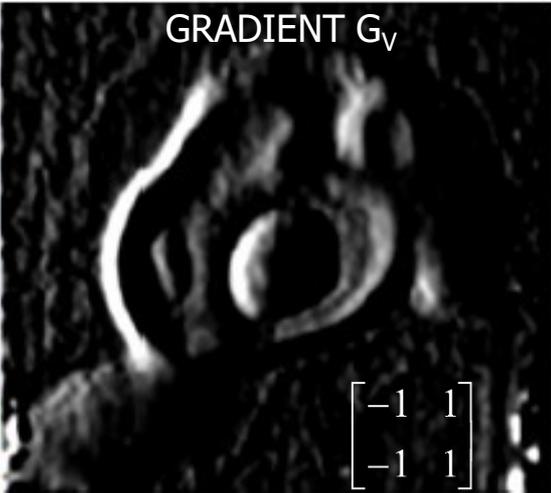


GV (GH) isole les frontières verticales (horizontales)

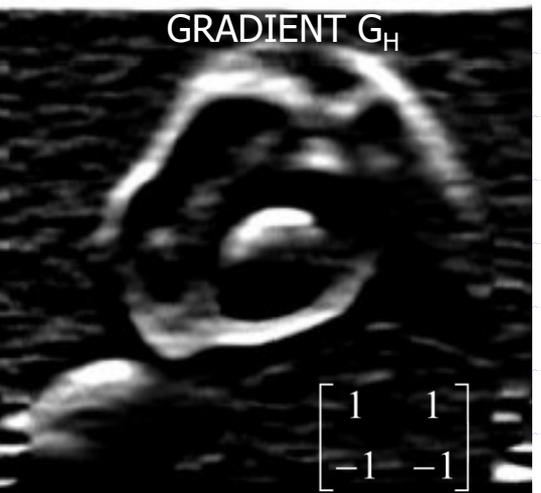
Segmentation par gradient (Canny)



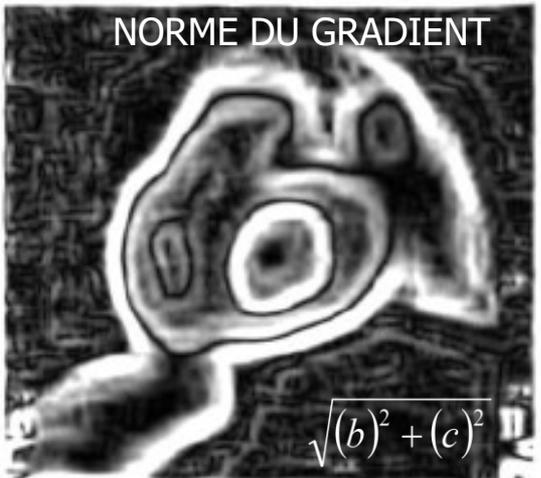
(a)



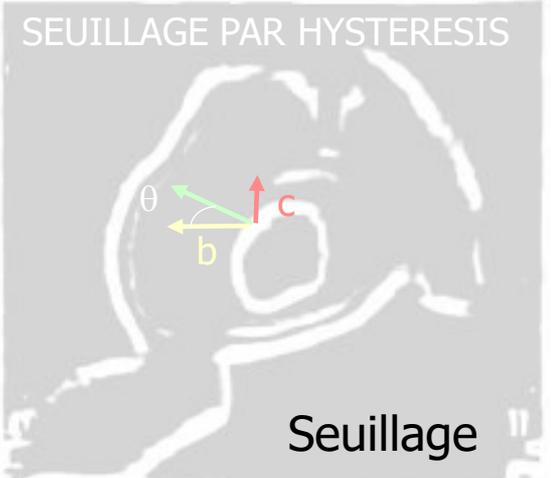
(b)



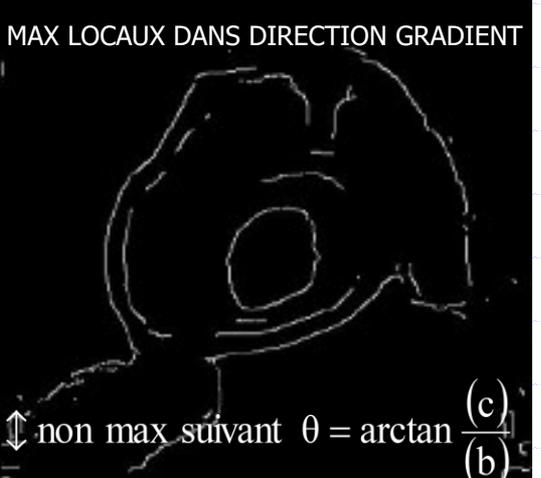
(c)



(d)

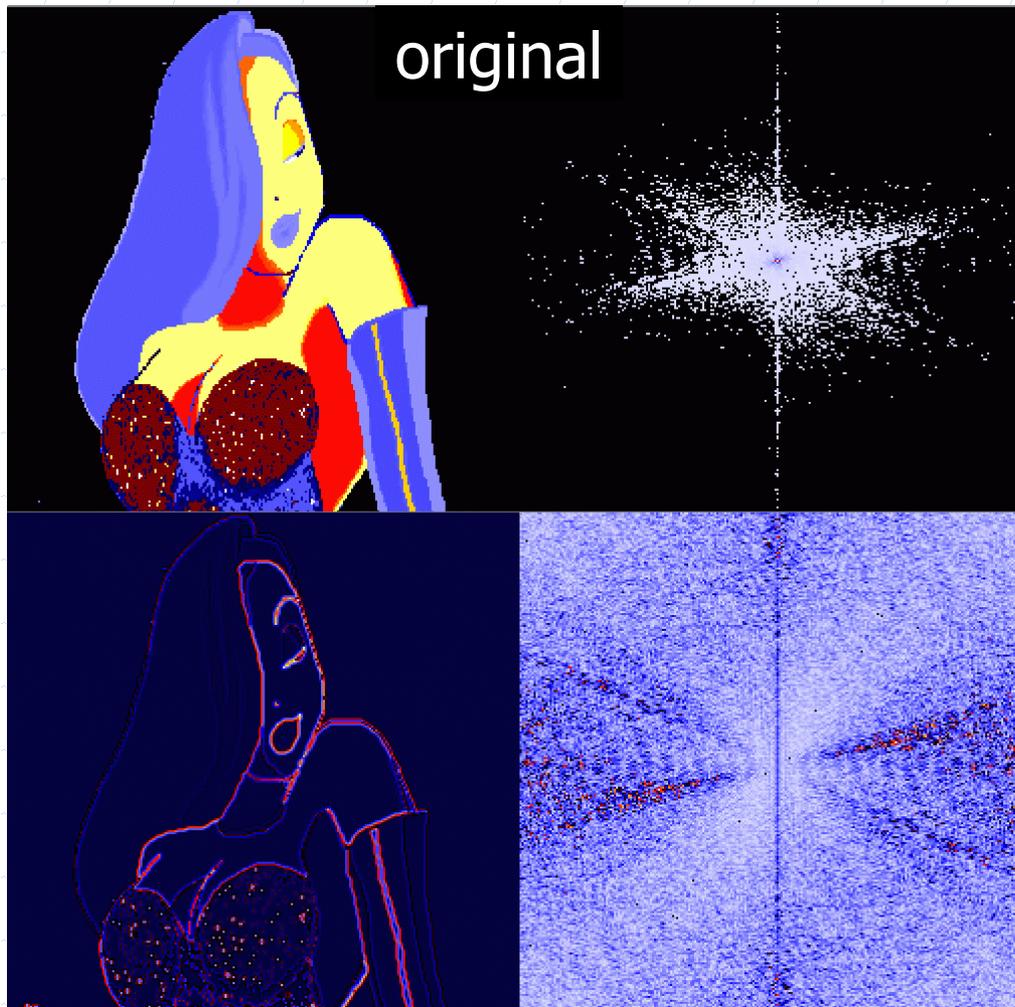


(e)



(f)

Filtres passe-haut: Laplacien



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilisation du Laplacien
en segmentation:

1- Création de l'image
des passages par zéro
pondérés par la norme
du gradient

2- Seuillage par hystérésis

Gradients morphologiques



$$G_B^e(f) = \delta_B(f) - f$$

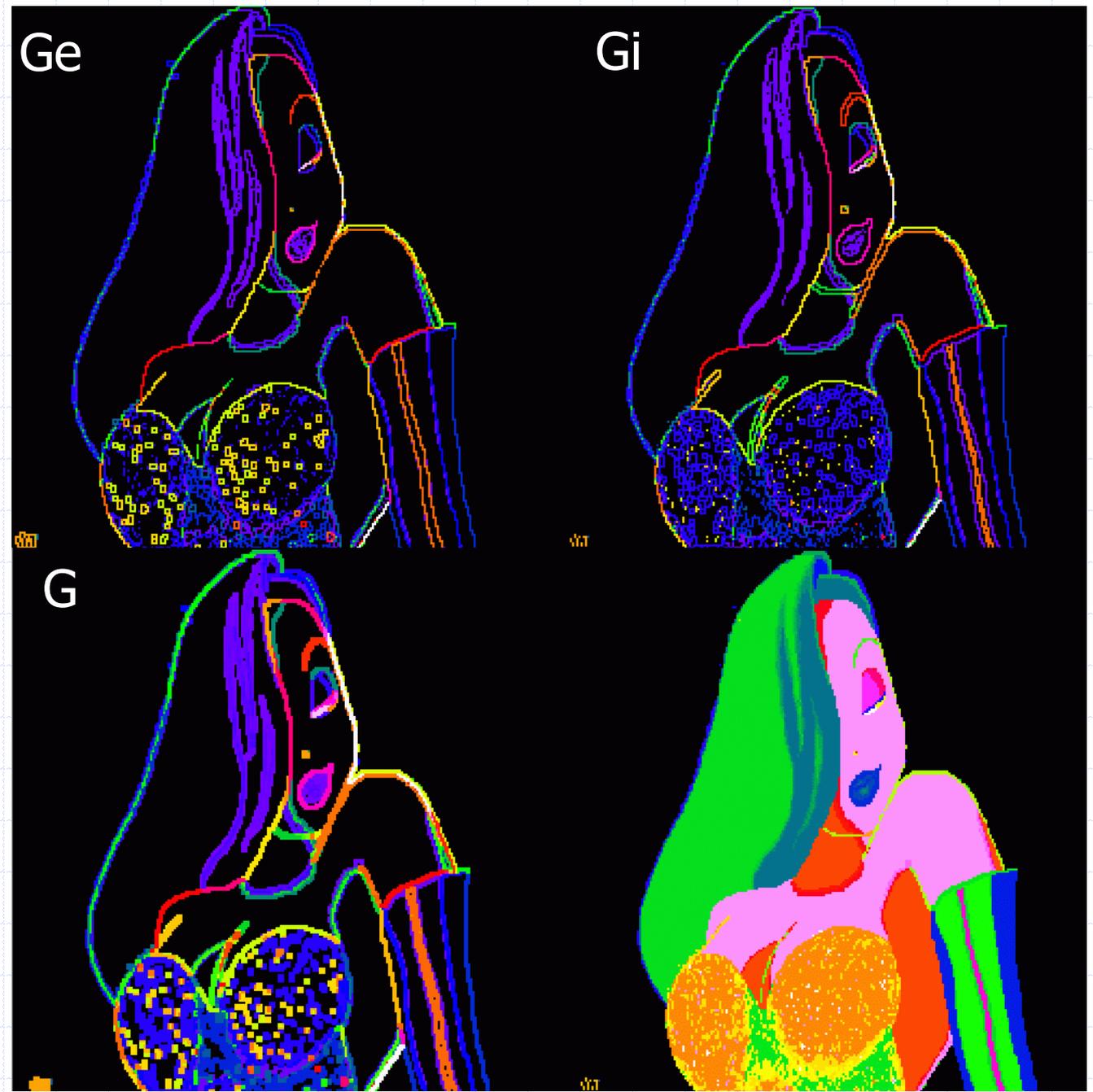


$$G_B^i(f) = f - \epsilon_B(f)$$



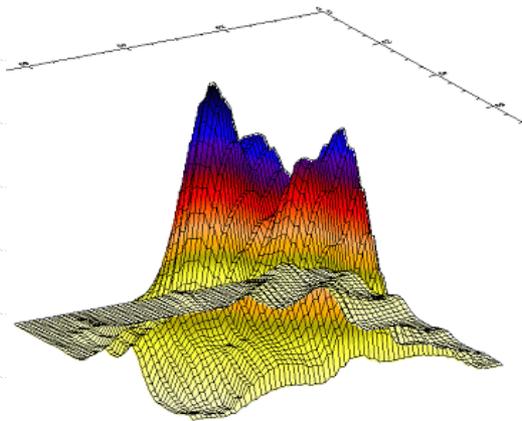
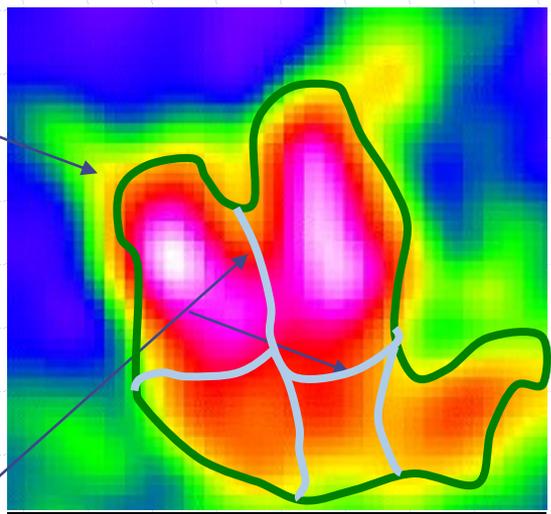
$$G_B(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f)$$

Gradients
morpho-
logiques

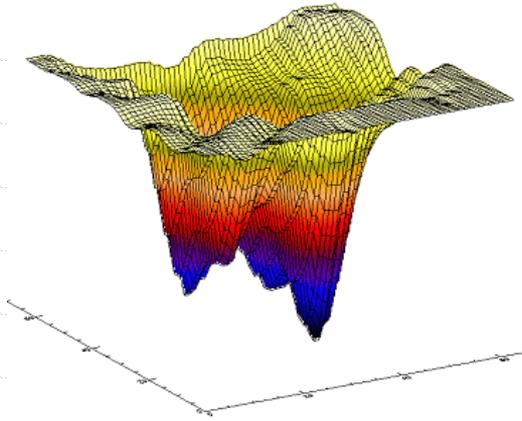
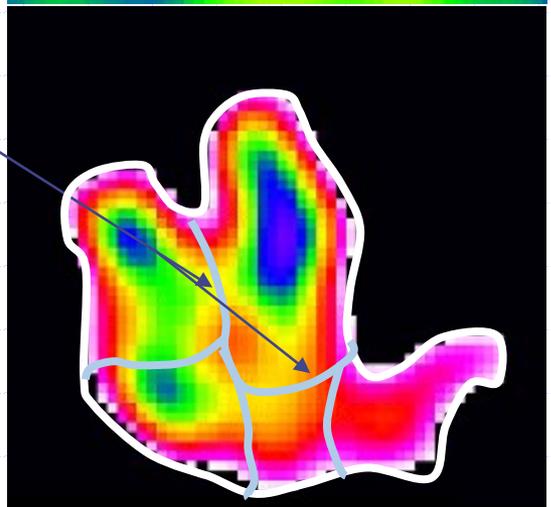


LIGNE DE PARTAGE DES EAUX

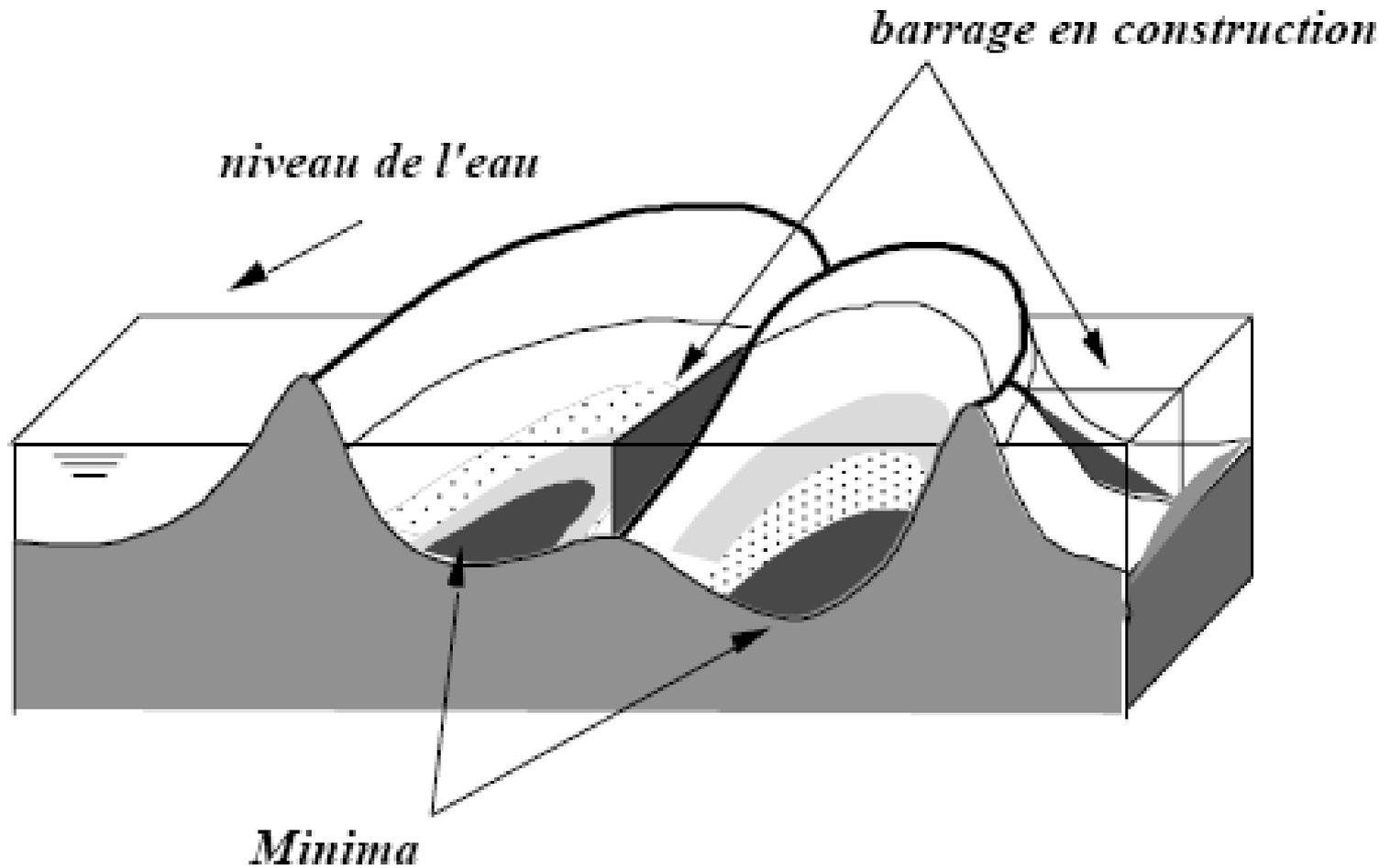
Seuillage pour isoler le fond



Séparation optimale en fonction de l'origine probable du photon issue d'une cavité cardiaque, compte tenu du diffusé



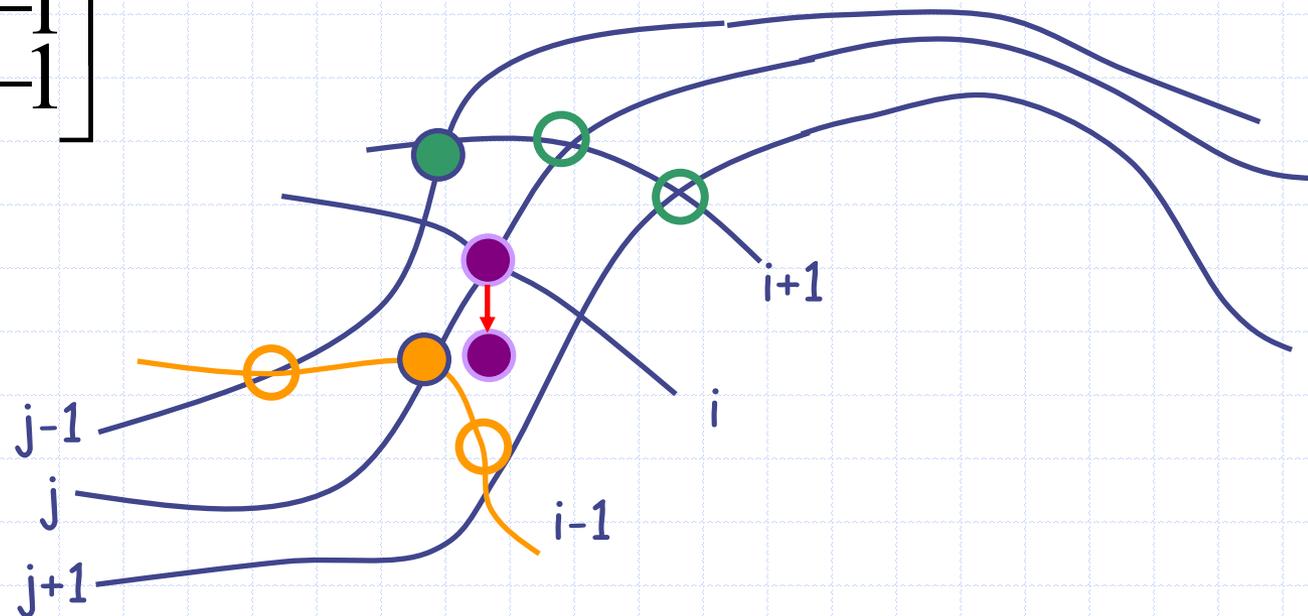
LPE par immersion



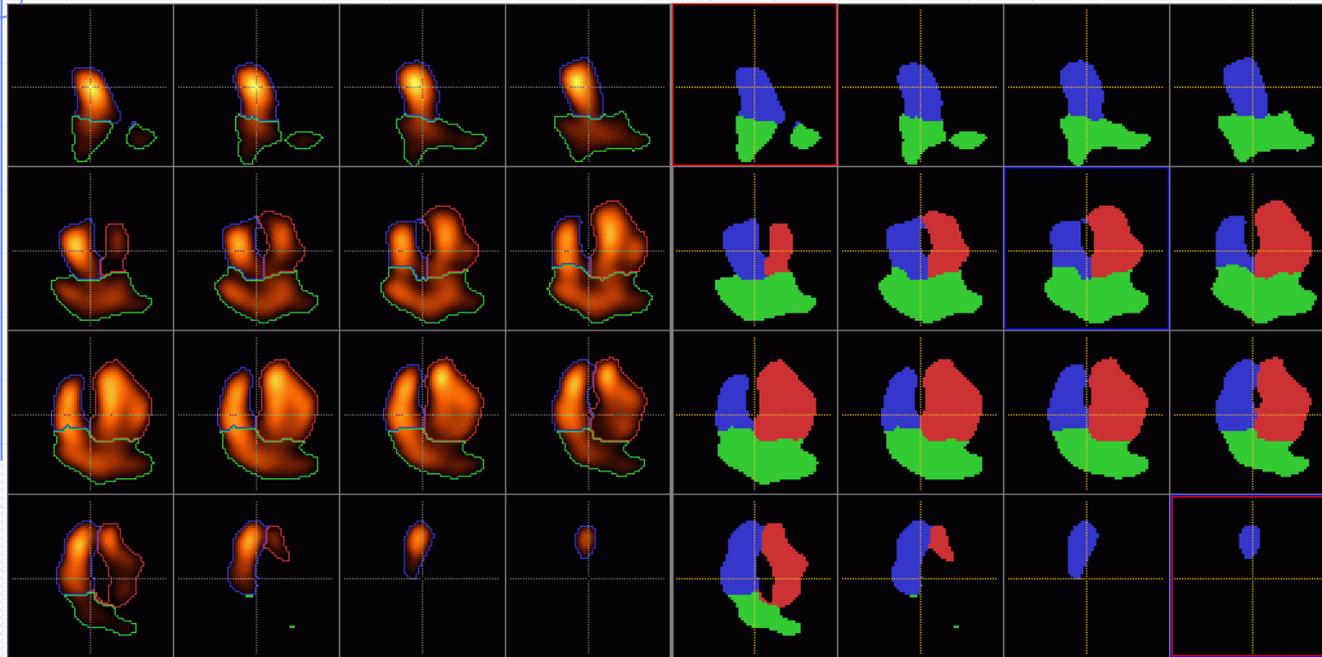
LPE par amincissement homotopique

si $f_{\max} < f(i, j) \leq f_{\min}$ alors $f(i, j) = f_{\max}$

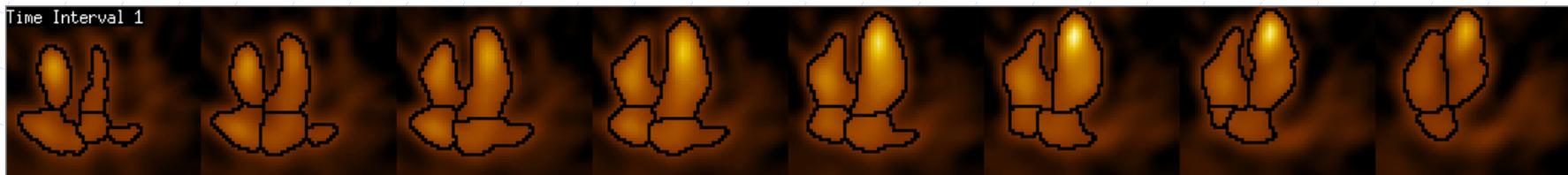
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Résultats



Amincissement homotopique 2D



Immersion 4D



[D112] Pour chaque type d'image, quels algorithmes de segmentation utiliseriez-vous de préférence ?

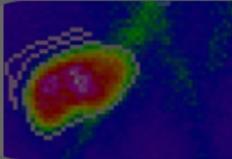


Image SPECT constituée d'un unique foyer isolé...

1

A

Gradient type Canny ou morphologique

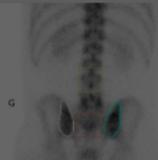


Image SPECT de foyers épars sans trop de bruit

2

B

Croissance de région

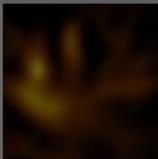


Image SPECT constituée d'organes fixants ...

3

C

Seuillage par hystérésis



IRM (haute résolution, peu de bruit)

4

D

Ligne de partage des eaux

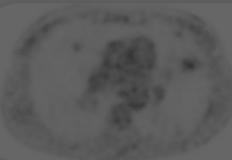


Image SPECT constituée de quelques foyers ...

5

E

Seuillage adaptatif type Daisne

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question



SEGMENTATION

- par seuillages :
 - Choix du seuil, Seuillage par hystérésis
- par croissance de régions
- à partir des dérivées du signal
 - par extrema de gradient
 - par passage par zéro du laplacien
- par gradient morphologique : $\delta-I$, $I-\varepsilon$, $\delta-\varepsilon$...
- Par ligne de partage des eaux
 - immersion
 - amincissements homotopiques

④ RECALAGE D'IMAGES

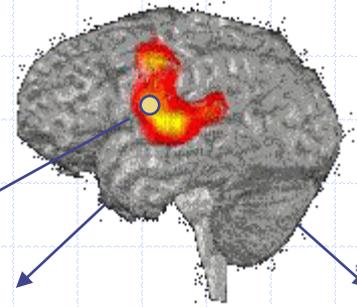
Problématique générale

Algorithmes

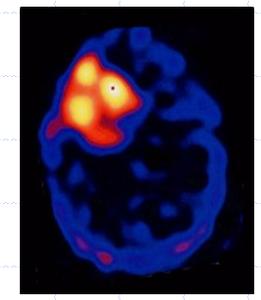
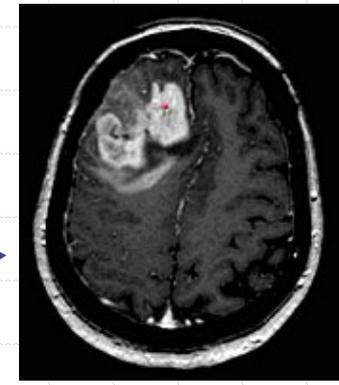
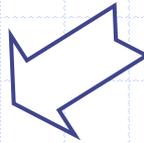
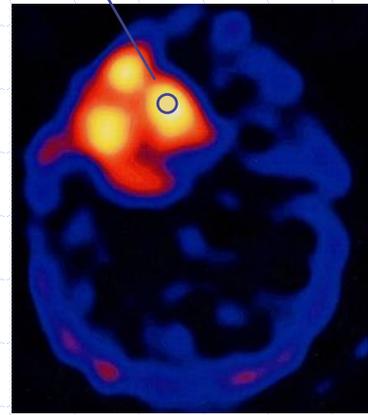
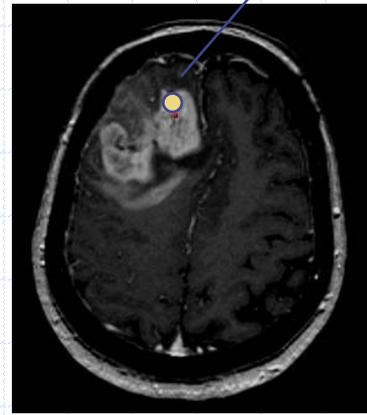
Applications

Problème

modèle

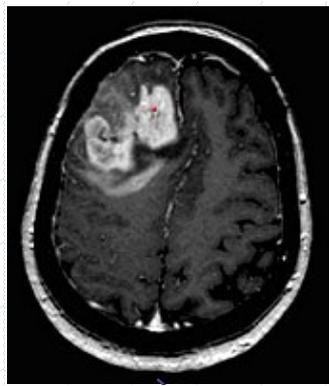


$P(x,y,z)$



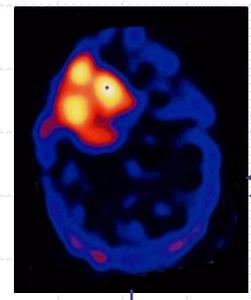
Distorsions ≠
Nature du contraste ≠
Résolution ≠, SLID ?
Bruit ≠, ± dép. signal

Méthode



R : référence

I : image à recaler



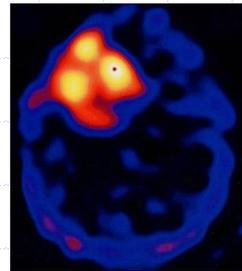
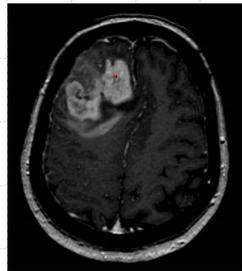
Paramètres de transformation initiaux

Transformation

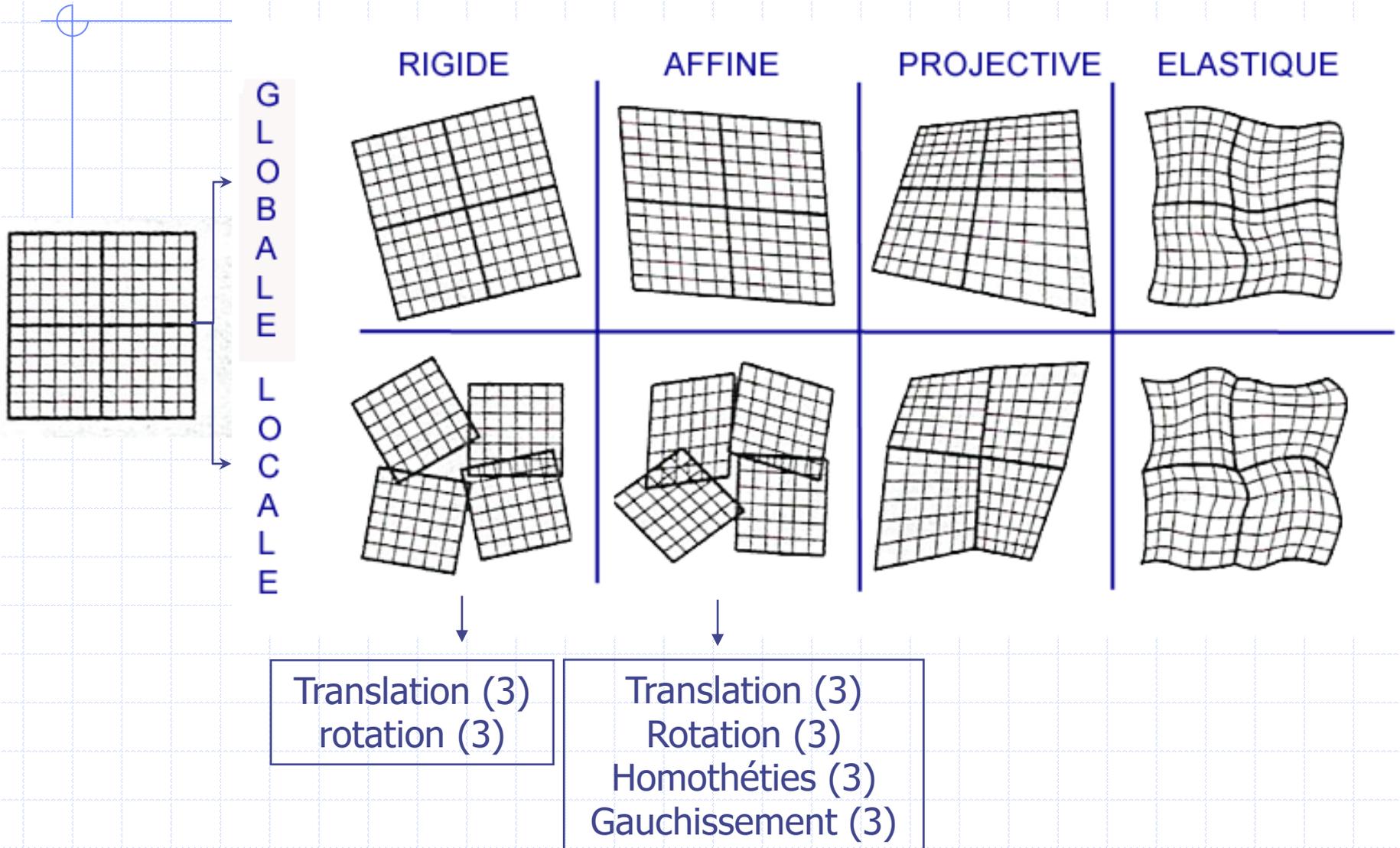
Mesure de similarité

Maximale ?
oui non

Optimisation des paramètres de transformation



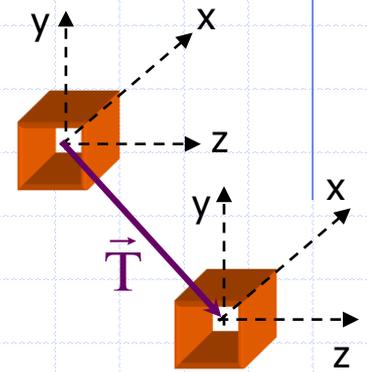
Transformations T



Transformations rigides

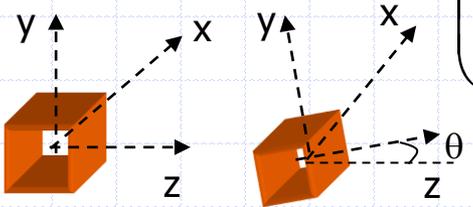
Translation

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + T_x \\ y_1 + T_y \\ z_1 + T_z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Rotation

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x & 0 \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cos\theta_x \cdot y_1 + \sin\theta_x \cdot z_1 \\ -\sin\theta_x \cdot y_1 + \cos\theta_x \cdot z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$z_1 = r \cdot \cos \varphi$$

$$z_2 = r \cdot \cos(\varphi + \theta)$$

$$z_2 = r \cdot [\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta]$$

$$z_2 = r \cdot \left[\frac{z_1}{r} \cos \theta - \frac{y_1}{r} \sin \theta \right]$$

$$z_2 = z_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta$$

$$y_1 = r \cdot \sin \varphi$$

$$y_2 = r \cdot \sin(\varphi + \theta)$$

$$y_2 = r \cdot [\sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi]$$

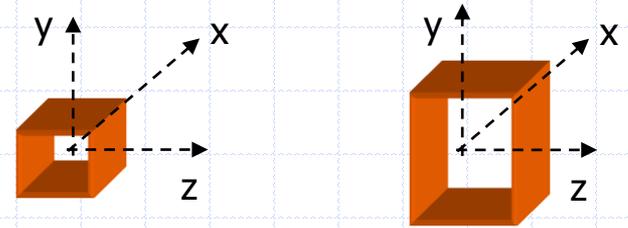
$$y_2 = r \cdot \left[\frac{y_1}{r} \cos \theta + \sin \theta \frac{z_1}{r} \right]$$

$$y_2 = y_1 \cos \theta + z_1 \sin \theta$$

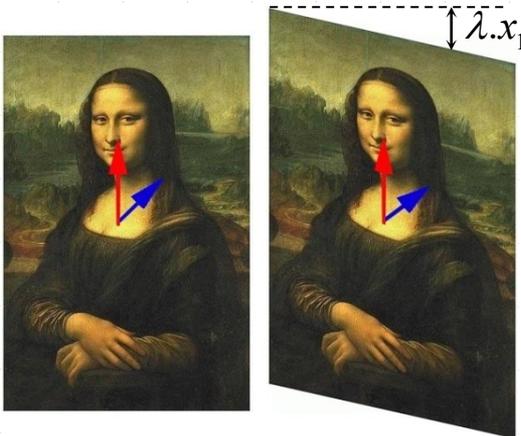
Transformations affines

- Translation
- Rotation
- Homothétie

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x \cdot x_1 \\ H_y \cdot y_1 \\ H_z \cdot z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Gauchissement



$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + \lambda \cdot x_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mesures de similarité S , sur...

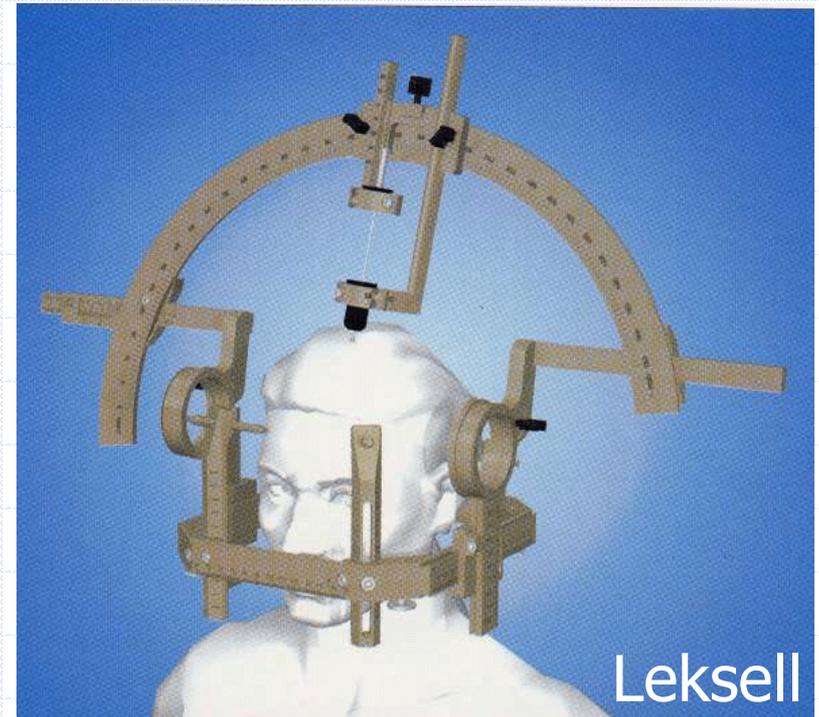
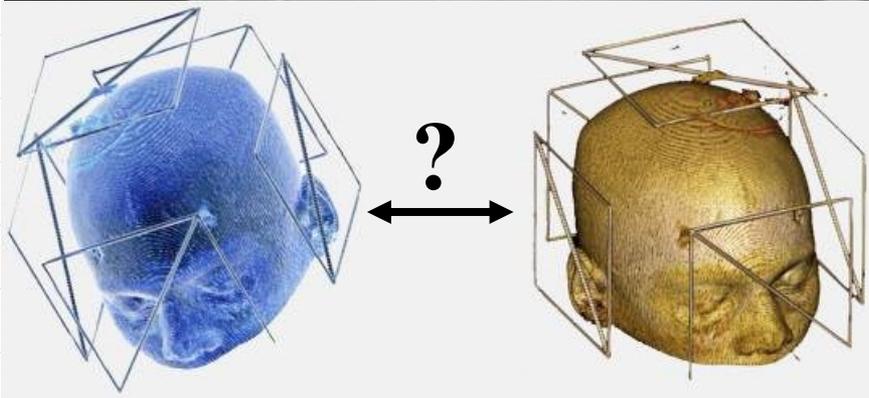
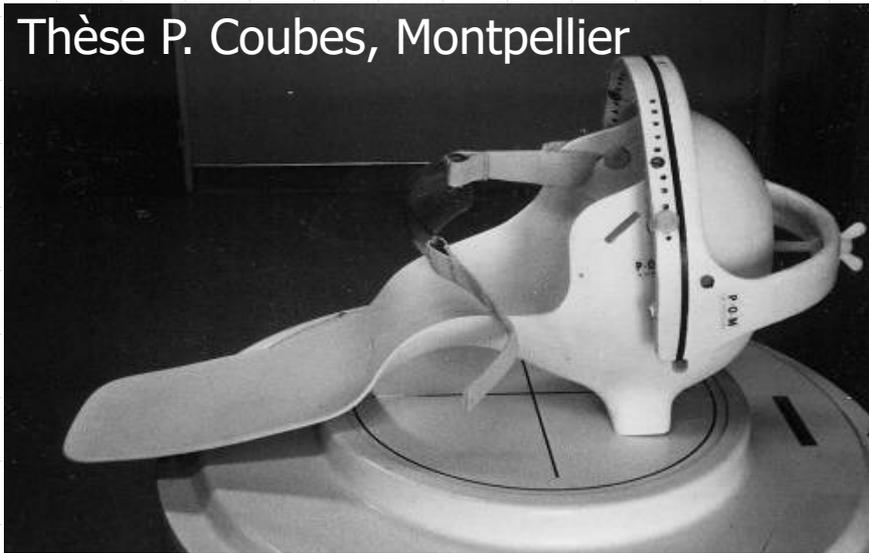
$$T = \arg \max_{T \in E} S[\{V^R\}; \{T(V^I)\}]$$

- des marqueurs :
 - artificiels externes ou frontières anatomiques
- les valeurs des voxels
 - différences, variances, corrélations,...
- Une information mutuelle...

Marqueurs

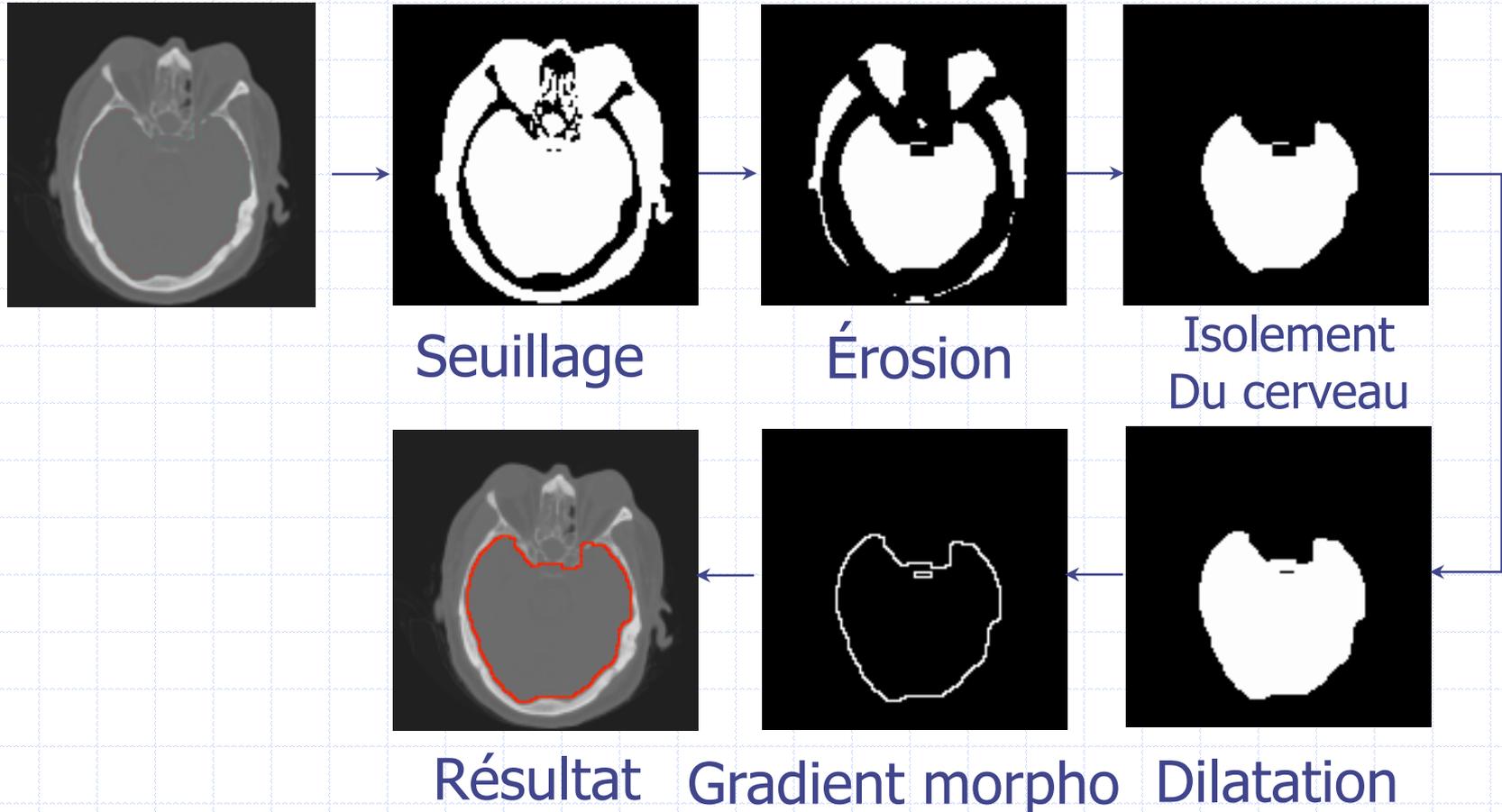
$$S[\{\mathbf{V}^R\}; \{\mathbf{T}(\mathbf{V}^I)\}] = -\sum_m \|\mathbf{V}_m^R - \mathbf{T}(\mathbf{V}_m^I)\|$$

Thèse P. Coubes, Montpellier

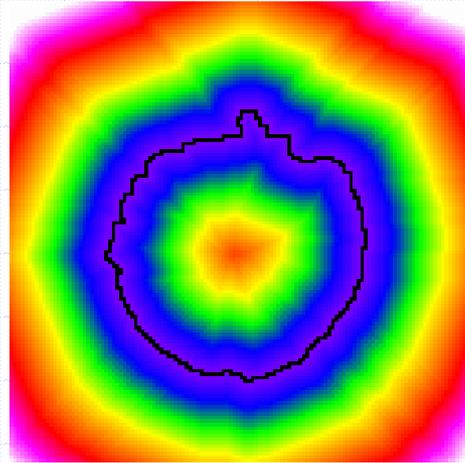
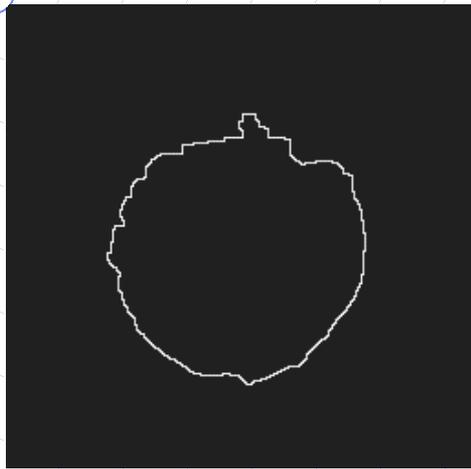


Leksell

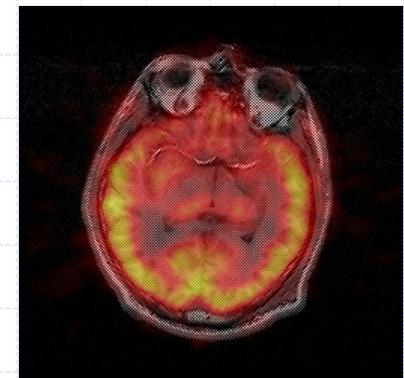
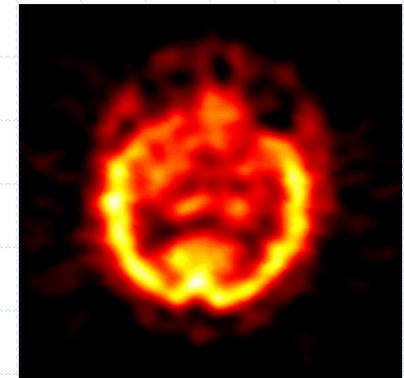
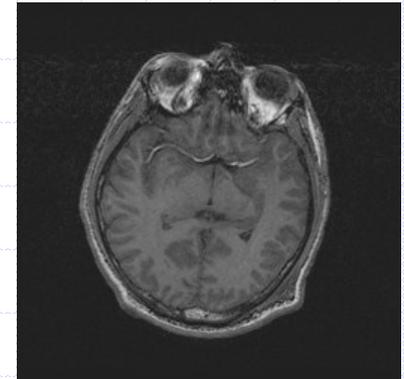
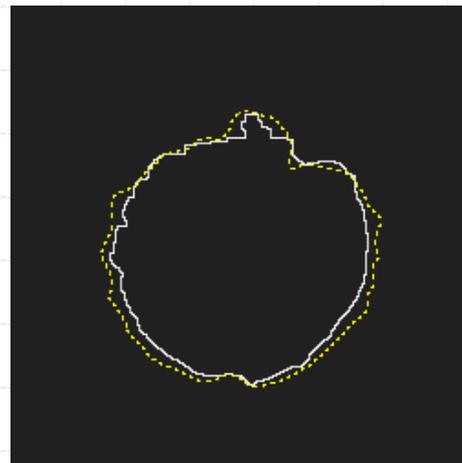
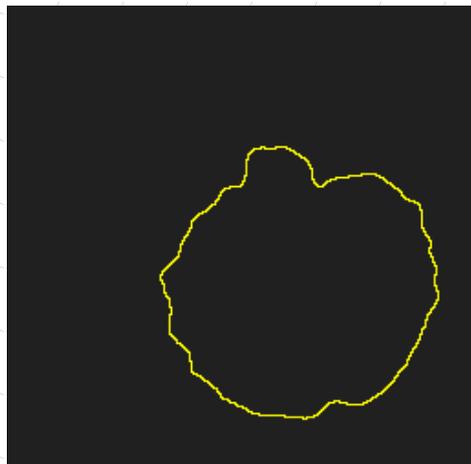
Extraction des frontières



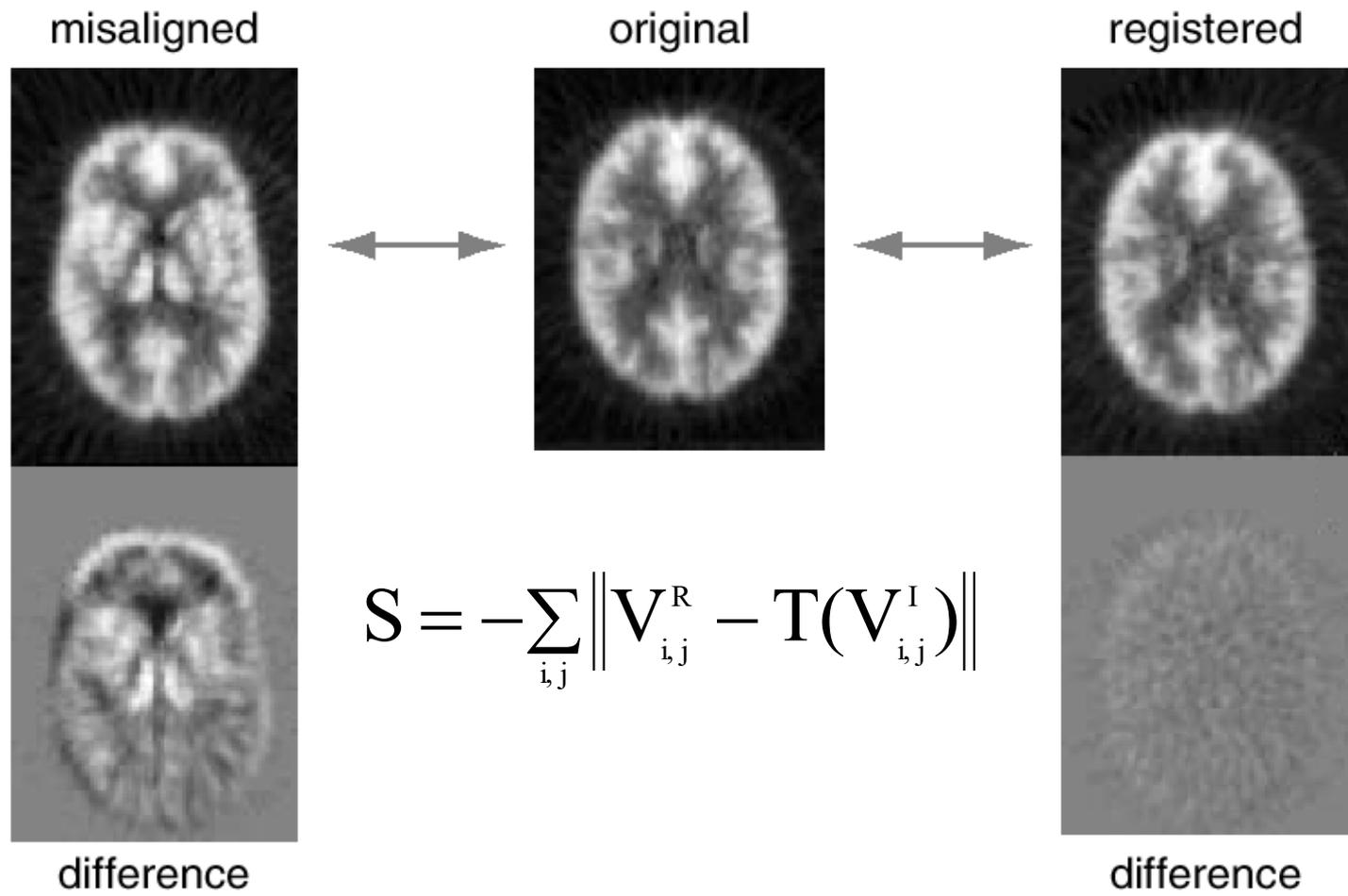
Recalage des frontières



Chanfrein ↓



Différence d'intensité



Alternative : différences de variances

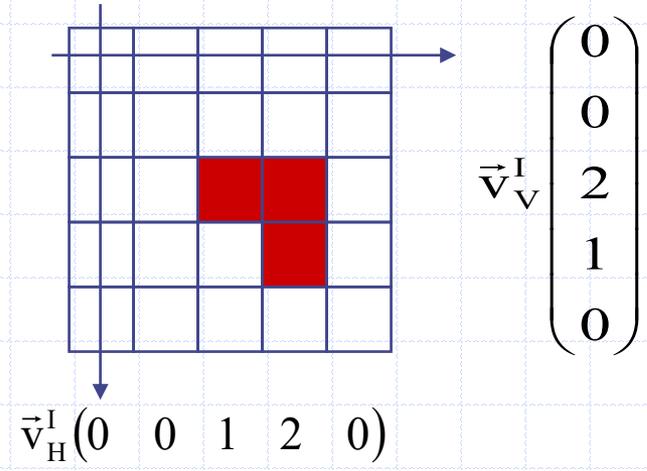
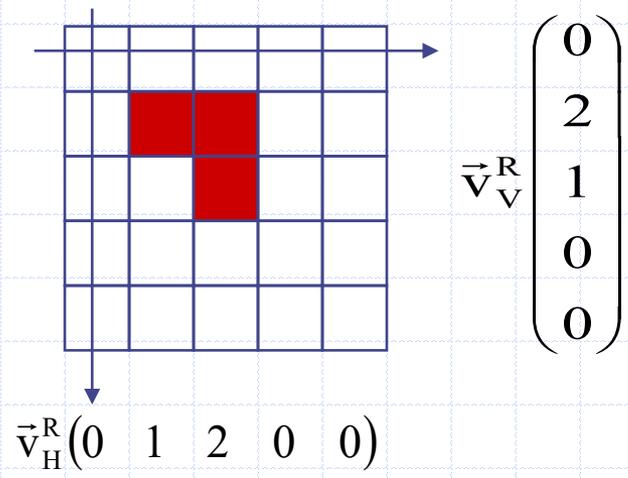
Inter-corrélation maximale

$$r = \frac{\sum_j (V_j^R - \overline{V^R})(T(V_j^I) - \overline{T(V^I)})}{\sqrt{\sum_j (V_j^R - \overline{V^R})^2 \cdot \sum_j (T(V_j^I) - \overline{T(V^I)})^2}}$$

$$r = \frac{\sum_j V_j^R \cdot T(V_j^I) - N \cdot \overline{V^R} \cdot \overline{T(V^I)}}{\sigma_{V^R} \cdot \sigma_{T(V^I)}}$$

$$S = \sum_j V_j^R \cdot T(V_j^I)$$

Exemple : translation d'images



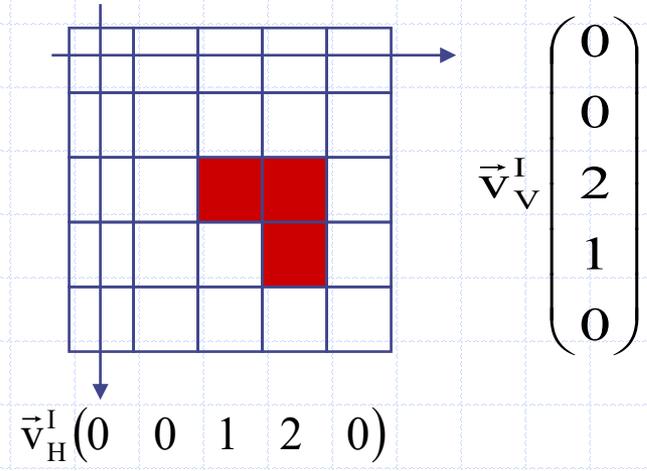
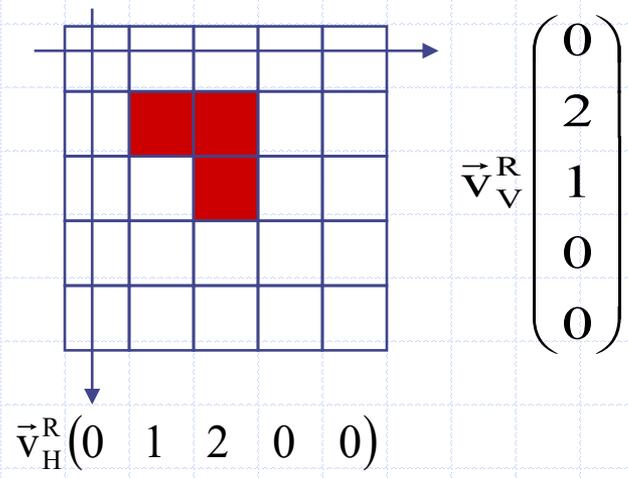
$$IC_H(k) = \sum_j v_H^R(j) \cdot v_H^I(j-k)$$

Décalage à droite de k

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

↘ 2

Exemple : translation d'images



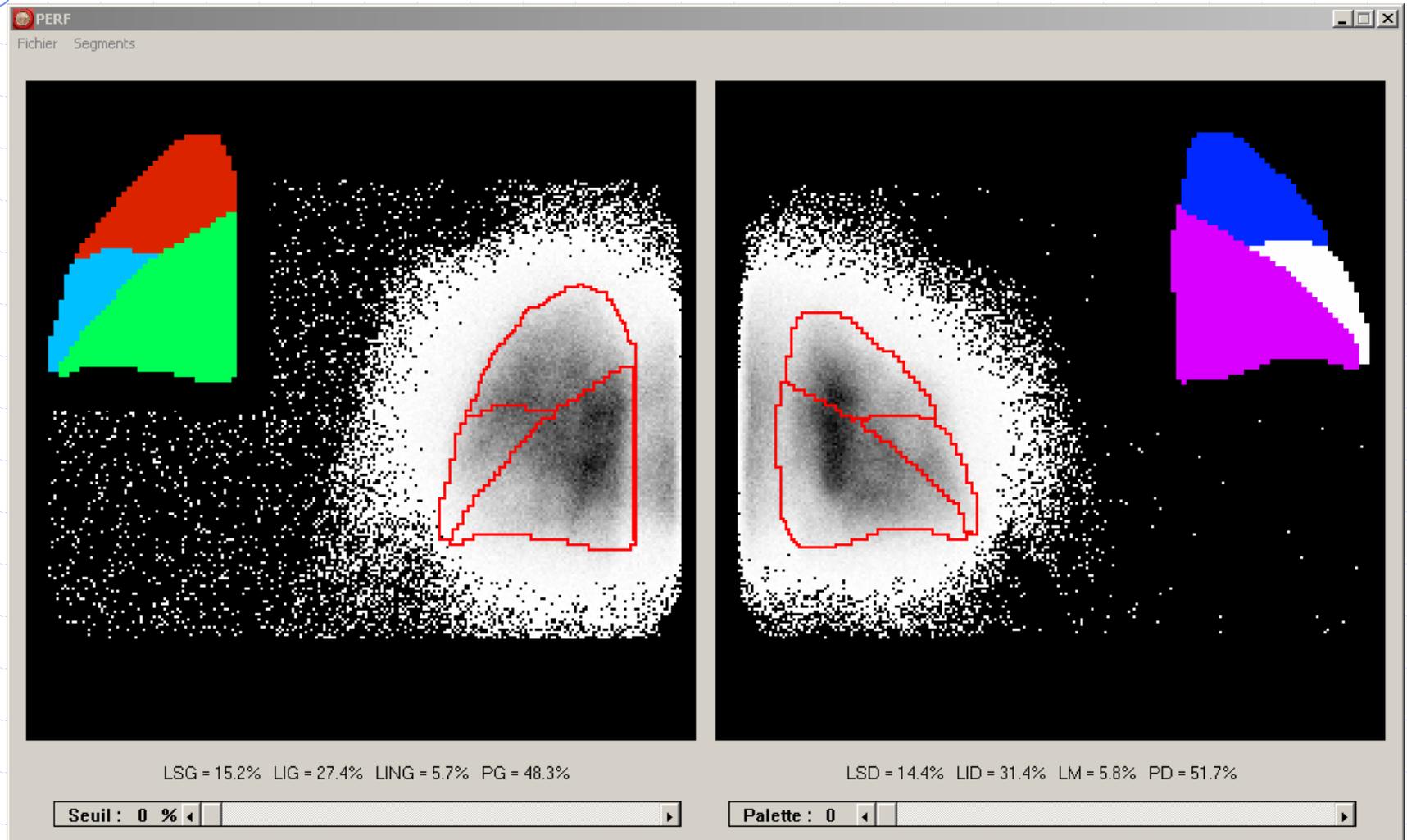
$$IC_H(k) = \sum_j v_H^R(j) \cdot v_H^I(j-k)$$

Décalage à droite de k

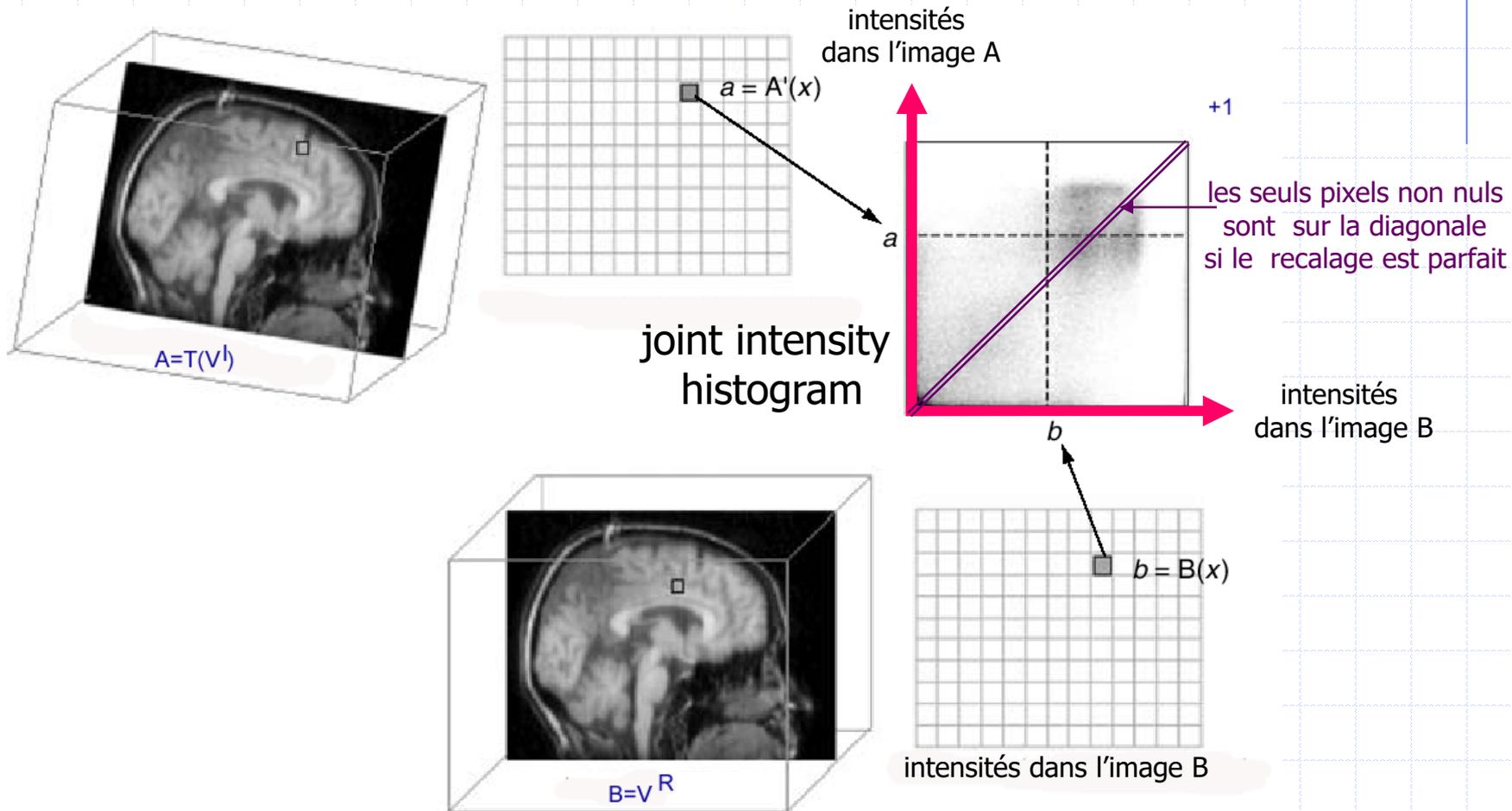
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow k = -1$$

↘ 5

Intercorrélation maximale



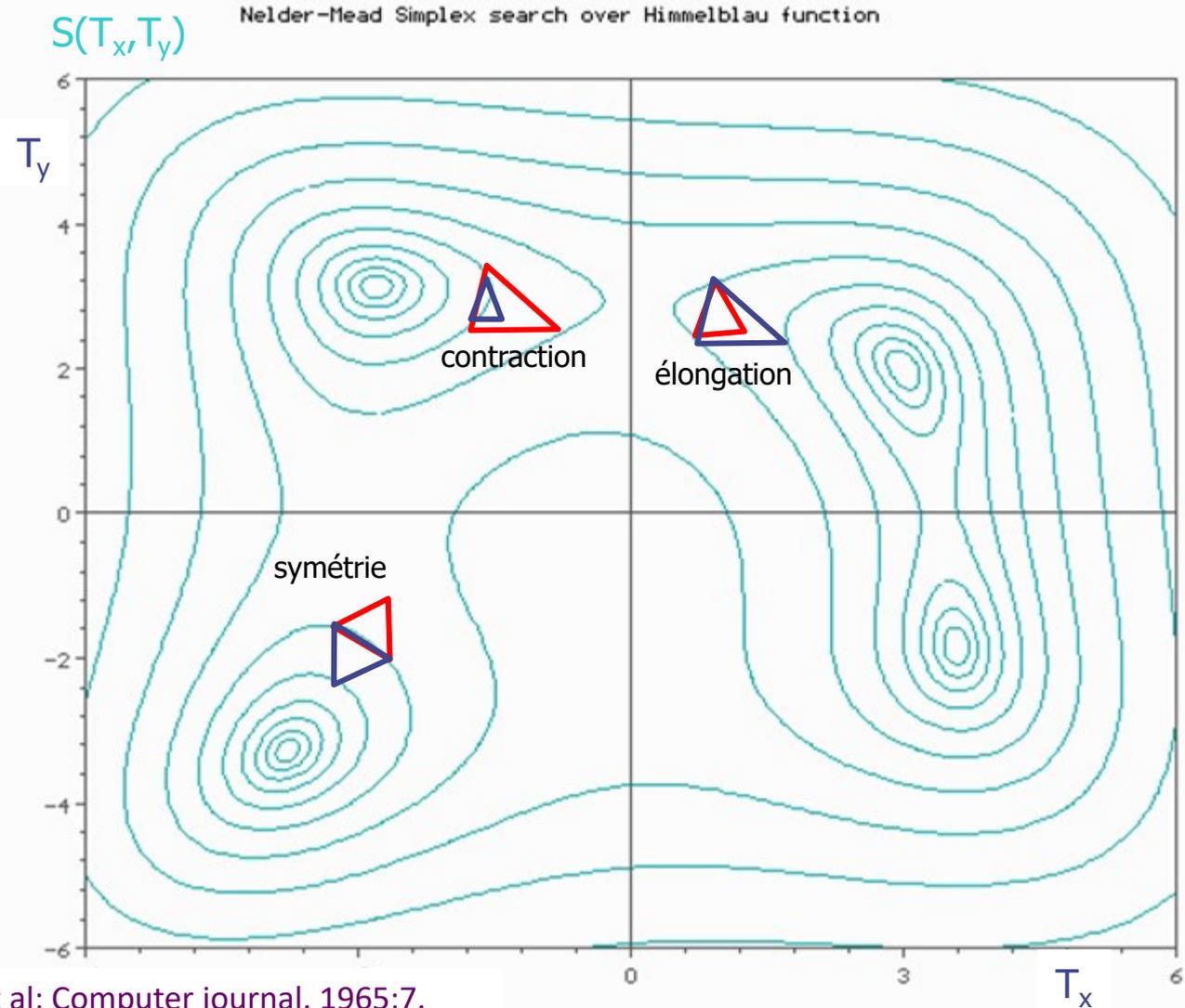
Information mutuelle



Optimisation

- Au moyen d'un programme capable d'optimiser la mesure de similarité en ajustant itérativement les paramètres géométriques du recalage
- Méthodes avec gradient
 - Gradient conjugué, Levenberg-Marquardt...
 - BFGS, KNITRO...
- Méthodes sans gradient
 - Powell: succession d'optimisations 1D
 - Simplex

Optimisation: simplex

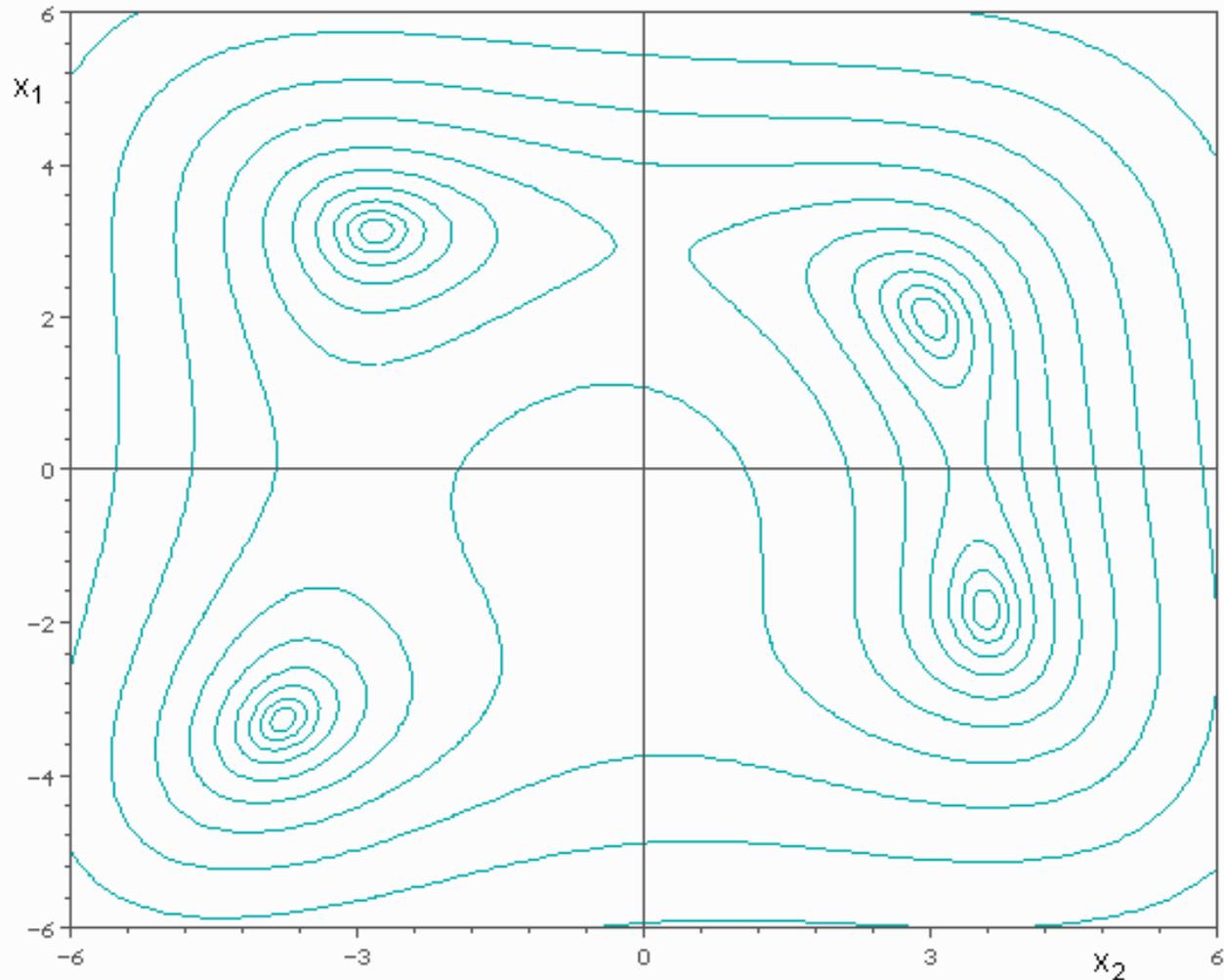


N paramètres à ajuster

Simplex = polygone à $N+1$ côtés dont on déplace le sommet de valeur maximale pour aller stabiliser le simplex sur un minimum de la fonction à optimiser.

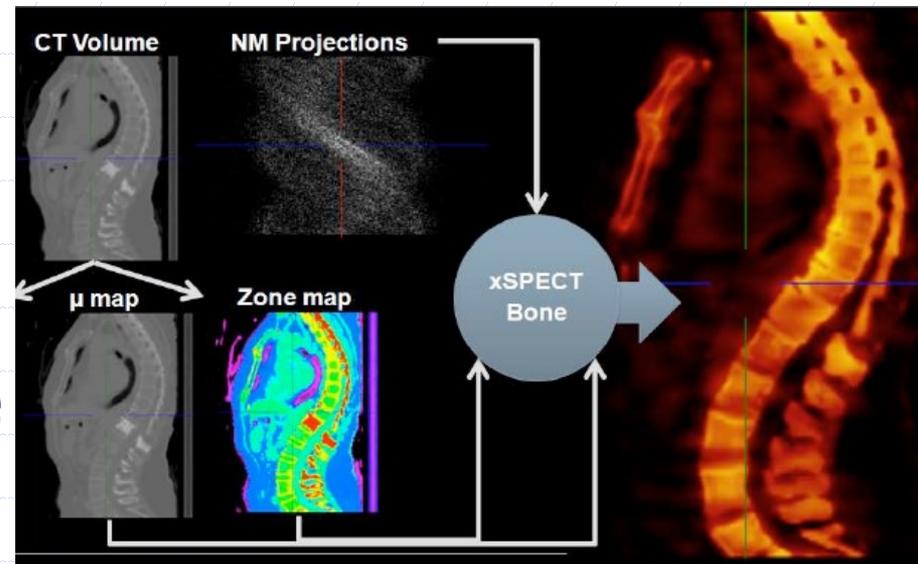
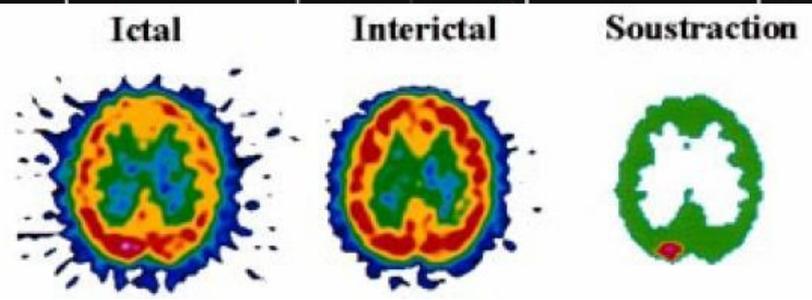
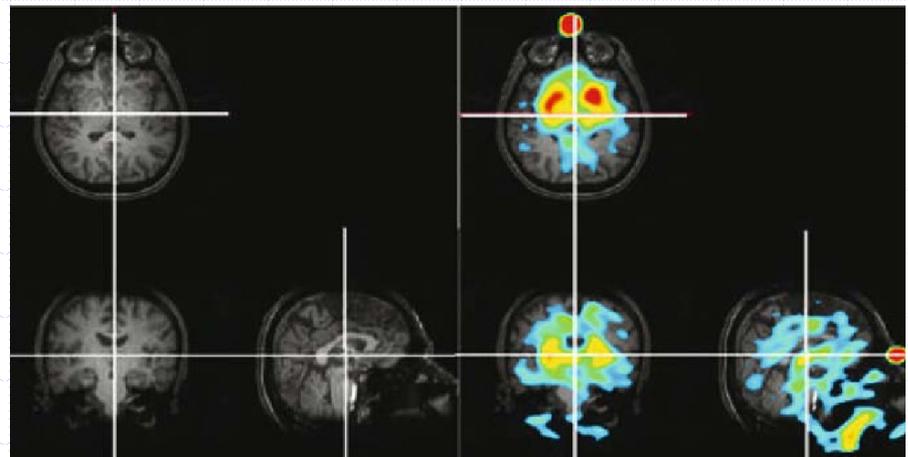
Optimisation: simplex

Nelder-Mead Simplex search over Himmelblau function

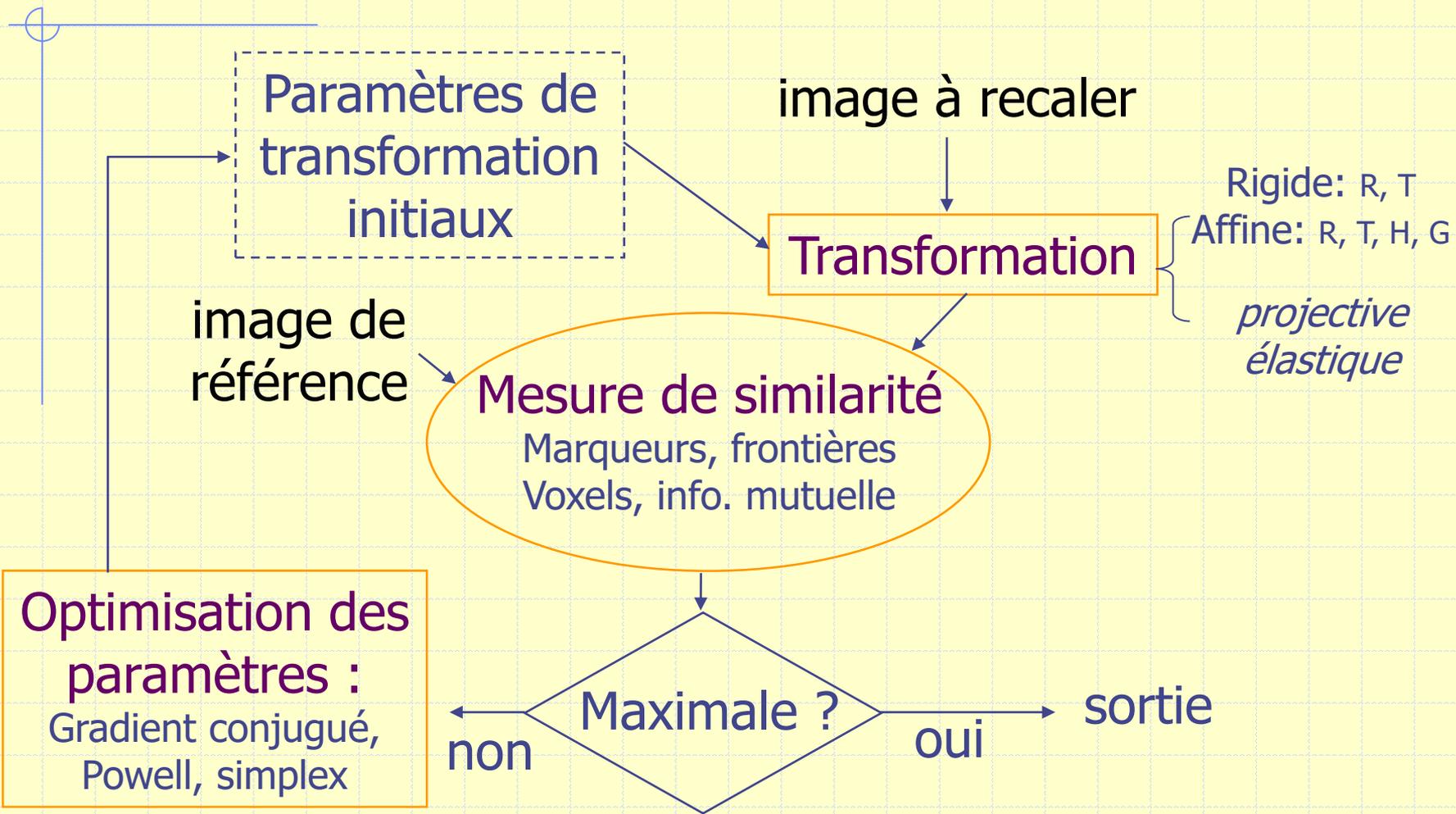


Applications

- Morpho-fonctionnel
 - diagnostic (traceurs spé)
 - thérapeutique
- Atlas anatomique
- Comparaison de traceurs
 - neuro, cardio, pneumologie
 - parathyroïdes
- Suivi d'un patient
- SPM
- Correction d'artefacts
 - vol. partiel, atténuation
 - mouvement...
- Reconstruction multimodale
 - xSPECT-Bone®



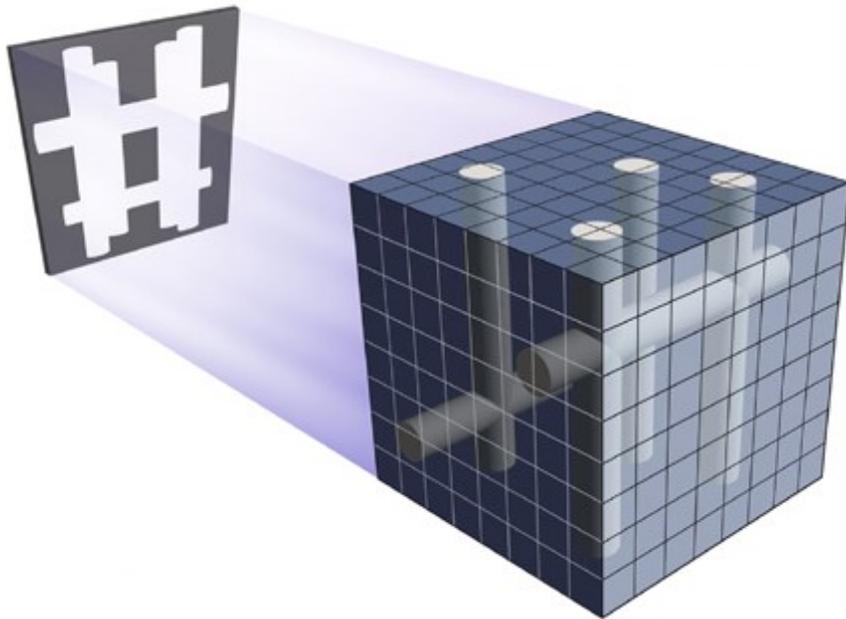
RECALAGE



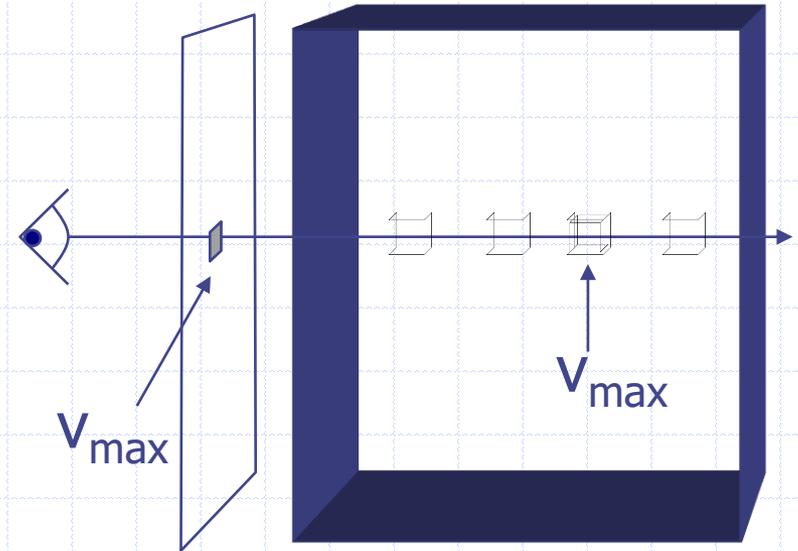
⑤ RENDU DE VOLUME & DE SURFACE 3D

MIP et rendu de volume
Rendu de surface

MIP : Maximum Intensity Projection

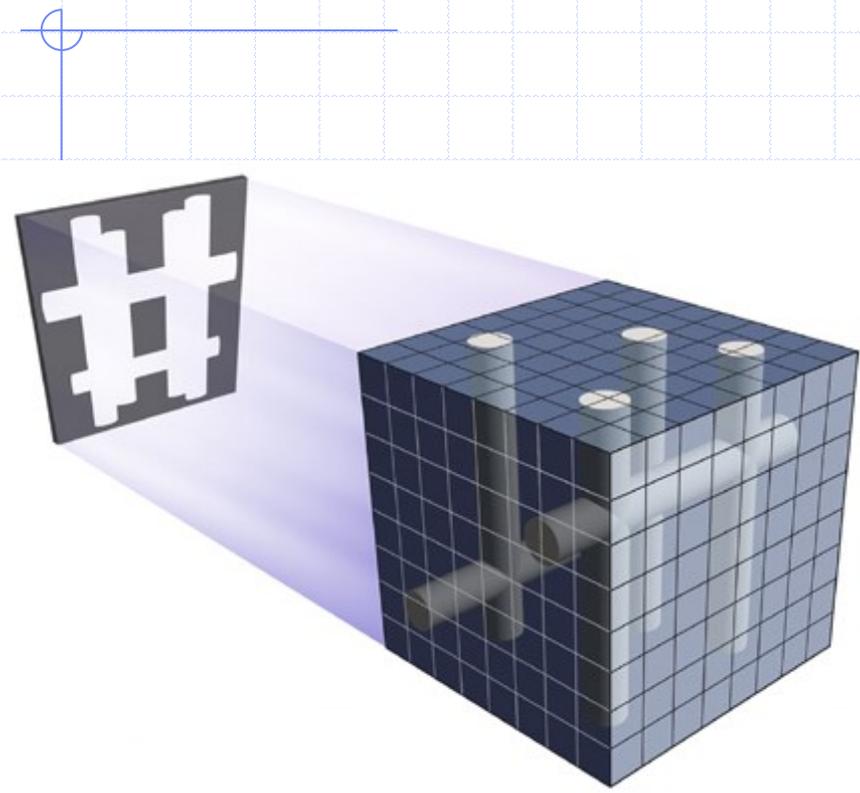


MIP

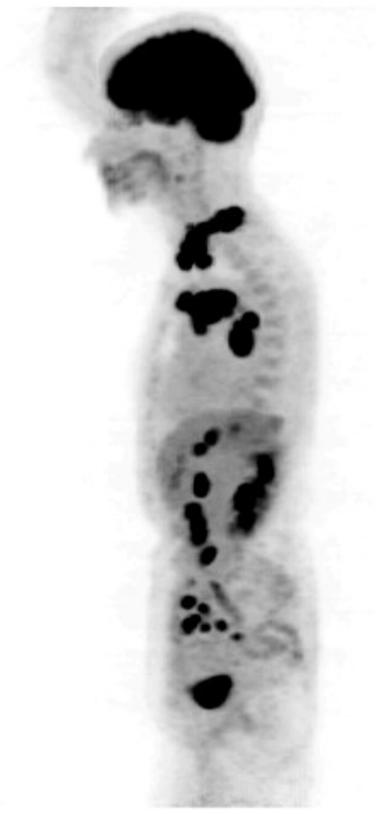


Perte de l'information non maximale suivant une direction de projection

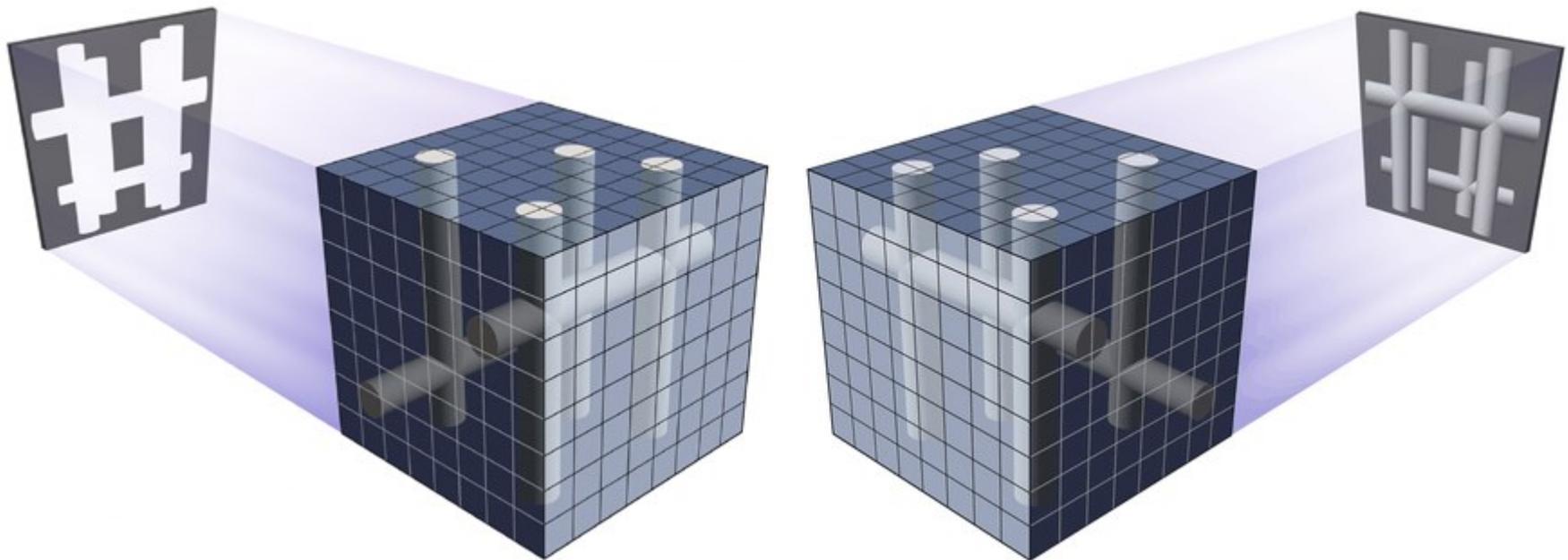
MIP



MIP



MIP \neq Rendu de volume



MIP:
seul le maximum
d'un rayon est projeté

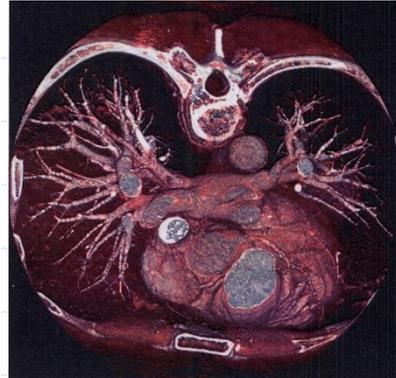
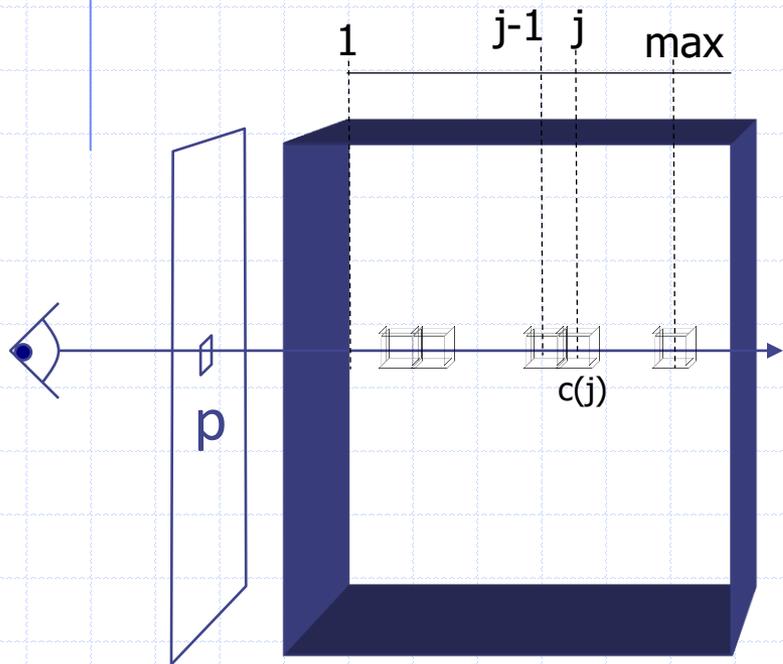
RENDU DE VOLUME :
Tous les pixels pondérés d'un rayon
(transparence, brillance...) sont projetés

Rendu de volume

$$C(p) = \sum_{j=1}^{\max} c(j) \cdot \text{Contribution}(j)$$

$$\text{Contribution}(j) = \alpha(j) P(L, j) \prod_{k=0}^{j-1} [1 - \alpha(v_k)]$$

Opacité: $\alpha(j) \in [0,1]$ Brillance Transparence d'aval



M. Boehm, thèse Mines Paris, 2004

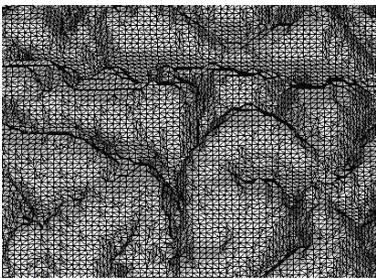
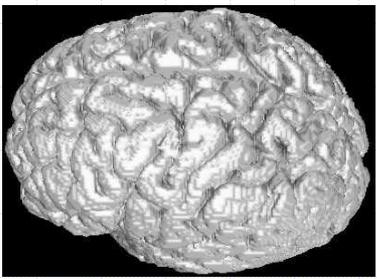
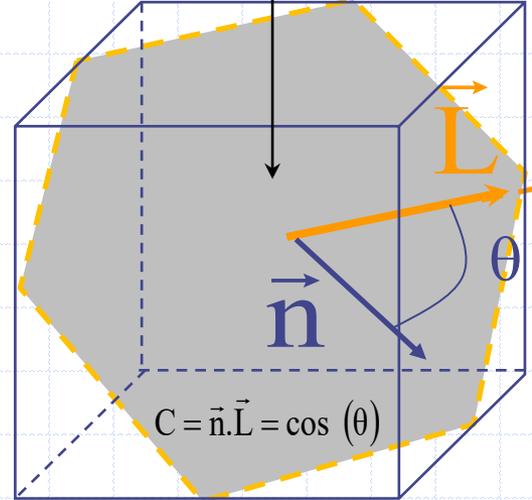
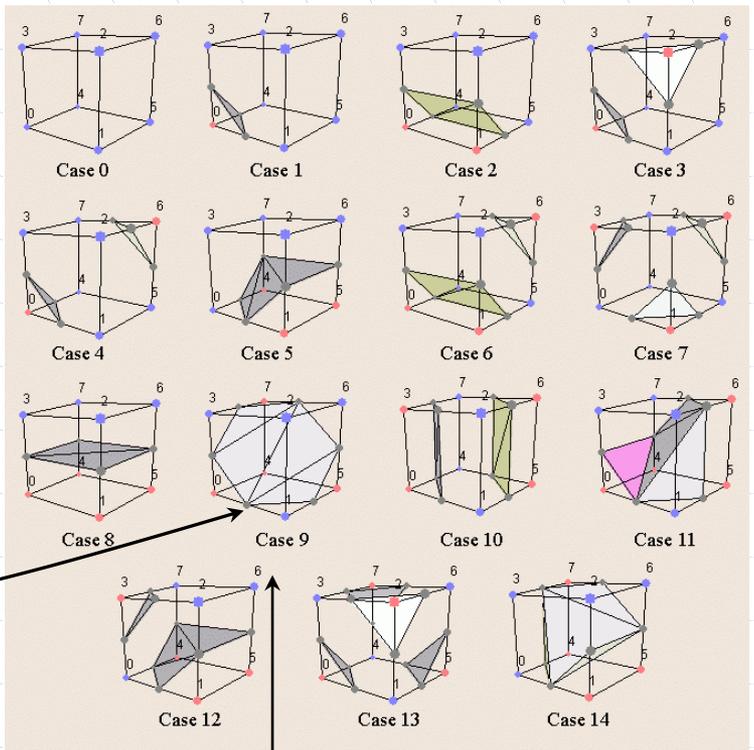
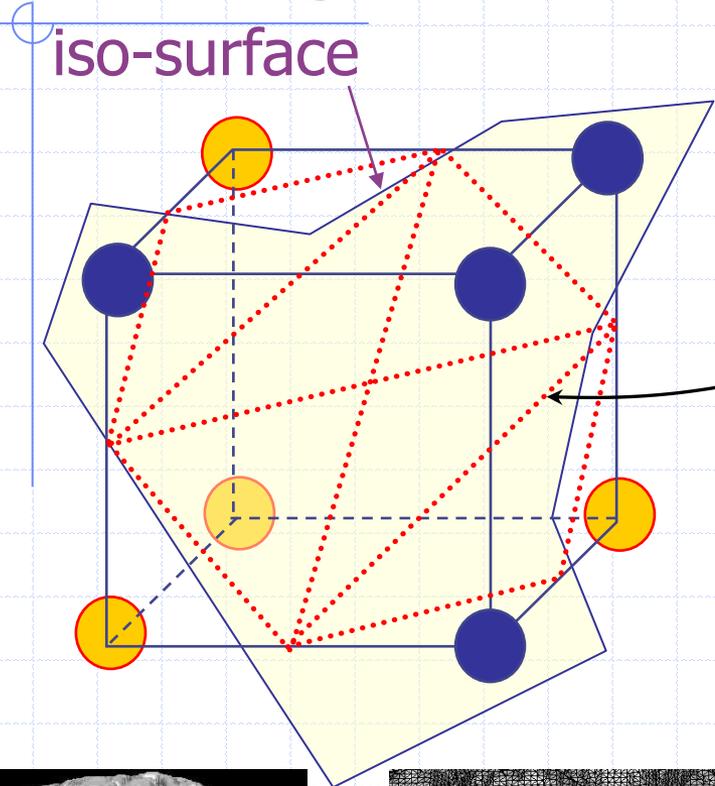
Rendu de surface

Il s'agit de projeter sur un plan
La surface opaque d'un espace 3D:
cerveau, os, poumon, vasculaire...



- extraction d'isosurfaces (marching cubes)
- lancé de rayons (ray casting)
- volume splatting
- shear wrap
- Texture mapping (GPU) ...

Marching cubes



VISUALISATION 3D

- Algorithme de construction d'une image MIP
 - Masque d'éventuelles hyperfixations
 - Utile pour une vue d'ensemble à condition de générer des projections sur 360°.
- Notions de MIP, rendu de volume et rendu de surface
- MIP utile surtout dans l'analyse de la surface de certains organes :
 - cerveau, poumon, reins, squelette

10 NOTIONS A MAITRISER :

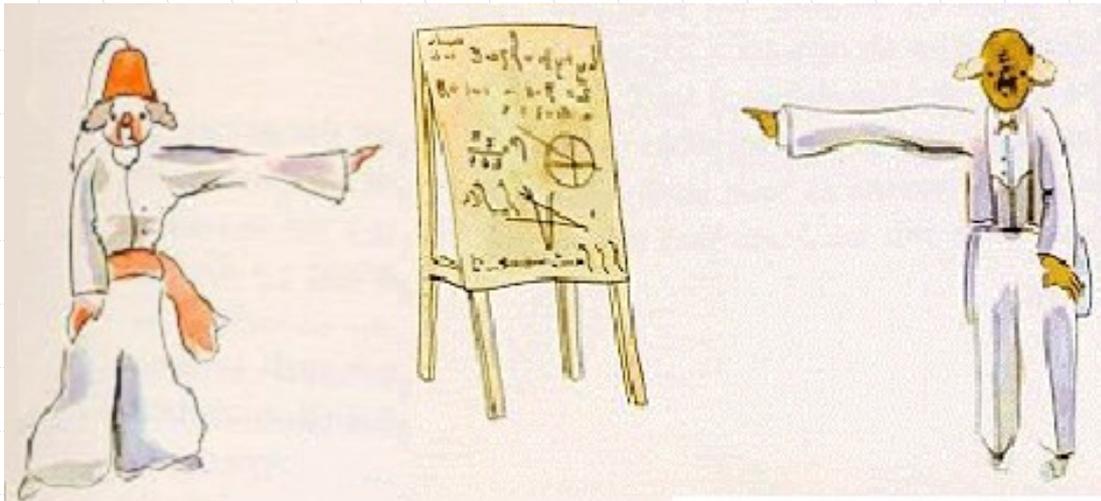


1. **LMH** = $D_{\min} = 1/f_{\max} = \text{Pouvoir Séparateur} \propto \text{distance}$
2. **Shannon** : Dimension du pixel = $LMH/2$
3. **EVP**: $CR < 100\%$ si dimension de l'objet $< 2.LMH$
4. **Convolution** \equiv Passe-bas :
 - Moyenne pondérée dans un voisinage
 - x des fréquences par les valeurs d'une Gaussienne
5. **Déconvolution** de Metz ou dans l'opérateur de Radon
6. Radioactivité \equiv **Poisson** $\Rightarrow S/B = \sqrt{C}$
7. **Filtres** linéaires et non linéaires
8. **Recalage** affine : $T, R, H, G \rightarrow \text{Similarité} \rightarrow \text{Optimisation}$
9. **Segmentation**: Seuils adaptatifs, Gradient, Laplacien, LPE
10. **Visualisation**: MIP, rendus de volume et de surface

QUELQUES REFERENCES

- Bases physiques de l'imagerie médicale. A. Desgrez & I. Idy-Peretti. 1992, Masson
- Précis d'analyse d'images. M. Coster & JL. Chermant, 1989, Presses du CNRS.
- Analyse d'images: Filtrage & segmentation. JP Cocquerez et S Philipp. 1995, MASSON.
https://www.researchgate.net/publication/292960007_Analyse_d'Images_Filtrage_et_Segmentation
- Morphologie mathématique. M. Schmidt & J. Mattioli. 1994, Masson.
- I. Bloch lien https://perso.telecom-paristech.fr/bloch/ANIM/morpho_SI241.pdf
- Deux articles dans l'EMC Encyclopédie médico-chirurgicale. Radiologie et imagerie médicale - principes et technique – radioprotection
Introduction au traitement numérique des images. D. Mariano-Goulart. 2024
Reconstruction tomographique en imagerie médicale. D. Mariano-Goulart. 2015

Ces deux articles sont repris avec deux autres articles de J Chabriaux et B. Gibaud sur DICOM et les PACS dans «Traitement de l'image, de la numérisation à l'archivage et à la communication». Imagerie Médicale Formation. Elsevier Masson. 2013.



Merci pour votre attention...
et à demain matin...

<http://scinti.edu.umontpellier.fr>

d-mariano_goulart@chu-montpellier.fr

NOTATIONS

- i numéro de pixel ou de voxel
- (i,j) pixel en 1^o ligne et j ^o colonne
- $h(i)$ réponse impulsionnelle centrée en i
- LMH=FWHM = largeur à mi-hauteur
- f fréquence spatiale en mm^{-1} .
- f_{\max} fréquence spatiale maximale d'un signal
- f_e fréquence d'échantillonnage = $2 \cdot f_{\max}$
- $p(i)$ signal physique (distribution d'activité)
- $\delta(i)$ signal impulsion unité: $\delta(i)=0$ sauf $\delta(0)=1$
- $s(i)$ valeur du pixel i dans une scintigraphie
- $\hat{s}(f)$ transformée de Fourier discrète de s
- * produit de convolution
- σ écart-type , \bar{C} valeur moyenne de C
- Coefficient de restauration $CR = \sum_{k=-e/2}^{k=e/2} h(k)$
au centre d'un objet de largeur e
- R coefficient de Radon (en tomographie)
- N nombre de noyaux radioactifs
- λ probabilité de désintégration par seconde
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 =$ factorielle de n
- ε et δ : érosion et dilatation,
- γ et φ : ouverture et fermeture
- $V(i,j)$ voisinage du pixel (i,j)

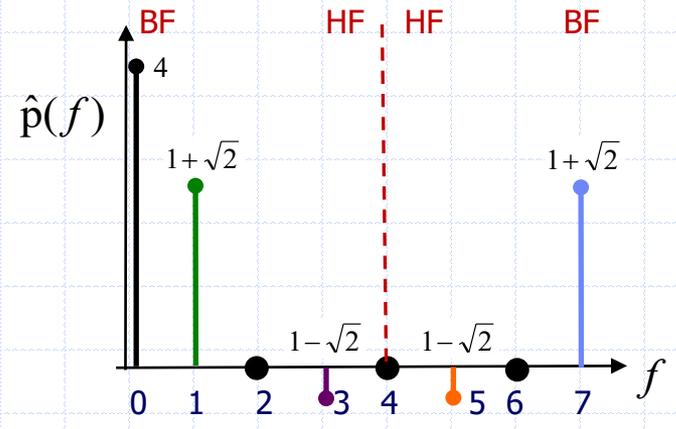
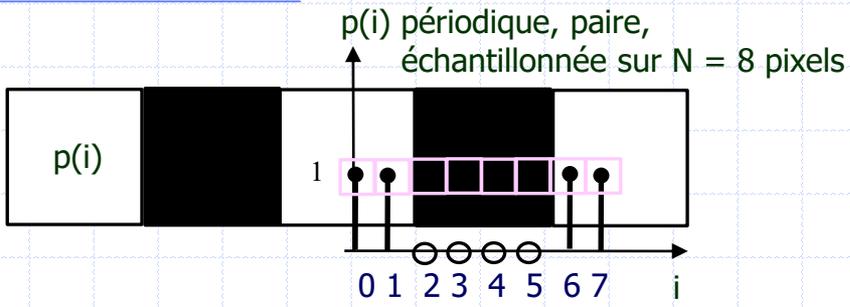
DOCUMENTS COMPLEMENTAIRES

Ces éléments, comme les calculs qui sont faits ne sont pas exigibles à l'examen.

Notez que les calculs de TF, tout comme ceux d'un log ou d'une racine carrée, ne se font jamais à la main (sauf ici...), mais avec des ordinateurs ou des calculatrices électroniques programmables. Les avoir faits soi-même une fois « à la main » permet de comprendre comment les TF sont obtenues, et est utile à cette fin. Nous invitons les étudiants à s'y essayer sans y passer des heures pour autant...



Calcul de d'un signal à partir de sa transformée de Fourier



$$\hat{p}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} p(i) \cdot \cos(f \cdot \omega \cdot i) = \sum_{i=0,1,6,7} \cos\left(f \cdot \frac{\pi}{4} \cdot i\right) \quad \hat{p}(0) = 1+1+1+1 = 4$$

$$\hat{p}(1) = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ etc.}$$

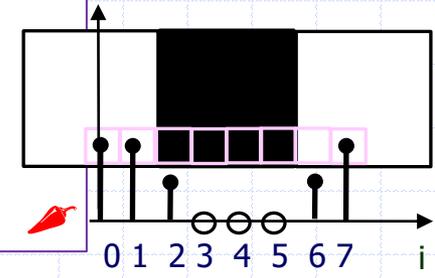
$$p(i) = \frac{1}{8} \sum_{f=0,1,3,5,7} \hat{p}(f) \cdot \cos\left(f \cdot \frac{\pi}{4} \cdot i\right) = \frac{1}{8} \left[4 + (1 + \sqrt{2}) \cos\left(\frac{\pi}{4} i\right) + (1 - \sqrt{2}) \cos\left(3 \frac{\pi}{4} i\right) + (1 - \sqrt{2}) \cos\left(5 \frac{\pi}{4} i\right) + (1 + \sqrt{2}) \cos\left(7 \frac{\pi}{4} i\right) \right]$$

$$\Rightarrow p(0) = \frac{1}{8} \left[4 + (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) \right] = 1$$

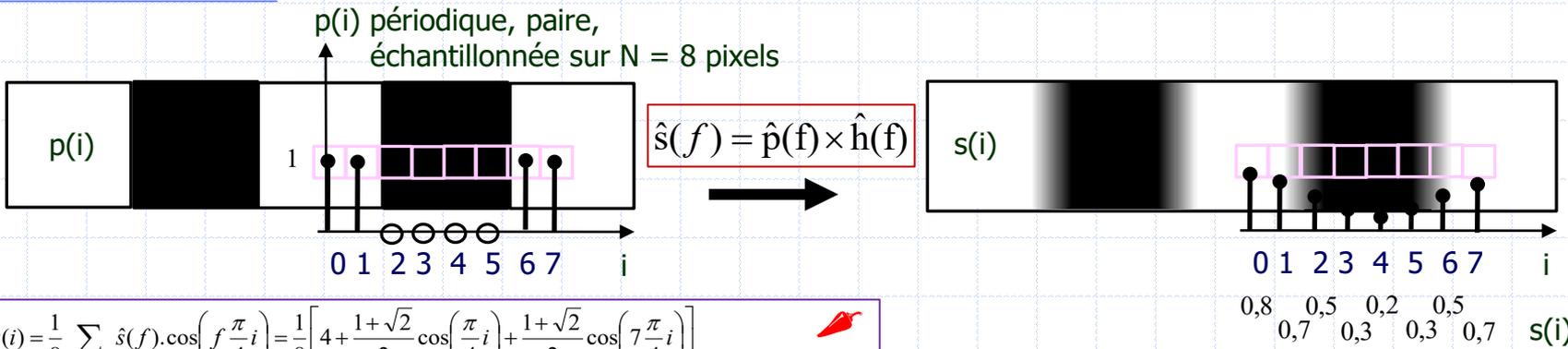
$$\Rightarrow p(1) = \frac{1}{8} \left[4 + (1 + \sqrt{2}) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + (1 - \sqrt{2}) \cos\left(3 \frac{\pi}{4}\right) + (1 - \sqrt{2}) \cos\left(5 \frac{\pi}{4}\right) + (1 + \sqrt{2}) \cos\left(7 \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{1}{8} \left[4 + (1 + \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} - (1 - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} - (1 - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{1}{8} [4 + 1 + 1 + 1 + 1] = 1$$

$$\Rightarrow p(2) = \frac{1}{8} [4] = \frac{1}{2} \text{ etc. Notez que l'on ne retrouve pas exactement 0, pourquoi ?}$$



Calcul d'image à partir de ses fréquences



$$s(i) = \frac{1}{8} \sum_{f=0,1,7} \hat{s}(f) \cdot \cos\left(f \frac{\pi}{4} i\right) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} i\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(7 \frac{\pi}{4} i\right) \right]$$

$$\Rightarrow s(0) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right] = 0,8$$

$$\Rightarrow s(1) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(7 \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,7$$

$$\Rightarrow s(2) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(7 \frac{\pi}{2}\right) \right] = 0,5$$

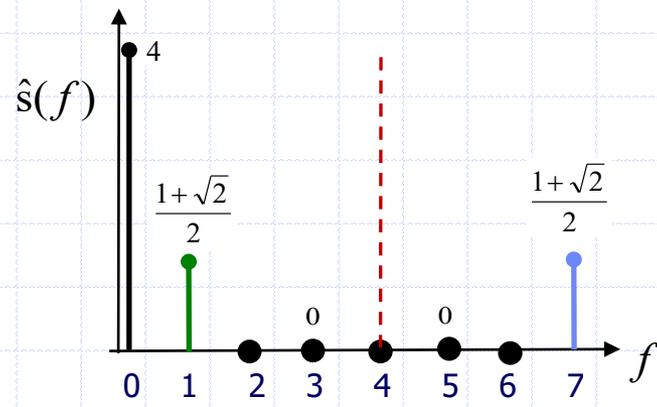
$$\Rightarrow s(3) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(3 \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(21 \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{8} \left[4 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,3$$

$$\Rightarrow s(4) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(4 \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(28 \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{8} \left[4 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right] = 0,2$$

$$\Rightarrow s(5) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(5 \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(35 \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{8} \left[4 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,3$$

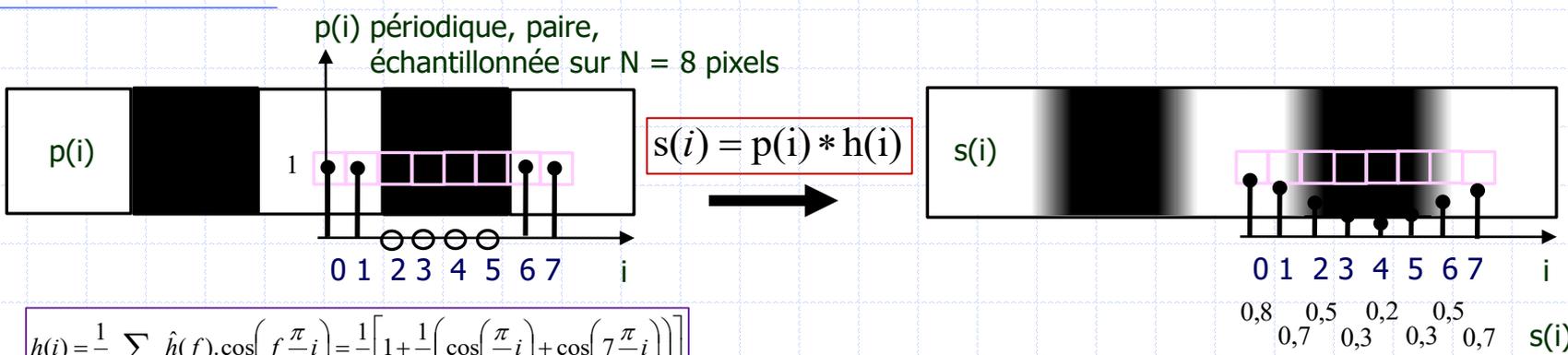
$$\Rightarrow s(6) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(6 \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(42 \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0,5$$

$$\Rightarrow s(7) = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(7 \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cos\left(49 \frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{8} \left[4 + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,7$$





Calcul d'une image par convolution



$$h(i) = \frac{1}{8} \sum_{f=0,1,7} \hat{h}(f) \cdot \cos\left(f \frac{\pi}{4} i\right) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} i\right) + \cos\left(7 \frac{\pi}{4} i\right) \right) \right]$$

$$\Rightarrow h(0) = \frac{1}{8} [1 + 1] = \frac{1}{8} = 0,25$$

$$\Rightarrow h(1) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right) \right] = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,21$$

$$\Rightarrow h(2) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) \right) \right] = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\Rightarrow h(3) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(3 \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(21 \frac{\pi}{4}\right) \right) \right] = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,04$$

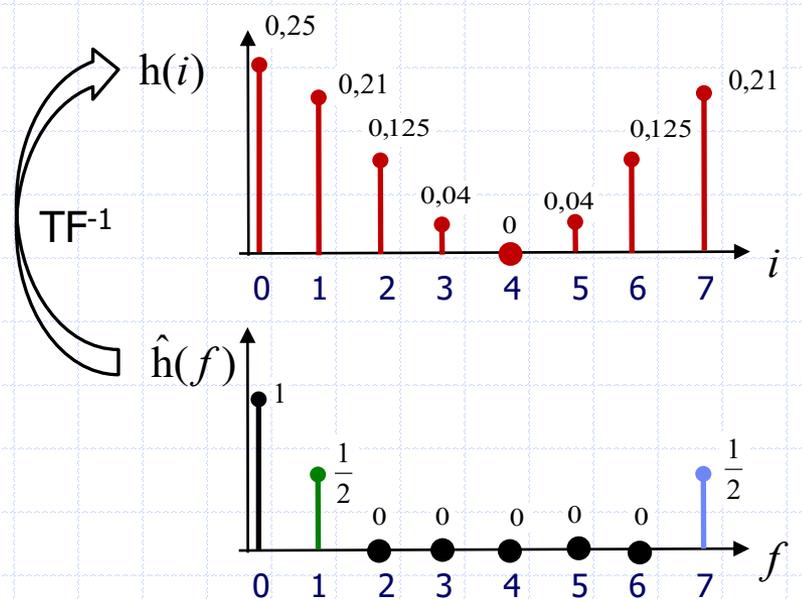
$$\Rightarrow h(4) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} (\cos(\pi) + \cos(7\pi)) \right] = \frac{1}{8} [1 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow h(5) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(5 \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(35 \frac{\pi}{4}\right) \right) \right] = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,04$$

$$\Rightarrow h(6) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(21 \frac{\pi}{2}\right) \right) \right] = \frac{1}{8} = 0,125$$

$$\Rightarrow h(7) = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\cos\left(7 \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(49 \frac{\pi}{4}\right) \right) \right] = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = 0,21$$

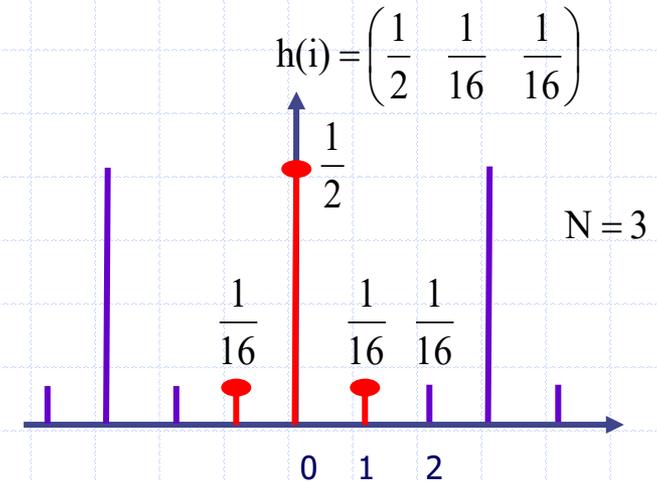
$$s(1) = (p * h)(1) = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{8} = 0,8 \text{ etc.}$$





Réponse en fréquence 2D

$$P(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow S(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 11 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 12 & 12 & 2 \\ 1 & 3 & 12 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

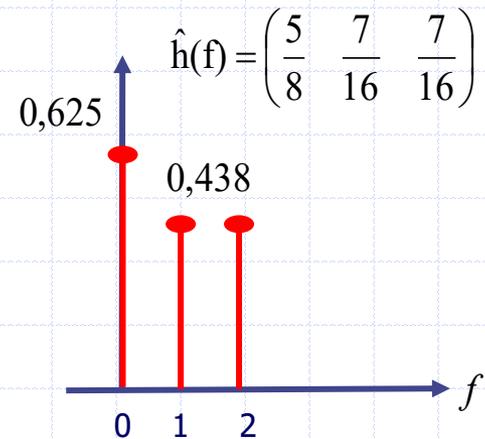


$$\hat{h}(f) = \sum_{i=0}^2 h(i) \cdot \cos\left(f \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot i\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left[\cos\left(f \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(f \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$\hat{h}(0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\hat{h}(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\hat{h}(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{16}$$



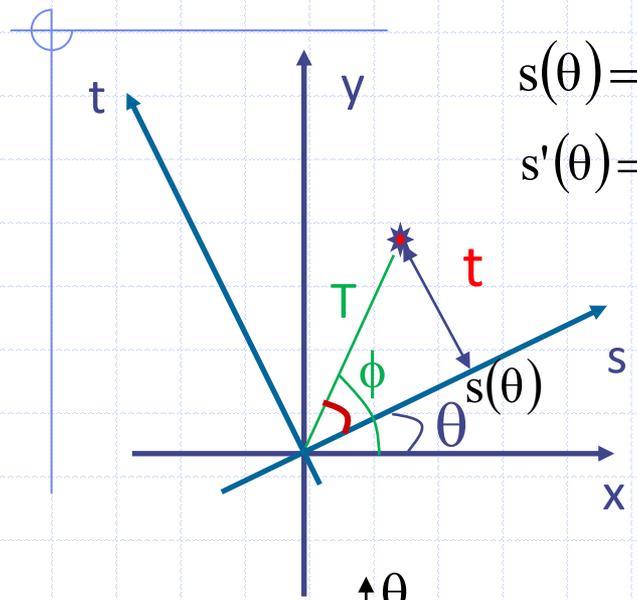
$$h(i) = \frac{1}{3} \sum_{f=0}^2 \hat{h}(f) \cdot \cos\left(f \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot i\right) = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} + \frac{7}{16} \left(\cos\left(f \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot i\right) + \cos\left(f \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot i\right) \right) \right]$$

$$h(0) = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} + \frac{7}{8} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$h(1) = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} + \frac{7}{16} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} + \frac{7}{16} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} - \frac{7}{16} \right] = \frac{1}{16}$$

$$h(2) = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} + \frac{7}{16} \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) \right) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} + \frac{7}{16} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{5}{8} - \frac{7}{16} \right] = \frac{1}{16}$$

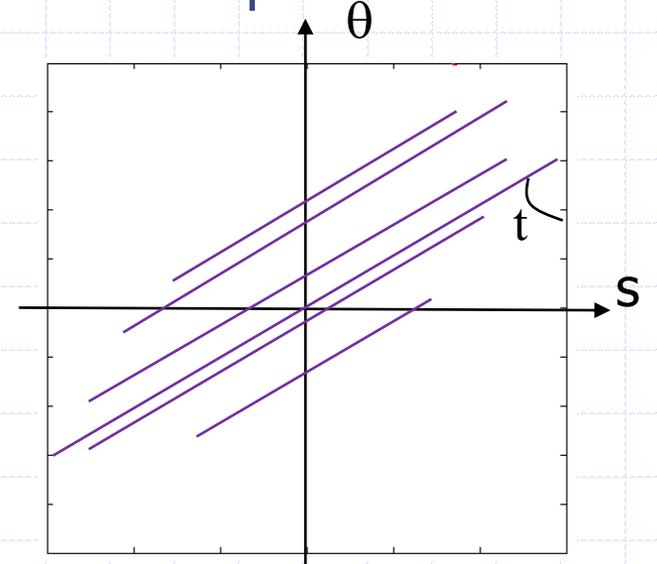
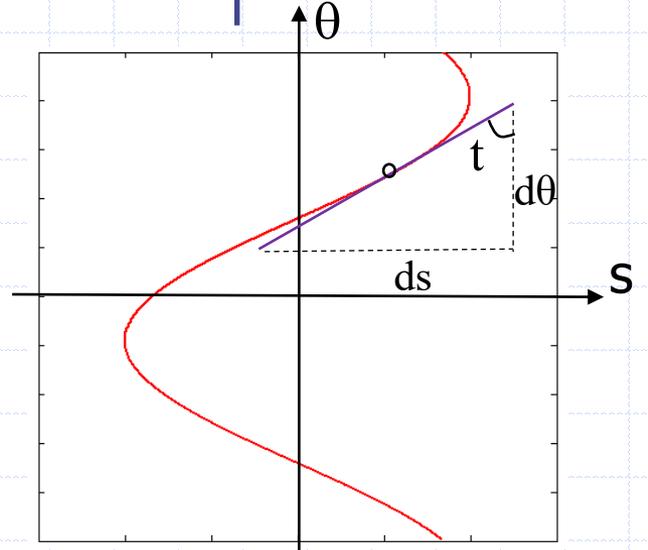
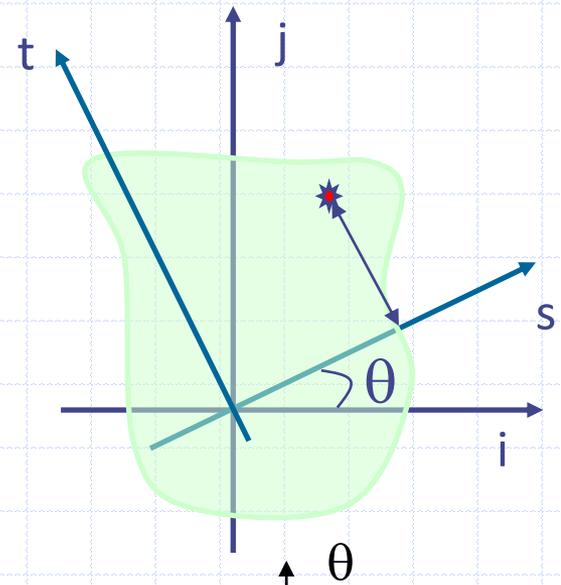
Relation fréquence-distance



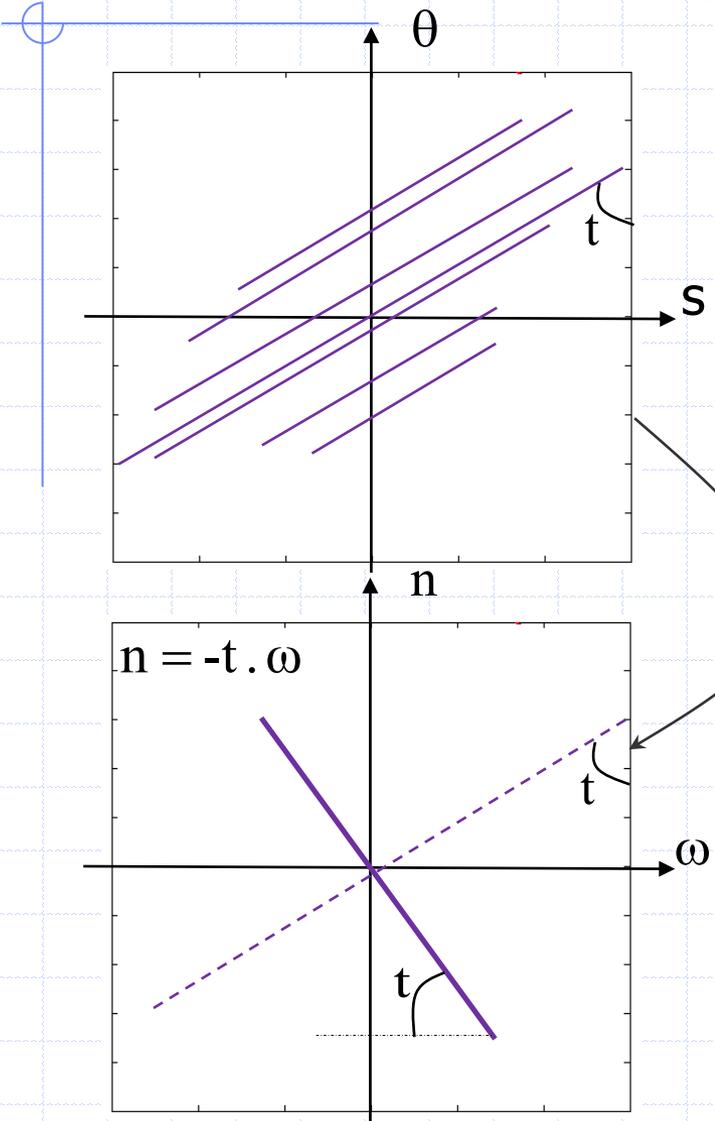
$$s(\theta) = T \cdot \cos(\varphi - \theta)$$

$$s'(\theta) = \frac{ds}{d\theta} = T \cdot \sin(\varphi - \theta) = t$$

$$\frac{ds}{d\theta} = t$$



Relation fréquence-distance

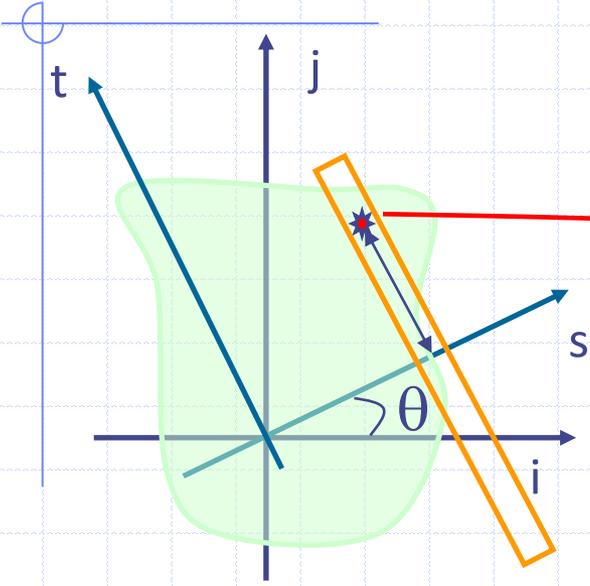


Traces dans le sinogramme des points situés à t mm du détecteur lors de l'acquisition tomographique

TF2D

Traces dans **la TF** du sinogramme des points situés à t mm du détecteur lors de l'acquisition tomographique

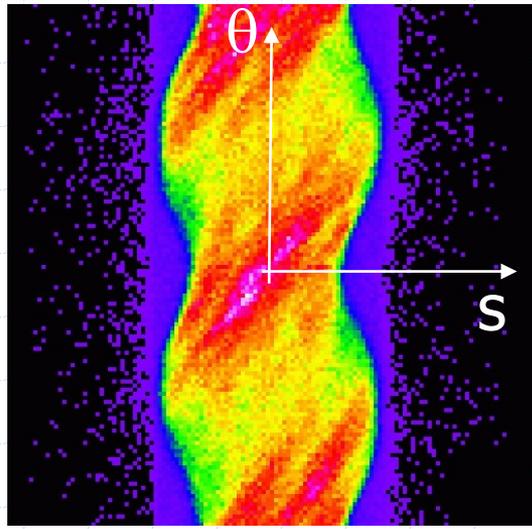
Relation fréquence-distance



sources à t mm
de l'axe s

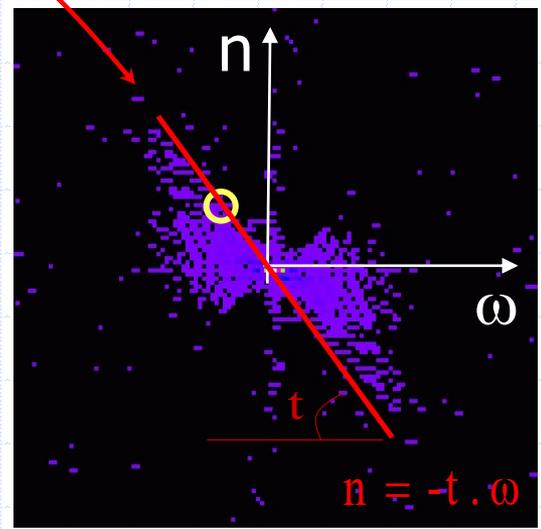
↓

signal \approx sur la droite
de pente $-t$ dans la
TF2 du sinogramme



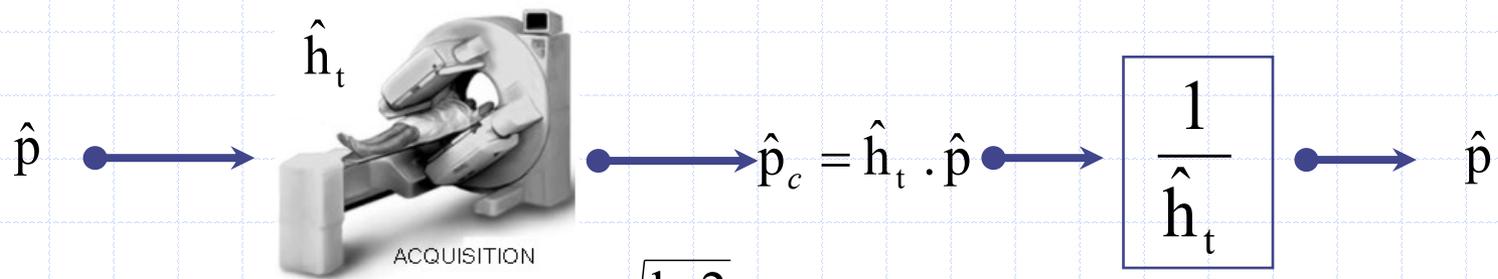
$$p_c(s, \theta) = \int f(i, j).dt$$

TF₂



$$\hat{p}_c(\omega, n)$$

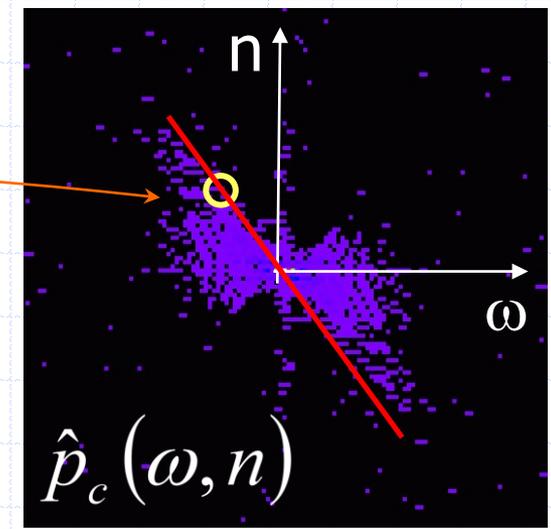
Déconvolution en TEMP par RFD



$$h_t(i) = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}}{LMH_t} \exp\left(-\frac{4 \cdot \ln 2}{LMH_t^2} i^2\right)$$

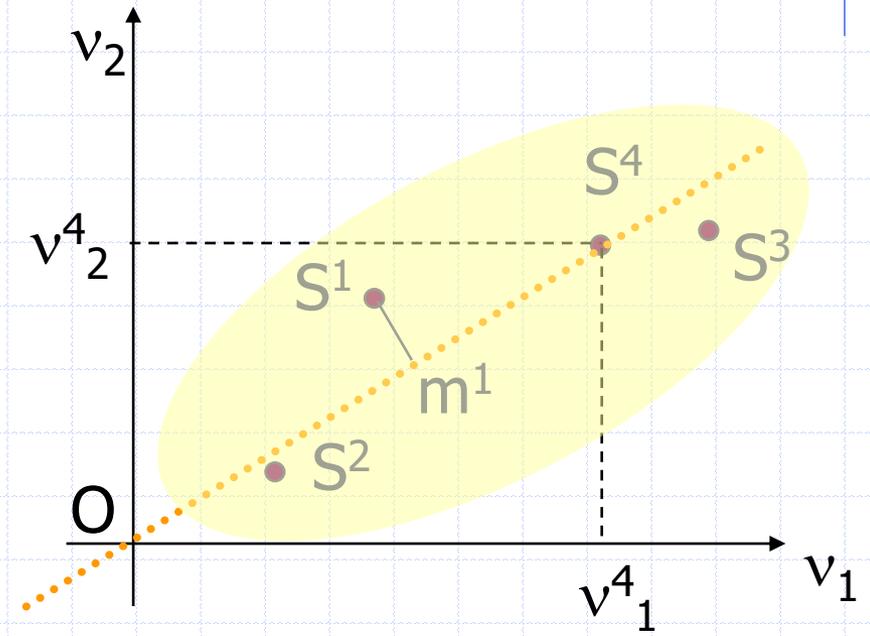
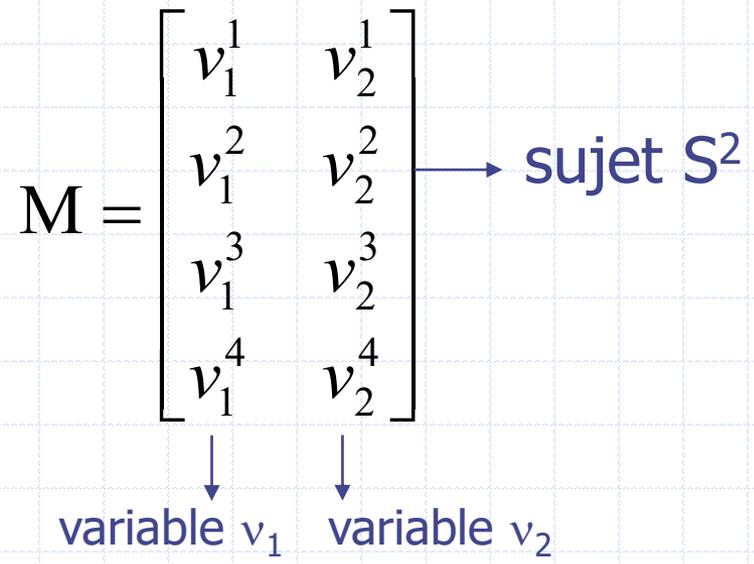
$$\hat{p}_c(\omega, n) = \hat{h}_{t=-\frac{n}{\omega}}(\omega) \cdot \hat{p}(\omega, n)$$

$$\hat{p}(\omega, n) = \frac{1}{\hat{h}_{t=-\frac{n}{\omega}}(\omega)} \cdot \hat{p}_c(\omega, n)$$



Analyse Factorielle des Correspondances

Analyse de 2 variables v_n (ex: taille et poids) sur 4 sujets S^p



Idée : isoler les caractéristiques principales de chaque sujet S^i en ne le décrivant que par le point m^i (« costaud » ou pas) : \downarrow le nombre de variables

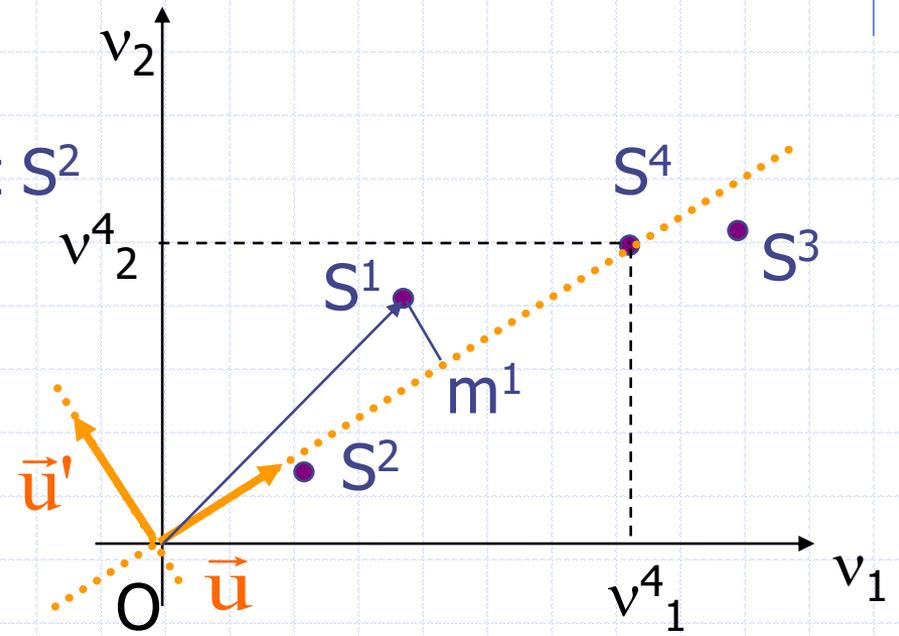
Analyse Factorielle des Correspondances

Analyse de 2 variables v_n (ex: taille et poids) sur 4 sujets S^p

$$M = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \\ v_1^3 & v_2^3 \\ v_1^4 & v_2^4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} m^1 \\ m^2 \\ m^3 \\ m^4 \end{bmatrix}$$

\downarrow variable v_1 \downarrow variable v_2

→ sujet S^2



Idée : isoler les caractéristiques principales de chaque sujet S^i en ne le décrivant que par le point m^i (« costaud » ou pas) : ↓ le nombre de variables

AFC: aspects techniques

$$\text{Max } (\text{Om}^p)^2 \Leftrightarrow C \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} \quad \text{où} \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^p v_i^k \cdot v_j^k \quad C = M^t M$$

\vec{u} = vecteur propre de la matrice C des intercorrélations entre variables, associé à la valeur propre $\lambda \propto \text{informat}^\circ$

Diagonalisation :

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C_{1,1}^{u_1} & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,2}^{u_2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3}^{u_3} \end{pmatrix}$$

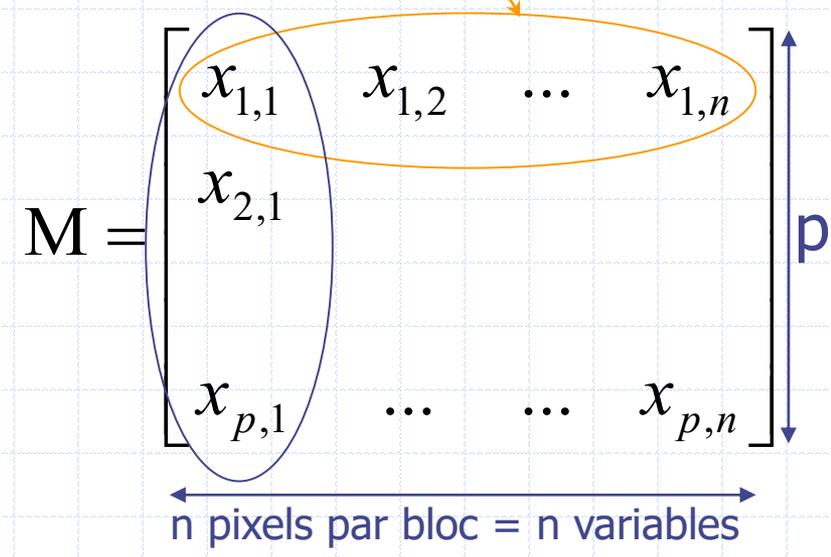
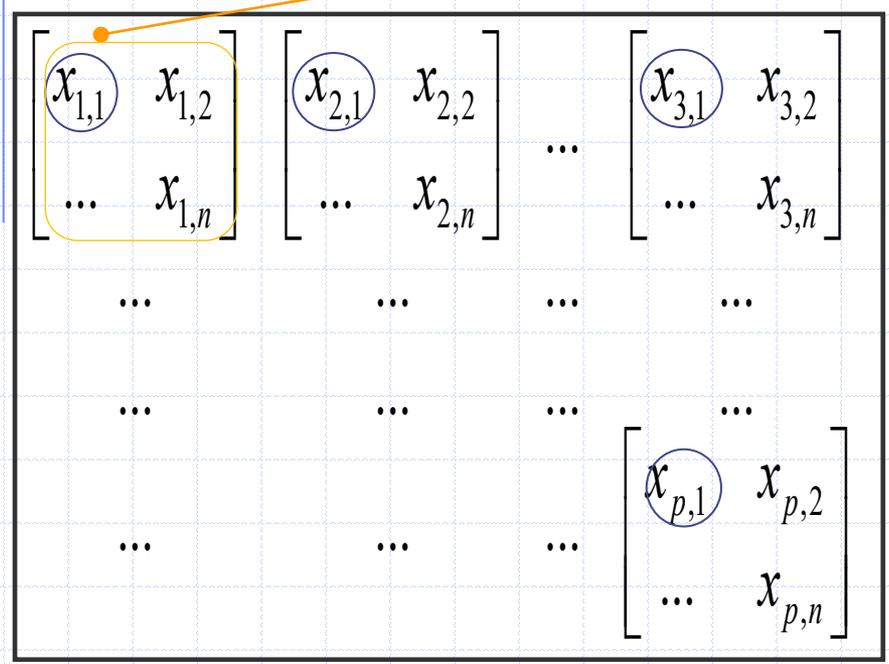
Base de vecteurs propres

On représente chaque sujet S^p par ses composantes sur les vecteurs propres associés aux plus grandes λ

Construction de la matrice des données

Découpage de l'image par blocs
 (≡ sujets) de n pixels (≡ variables)

bloc n° 1



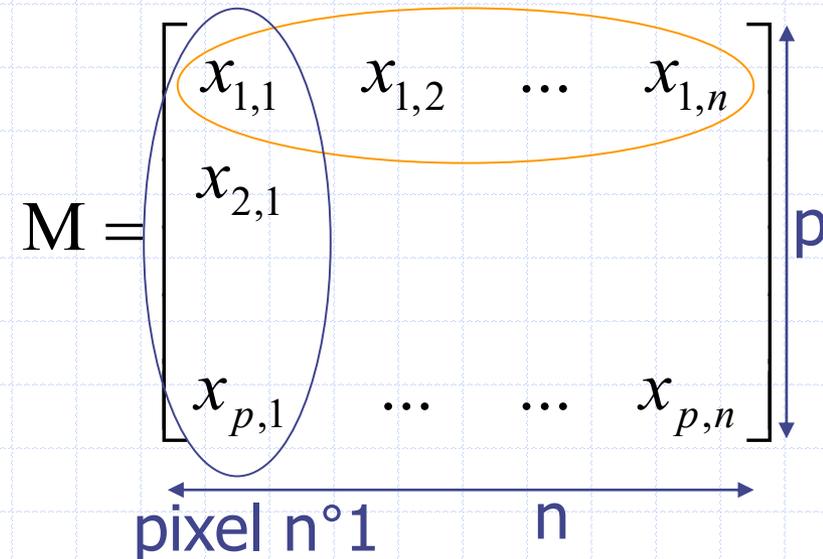
→ ↓ nombre de variables
 par bloc tel que $\sigma < \sigma_b$
 puis reconstruction

AFC appliquée au filtrage du bruit

- On réalise une AFC sur M

- Permet de réduire le nombre de variables (par ligne)
- Sur critère de ne pas inclure le bruit statistique: arrêt si $\text{var résiduelle} < \text{var bruit}$

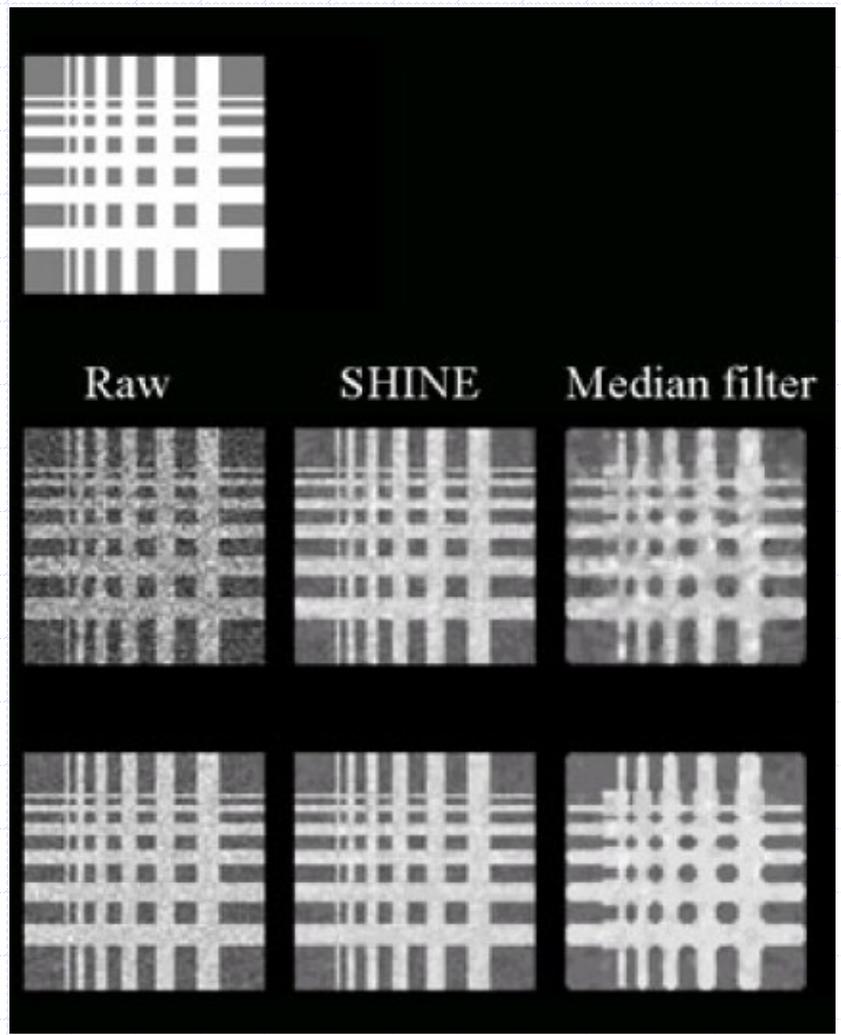
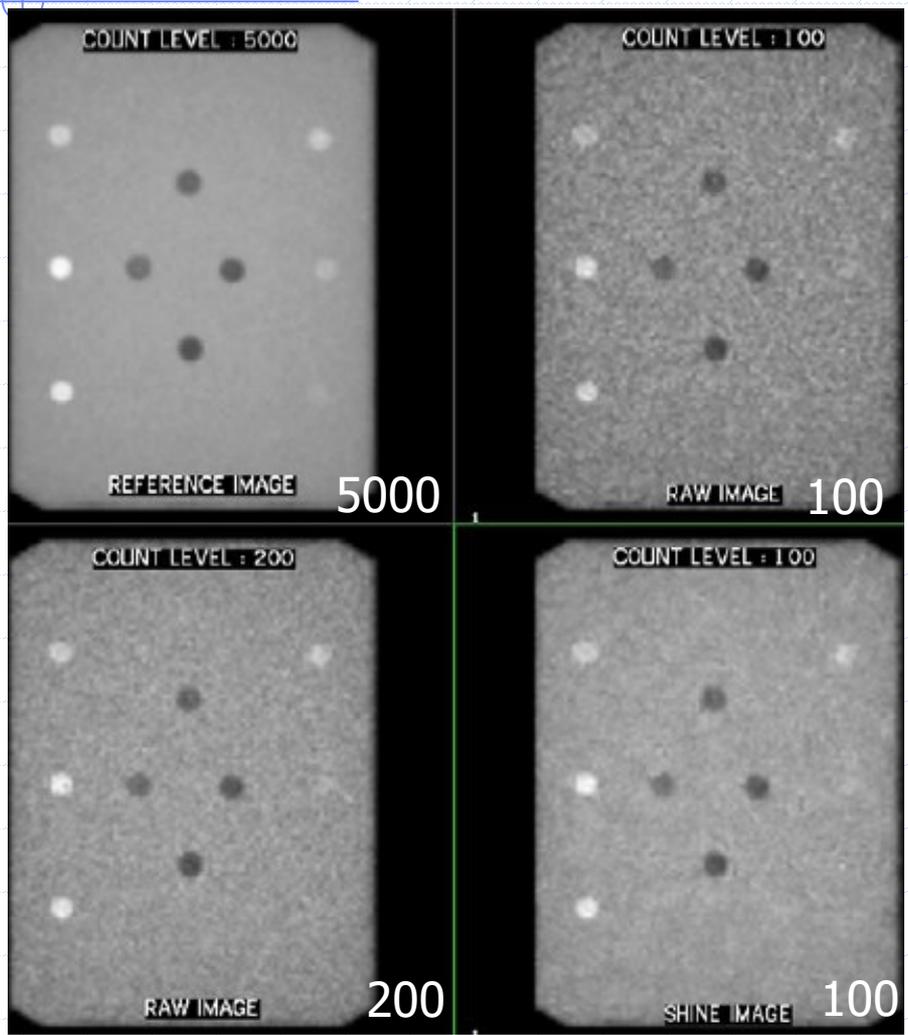
bloc n° 1



- Reconstruction

- bloc après bloc
- sur les facteurs principaux

Statistical Heuristic Image Noise Extraction



SHINE

