RAPPELS DE MATHEMATIQUE

PASS : POLYCOPIE DE COURS. ANNEE 2025-2026

Ces rappels de notions de mathématique le plus souvent enseignées dans les options scientifiques en fin de lycée sont nécessaires à une compréhension en profondeur du cours de biophysique (UE7) de PASS. L'étudiant qui estime avoir besoin de ces rappels est invité à les lire du début à la fin, de préférence avant l'étude du cours en lui-même.

A-Fonction, limite et continuité

Nous nous limitons à une **fonction** f de la variable réelle x définie dans un domaine $\mathfrak{D}$ de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ($\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par définition, une telle fonction est une transformation qui à tout nombre réel $x \in \mathfrak{D}$ associe un seul nombre réel noté $f(x)$. On note : $f: \mathfrak{D} \to \mathbb{R}, x \to f(x)$.

Pour deux fonctions f et g de la variable réelle x, on appelle **fonction composée** $f \circ g$ la transformation, quand elle existe, qui associe à un nombre réel x le nombre réel $f\big(g(x)\big)$.

On dit que la fonction $f(x)$ a pour **limite** la valeur réelle L lorsque x tend vers la valeur réelle a, et on note $\underset{x\to a}{lim}\, f(x) = L$ si l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche qu'on le souhaite de L en choisissant n'importe quelle valeur de $x \in \mathfrak{D}$ suffisamment proche de a. Pour qu'une limite existe, il est donc nécessaire que $f(x)$ tende vers la même valeur L quelle que soit la façon dont x tend vers a (et en particulier que x tende vers a en restant inférieur ou supérieur à a).

Une fonction $f(x)$ est **continue** en $a \in \mathbb{R}$ si la fonction $\underset{x\to a}{lim}\, f(x) = f(a)$. Par exemple, la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en $x = 0$. On peut montrer en revanche (cf. annexe relative aux fonctions sinus et cosinus) que $\underset{x\to 0}{lim}\, \frac{\sin(x)}{x} = 1$. La fonction $sinc(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$, mais elle peut être **prolongée par continuité** en posant $sinc(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$, ce qui permet de définir cette fonction sur $\mathbb{R}$ et de la rendre continue.

B- Dérivée, différentielle et dérivée partielle

A la base du calcul différentiel et intégral formalisé par Isaac Newton et Gottfried Wilhem Leibniz dans la seconde partie du XVII° siècle, les notions et techniques de dérivée et d'intégration ont révolutionné la physique en ouvrant la voie au développement de modèles mathématiques pour comprendre les observations du monde dans lequel nous vivons.

la dérivée d'une fonction $y = f(x)$ permet de calculer en un point x donné l'amplitude de la variation de la valeur prise par cette fonction par rapport à une variation infiniment petite de la variable x. A titre d'exemple, pour la fonction qui double une variable, $y = f(x) = 2.x$, si la variable x augmente d'une quantité infiniment petite dx, la fonction prend la nouvelle valeur $f(x + dx) = 2.(x + dx) = 2.x + 2.dx = f(x) + 2.dx$. La valeur de la fonction augmente donc de $df(x) = 2.dx$. L'augmentation de la fonction $df(x)$ par rapport à l'augmentation de la variable dx est donc $\frac{df(x)}{dx} = 2$: la dérivée de la fonction $f(x) = 2.x$ est la fonction constante $y = f'(x) = 2$ pour tout x.

Plus généralement, lorsqu'elle existe, on appelle **dérivée** $y' = f'(x)$ de la fonction $y = f(x)$ la fonction définie par :

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dy}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df(x)}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

La fonction $df(x) = f(x + dx) - f(x)$ est appelée **différentielle** de f. Elle associe à chaque variable x l'accroissement de la fonction f lorsque la variable passe de x à une valeur infiniment proche $x + dx$, avec $dx \to 0$ (figure A-1).

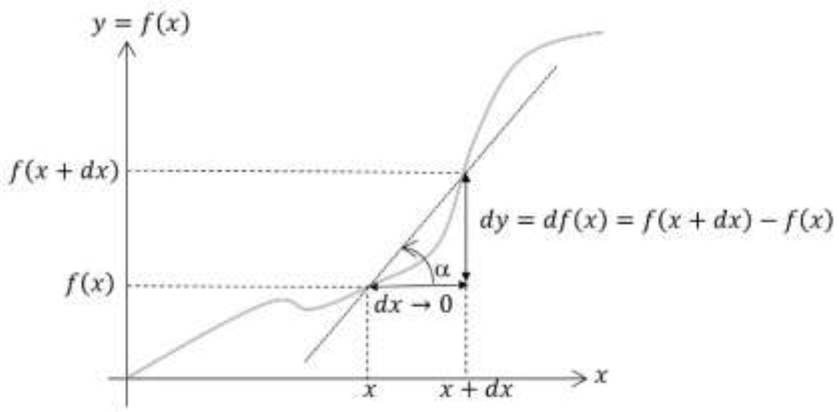


Figure A-1 : dérivée et différentielle d'une fonction

Lorsque $dx \to 0$, l'angle α représenté ci-dessus tend vers la pente de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x.

Le tableau ci-dessous rappelle quelques règles de calcul de dérivées :

FONCTION		DERIVEE
Constante k	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
Produit d'une fonction par un réel	$f(x) = k.g(x)$	$f'(x) = k.g'(x)$
Somme de deux fonctions	$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
Produit de deux fonctions	$f(x) = g(x).h(x)$	$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$
Puissance d'une fonction	$f(x) = g^k(x)$	$f'(x) = k.g^{k-1}(x).g'(x)$
Quotient de deux fonctions	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{h^2(x)}$
Composition de deux fonctions	$f(x) = g[h(x)]$	$f'(x) = h'(x).g'[h(x)]$
Puissance	$f(x) = x^k$	$f'(x) = k.x^{k-1}$

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables réelles à valeur réelle de la forme $f(x,y)$, il est possible de calculer la dérivée suivant l'une ou l'autre de ces variables, en considérant la variable par rapport à laquelle on ne dérive pas comme une constante. On parle alors de **dérivée partielle** suivant la variable x (par exemple) que l'on note $\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_{y\ constante}$ ou plus simplement $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$.

Par exemple, pour une onde progressive pure de la forme $E(x,t) = A.\sin\left(\omega.\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$, on calcule facilement : $\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega}{c}.A.\cos\left(\omega.\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$ et $\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \omega.A.\cos\left(\omega.\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$.

Dans un espace euclidien doté d'une base orthonormée (donc de coordonnées cartésiennes), le vecteur (voir ci-dessous) dont les coordonnées sont données par les dérivées partielles suivant chacune des coordonnées d'une fonction de plusieurs variables $f(x,y)$ est appelé **gradient** de f et est noté $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}f(x,y)$ ou $\vec{\nabla}f(x,y)$:

$$\vec{\nabla}f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

La lettre ∇ en forme de lettre delta majuscule renversée est connue sous le nom de **nabla** en référence à sa forme de harpe et au nom grec correspondant.

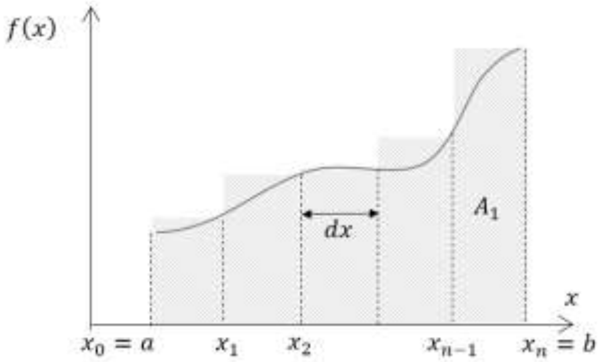
C-Intégration

I-Définition

Considérons une fonction $f(x)$ de la variable réelle x définie et continue sur l'intervalle $[a,b]$. Décomposons cet intervalle en n intervalles disjoints $[x_i, x_{i+1}]$ de largeur identique dx, de sorte que pour tout entier i variant de 0 à $n-1$:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n},$$

$$x_k = a + k.\frac{b-a}{n} \text{ (donc } x_0 = a \text{ et } x_n = b)$$



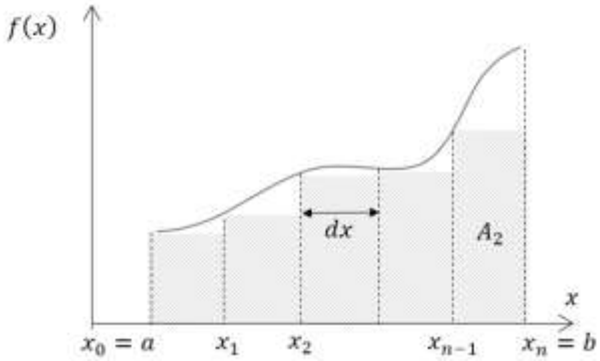


Figure A-2 : Intégrale de Riemann

Dans la figure A-2, chacun des rectangles hachurés a une aire de $\frac{b-a}{n}.f(x_k)$ pour k entier variant de 1 à n dans l'image de gauche et de 0 à $n-1$ dans celle de droite.

La somme des aires de ces rectangles est $A_1 = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $A_2 = \frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$.

Si $n \to \infty$, alors $\frac{b-a}{n} \to 0$, et les aires A_1 et A_2 tendent vers la même limite qui mesure l'aire délimitée par le graphe de $f(x)$ et le segment $[a, b]$ sur l'axe des x. Cette limite est appelée **intégrale** (au sens de Riemann) de la fonction f entre les bornes a et b et est notée $\int_a^b f(x).dx$:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x).dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}.\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right)}$$

Notez que dans l'expression $\int_a^b f(x).dx$, la grandeur x est une grandeur qui indique seulement la variable sur laquelle la fonction f est sommée, ou intégrée. Elle joue donc un rôle similaire à celui de l'entier k dans la somme discrète $\sum_{k=1}^{n} \dots$. Comme cet entier, x peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre du moment qu'elle n'interfère pas avec les autres variables de l'intégrale : $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(t).dt = \int_a^b f(u).du \ etc$. On dit que la variable d'intégration est une variable **muette**.

Quelques propriétés de l'intégrale découlent directement de sa définition :

$$\int_a^a f(x).dx = 0$$

$$\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$$

$$\int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x).dx = \int_a^c f(x).dx$$

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$$

$\int_a^b g(t).f(x).dx = g(t).\int_a^b f(x).dx$ pour toute une fonction $g(t)$ ne dépendant pas de la variable x.

II-Lien entre intégration et dérivation, primitive

Un lien étroit entre dérivation et intégration va nous permettre de calculer de nombreuses intégrales.

Considérons la fonction $g(x) = \int_a^x f(t).dt$. La variable x détermine ici la limite supérieure de l'intervalle d'intégration. La dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ s'écrit :

$$g'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dx \to 0} \frac{g(x+dx) - g(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\int_a^{x+dx} f(t).dt - \int_a^x f(t).dt}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\int_x^{x+dx} f(t).dt}{dx}$$

Calculons l'intégrale $\int_x^{x+dx} f(t).dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{dx}{n}.\sum_{k=1}^{n} f\left(x + k.\frac{dx}{n}\right)$: lorsque $n \to \infty$, chaque terme de la somme tend vers $f(x)$. La somme tend donc vers $n.f(x)$, et donc $\int_x^{x+dx} f(t).dt = dx.f(x)$.

La dérivée cherchée est donc $g'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\int_x^{x+dx} f(t).dt}{dx} = f(x)$.

La fonction $\boldsymbol{g(x) = \int_a^x f(t).dt}$ admet donc pour dérivée $\boldsymbol{g'(x) = f(x)}$.

En d'autres termes, $f(x)$ est la dérivée de toute fonction de la forme $F(x) = g(x) + C$ où C est une constante. Comme $F(a) = g(a) + C = \int_a^a f(t).dt + C = C$, et $g(x) = \int_a^x f(t).dt = F(x) - F(a)$. En particulier, pour tout b réel $\int_a^b f(t).dt = F(b) - F(a)$ si la dérivée de F est la fonction f.

La fonction F dont la dérivée $F' = f$ est appelée **primitive** de f. Elle est définie à une constante additive près. On la note parfois simplement $F(x) = \int f(x).dx$ ou $F = \int f$ et on utilise souvent la notation $F(b) - F(a) \stackrel{\text{def}}{=} [F(x)]_a^b$. Il s'ensuit une méthode pour calculer les intégrales de fonctions dont on connait une primitive :

$$\boldsymbol{\int_a^b F'(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Par exemple, puisque $f(x) = x$ est la dérivée de la primitive $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $\int_a^b x.dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

Une autre astuce permet de calculer certaines intégrales. Elle est fondée sur la relation précédente et celle évoquée plus haut donnant la dérivée du produit de deux fonctions :

$f(x) = g(x).h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$.

En combinant ces deux relations, on obtient :

$\int_a^b (g.h)'(x).dx = \int_a^b \big(g'(x).h(x) + g(x).h'(x)\big).dx = [g(x).h(x)]_a^b$, et donc :

$$\int_a^b g'(x).h(x).dx = [g(x).h(x)]_a^b - \int_a^b g(x).h'(x).dx$$

Cette relation dite d'**intégration par parties** permet par exemple de calculer des intégrales de produit de fonction de la forme $\int_a^b e^{-\lambda.x}.x.dx = \left[-\frac{1}{\lambda}.e^{-\lambda.x}.x\right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{\lambda}.e^{-\lambda.x}.1.dx$.

En particulier, $\int_0^\infty e^{-\lambda.x}.x.dx = -\left[\frac{x}{\lambda}.e^{-\lambda.x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda.x}.dx = -\left[\frac{x}{\lambda}.e^{-\lambda.x}\right]_0^\infty + \frac{1}{\lambda}.\left[-\frac{1}{\lambda}.e^{-\lambda.x}\right]_0^\infty$.

Le premier terme $-\left[\frac{x}{\lambda}.e^{-\lambda.x}\right]_0^\infty = 0 - 0 = 0$. Le second vaut $-\frac{1}{\lambda^2}.\left[e^{-\lambda.x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda^2}$. On a donc finalement $\int_0^\infty x.e^{-\lambda.x}.dx = \frac{1}{\lambda^2}$.

III-Interprétation

La première interprétation d'une intégrale découle directement de la définition que nous en avons donnée : $\int_a^b f(x).dx$ est l'aire limitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et le segment $[a, b]$ sur l'axe des x. Cette approche est utile en particulier pour calculer des surfaces ou des volumes.

En physique, la notion d'intégrale permet aussi et surtout peut-être de sommer des grandeurs continues déterminées par les valeurs d'une fonction continue de la variable réelle $f(x)$. La définition que nous avons donnée de l'intégrale s'écrit en effet sous la forme :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ avec\ x_k = a + k.dx\ \ et\ dx = \frac{b-a}{n}$$

En ce sens, une intégrale est une forme de « **somme continue** ».

Pour illustrer cette interprétation, considérons la fonction de la variable réelle $f(x) = x$, et calculons la somme discrète $\sum_{k=1}^{n} f(k) = 1 + 2 + \ 3\ + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$.

On a aussi $\sum_{k=1}^{n} f(k) = n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 1$.

En sommant ces deux équations, on obtient pour tout n entier :

$2.\sum_{k=1}^{n} f(k) = n + 1 + n + 1 + n + 1 + \cdots + n + 1 = n.(n+1) \Longrightarrow \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{n+1}{2}$.

On peut aussi calculer la « somme continue » $\frac{1}{n-1}\int_1^n x.dx = \frac{1}{n-1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^n = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{2}\right) = \frac{1}{n-1}\frac{(n-1).(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$. On obtient bien : $\frac{1}{n-1}\int_1^n x.dx = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} k$ pour tout n entier.

Une autre illustration est l'établissement de l'équation (43) donnant l'intensité d'une onde progressive après diffraction par une fente rectangulaire de largeur b, qui nous a amené à sommer toutes les ondes progressives sphériques de la forme $g_t(x) = A_0.\sin(\omega.t - \varphi_r - \Theta.x)$ qui émergent de la fente de diffraction pour des valeurs de x réelles variant continûment dans l'intervalle $\left[-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}\right]$. Cette somme s'écrit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ avec\ x_k = -\frac{b}{2} + k.dx\ \ et\ dx = \frac{b}{n}$ et se calcule donc par l'intégrale $\frac{1}{b}\int_{-b/2}^{+b/2} g_t(x).dx$.

Enfin, d'après ce qui précède, l'intégrale permet aussi de généraliser le calcul d'une moyenne arithmétique et de calculer la **moyenne** $\boldsymbol{\bar{f}}$ des valeurs que prend une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ suivant :

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx$$

A titre d'exemple, pour établir la puissance surfacique moyenne d'un son pur (équation 1-19), nous avons eu besoin de déterminer la valeur moyenne entre 0 et 2π de la fonction $\sin^2(x)$. Celle-ci est identique à celle de la fonction $\cos^2(x)$, un cosinus ne se différenciant d'un sinus que par une translation de l'origine du repère de $\frac{\pi}{2}$ radians (cf. *infra*). Cette valeur moyenne se calcule en utilisant la relation $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ suivant : $\overline{sin}=\overline{cos}=\frac{1}{2.\pi}\int_0^{2.\pi}\sin^2(x)\,.dx=\frac{1}{2.\pi}\int_0^{2.\pi}\cos^2(x)\,.dx=\frac{1}{4.\pi}\int_0^{2.\pi}[\sin^2(x)+\cos^2(x)].dx=\frac{1}{4.\pi}\int_0^{2.\pi}dx=\frac{2.\pi}{4.\pi}=\frac{1}{2}$.

D-Fonctions sinus et cosinus

I-Définitions

Les fonctions sinus et cosinus jouent un rôle essentiel en physique car elles permettent de modéliser tous les phénomènes périodiques dans le temps ou l'espace (voir le paragraphe suivant relatif à la transformation de Fourier). Elles sont par ailleurs fort utiles pour calculer les longueurs des projections d'un segment de droite sur les axes d'un repère orthonormé.

Dans un repère orthonormé (O,x,y), considérons un cercle de rayon 1 centré en l'origine O du repère. Ce cercle est appelé « **cercle trigonométrique** ». Chaque point M de ce cercle peut être repéré par l'angle orienté $\omega.t$ que fait le rayon OM avec l'axe horizontal (O,x) du repère (figure A-3). Le paramètre ω est une constante réelle appelée **pulsation propre**.

La variable réelle t peut varier de 0 à l'infini. Pour fixer les idées, supposons que cette variable modélise le temps. Dans ce cas, la **pulsation propre ω s'exprime en rad/s**.

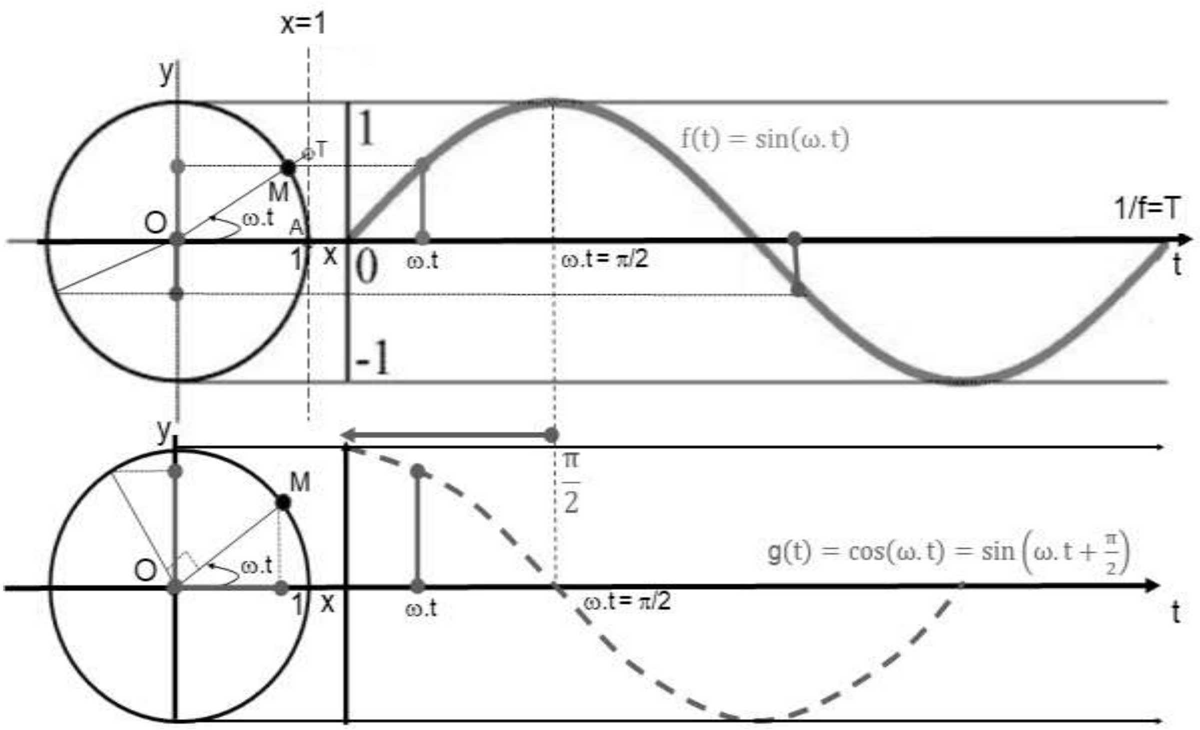


Figure A-3 : Fonctions sinus et cosinus

On définit le **sinus** de l'angle $\omega.t$, noté $\sin(\omega.t)$, par la longueur de la projection du rayon OM sur l'axe vertical (O,y). La fonction $\mathrm{f}(t)=\sin(\omega.t)$ qui à chaque variable t associe la valeur de $\sin(\omega.t)$ est représentée dans la partie supérieure de la figure A-3. Elle s'annule pour $\omega.t=$

0 (ou $2.\pi$) radians et $\omega.t = \pi$ radians, est maximale à +1 pour $\omega.t = \frac{\pi}{2}$ radians et minimale à -1 pour $\omega.t = \frac{3.\pi}{2}$.

La projection sur l'axe (Oy) du rayon OM est inchangée si l'angle $\omega.t$ augmente de $2.\pi$ (ce qui correspond à un tour complet). En conséquence,

$$f(t) = \sin(\omega.t) = \sin(\omega.t + 2.\pi) = \sin\left(\omega.\left(t + \frac{2.\pi}{\omega}\right)\right) = f\left(t + \frac{2.\pi}{\omega}\right)$$

La fonction sinus est donc périodique de **période** $T = \frac{2.\pi}{\omega}$ (son graphe pour $t \in [0, T[$ se répète à l'identique pour $t \in [T, 2.T[$, $t \in [2.T, 3.T[$ etc). En définissant la **fréquence** (en s^{-1}) par l'inverse de la période, $f \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{T}$,on a les relations $\boldsymbol{\omega = \frac{2.\pi}{T} = 2.\pi.f}$. La fonction $f(t)$ s'exprime aussi sous la forme $\boldsymbol{f(t) = \sin(\omega.t) = \sin(2.\pi.f.t) = \sin\left(2.\pi.\frac{t}{T}\right)}$.

Il découle de sa définition que la fonction sinus est impaire : $\sin(\omega.t) = -\sin(-\omega.t)$ pour tout t.

On définit le **cosinus** de façon similaire par la longueur de la projection du rayon OM sur l'axe horizontal (O,x). La fonction $f(t) = cos(\omega.t)$ qui à chaque variable t associe la valeur de $\cos(\omega.t)$ est représentée dans la partie inférieure de la figure A-3. Elle s'annule pour $\omega.t = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3.\pi}{2}$, est maximale à +1 pour $\omega.t = 0$ ou $2.\pi$ radians et minimale à -1 pour $\omega.t = \pi$ radians. On constate que la fonction cosinus se déduit directement de la fonction sinus en remplaçant la variable $\omega.t$ par $\omega.t + \frac{\pi}{2}$: $\cos(\omega.t) = \sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui revient à translater l'origine du repère de $\frac{\pi}{2}$ radians. Comme la fonction sinus, la fonction cosinus est donc périodique de période $T = \frac{2.\pi}{\omega}$. Sa définition implique que la fonction cosinus est paire : $\cos(\omega.t) = \cos(-\omega.t)$ pour tout t.

Le théorème de Pythagore montre par ailleurs que $\boldsymbol{cos^2(\omega.t) + sin^2(\omega.t) = 1}$ pour tout angle $\omega.t$.

Les fonctions sinus et cosinus sont donc analogues. On les qualifie de **fonctions circulaires**. Elles ne sont pas linéaires ($\sin(\alpha + \beta) \neq \sin(\alpha) + \sin(\beta)$), mais de nombreuses équations (connues sous le nom de **formules de trigonométrie**) permettent de les manipuler. Les plus utiles sont les formules d'addition et de factorisation suivantes ($\cos(a - b)$, $\sin(a - b)$ et $\sin(p) - \sin(q)$ s'en déduisent immédiatement en utilisant la parité du cosinus et l'imparité du sinus):

$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et donc $\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$

$\sin(a + b) = \sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)$ et donc $\sin(a - b) = \sin(a).\cos(b) - \cos(a).\sin(b)$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2.\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

$\sin(p) + \sin(q) = 2.\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et donc $\sin(p) - \sin(q) = 2.\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Lorsque les arguments angulaires α sont petits, il est possible de donner une approximation polynomiale des fonctions circulaires (développement de Mac Laurin) suivant :

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \cdots \xrightarrow{\alpha \to 0} 1$$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots \xrightarrow{\alpha \to 0} \alpha$$

La factorielle de l'entier n étant définie par le produit des n premiers entiers : $n! = n.(n-1). \dots .2$. Une conséquence du développement de la fonction sinus est que la fonction **sinus cardinal** notée sinc et définie par $\boldsymbol{sinc(\alpha)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}$ tend vers 1 quant $\alpha \to 0$, puisqu'au voisinage de 0, $sinc(\alpha) \approx \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha}}$.

Enfin, pour tout angle $\omega.t$ différent d'un multiple de $\frac{\pi}{2}$, la droite (OM) intersecte la droite x=1 (qui est la tangente au cercle trigonométrique passant par le point A(1,0)) en un point T. La tangente de l'angle $\omega.t$ est alors définie par la valeur algébrique du segment $\overline{AT}$, c'est-à-dire par la longueur du segment AT affublée du signe de l'ordonnée du point T (cf. figure A-3). Comme $\frac{\sin(\omega.t)}{\cos(\omega.t)} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$, la fonction **tangente** qui à chaque angle $\omega.t$ non multiple de $\frac{\pi}{2}$ associe la tangente de cet angle s'identifie à $\boldsymbol{tan(\omega.t)} = \frac{\mathbf{sin(\omega.t)}}{\mathbf{cos(\omega.t)}}$. Cette fonction s'annule en $\omega.t = 0$, puis croit jusqu'à l'infini quant $\omega.t \to \frac{\pi}{2}$. La définition $tan(\omega.t) = \overline{AT}$ permet de constater que la fonction $tan(\omega.t)$ est périodique, de période $T' = \frac{\pi}{\omega}$. Les fonctions sinus et cosinus étant respectivement impaire et paire, la fonction tangente est impaire : $tan(\omega.t) = -tan(-\omega.t)$ pour tout t.

II-Dérivées

La dérivée de la fonction sinus se calcule suivant $sin'(x) = \frac{d\sin(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\sin(x+dx) - \sin(x)}{dx}$. En utilisant la formula d'addition donnée ci-dessus, on obtient

$sin'(x) = \frac{d\sin(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{2.\sin\left(\frac{dx}{2}\right).\cos\left(\frac{2.x+dx}{2}\right)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}}.\cos\left(\frac{2.x+dx}{2}\right)$. Quand $dx \to 0$, le premier facteur est un sinus cardinal qui tend vers 1. Le second tend vers $\cos(x)$.La dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus :

$$sin'(x) = \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

De même $cos'(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\cos(x+dx) - \cos(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{-2.\sin\left(\frac{2.x+dx}{2}\right).\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{dx} = \lim_{dx \to 0} -\frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}}.\sin\left(\frac{2.x+dx}{2}\right)$. Quand $dx \to 0$, le premier facteur tend vers -1. Le second tend vers $\sin(x)$.La dérivée de la fonction cosinus est la fonction moins sinus :

$$cos'(x) = \frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

Ces résultats s'étendent aux fonctions $f(t) = sin(\omega.t)$ ou $f(t) = cos(\omega.t)$ en se souvenant de la dérivée d'une fonction composée $(f \circ g)'(t) = g'(t).f'[g(t)]$ avec dans ce cas $f = sin$ ou cos et $g(t) = \omega.t$, soit $g'(t) = \omega$. On obtient :

$$sin'(\omega.t) = \omega.\cos(\omega.t)$$

$$cos'(\omega.t) = -\omega.\sin(\omega.t)$$

La dérivée de la fonction $tan(x)$ se calcule à partir de la dérivée d'un rapport de deux fonctions :

$$tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x).\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$tan'(\omega.t) = \frac{\omega}{cos^2(\omega.t)}$$

FONCTION		DERIVEE
Sinus	$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$
Cosinus	$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$
Tangente	$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$

III-Intégration

Les primitives étant connues pour les fonctions sinus et cosinus, l'intégration de celles-ci est immédiate :

$$\int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega.t).dt = \left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega.t)\right]_{t_1}^{t_2} = -\frac{1}{\omega}[\cos(\omega.t_2) + \cos(\omega.t_2)]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \cos(\omega.t).dt = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega.t)\right]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{\omega}[\sin(\omega.t_2) + \sin(\omega.t_2)]$$

IV-Interprétation géométrique : projections

Les fonctions circulaires sont aussi utiles pour évaluer les longueurs $0A_x$ et $0A_y$ de la projection d'un segment $r = OA$ sur les axes d'un repère orthonormé (O, x, y) du plan, suivant la figure A-4 :

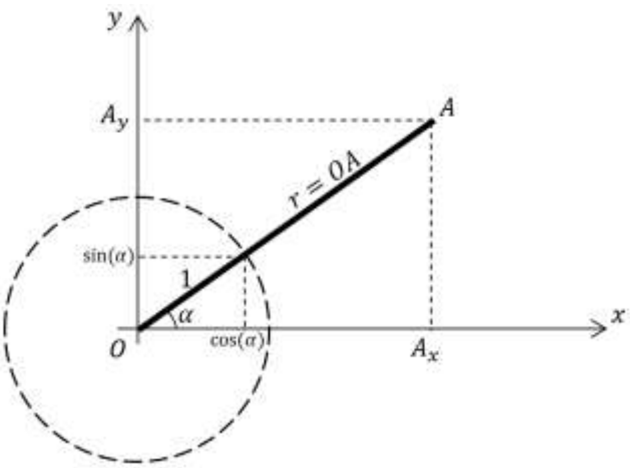


Figure A-4 : Interprétation géométrique des fonction sinus et cosinus.

Dans le triangle (O, A, A_x), le théorème de Thalès permet d'écrire $\frac{1}{r} = \frac{cos(\alpha)}{A_x} = \frac{\sin(\alpha)}{A_y}$. Il s'ensuit immédiatement que :

$$\boldsymbol{A_y = r.\sin(\alpha)}$$

$$\boldsymbol{A_x = r.\cos(\alpha)}$$

Dans tout triangle rectangle donc, le sinus (respectivement le cosinus) d'un angle (du triangle différent de l'angle droit) **est égal au rapport du côté opposé (respectivement adjacent) à l'angle par l'hypoténuse.**

E-Série de Fourier

Ce paragraphe constitue un complément plus technique accessible à de bons élèves de terminale, mais généralement non encore enseigné à ce niveau d'études.
Soit g(t) est une fonction périodique de période T, continue par morceaux (avec un nombre fini de points de discontinuité sur une période), alors :

$$\boxed{\begin{gathered} g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos[(n.\omega).t] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin[(n.\omega).t] \\ g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos[(n.\omega).t] + b_n.\sin[(n.\omega).t] \end{gathered}}$$

avec $a_n = \frac{2}{T}.\int_0^T g(\tau).\cos(n.\omega.\tau).d\tau$ et $b_n = \frac{2}{T}.\int_0^T g(\tau).\sin(n.\omega.\tau).d\tau$.
Cette décomposition de la fonction $g(t)$ en somme de fonctions circulaires est appelée décomposition en série de Fourier.

Démontrons ce résultat : Pour tout entier p positif ou nul, multiplions les deux membres de l'équation précédente par $cos[(p\omega)t]$. Nous obtenons :

$$g(t).cos(p\omega t) = \frac{a_0}{2}.cos(p\omega t) + cos(p\omega t).\sum_{n=1}^{\infty} a_n.cos(n\omega t) + cos(p\omega t).\sum_{n=1}^{\infty} b_n.sin(n\omega t)$$

En intégrant les deux membres de cette égalité entre 0 et T, on obtient :

$$\int_0^T g(t).cos(p\omega t)dt = \frac{a_0}{2}.\int_0^T cos(p\omega t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\int_0^T cos(p\omega t).cos(n\omega t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\int_0^T cos(p\omega t).sin(n\omega t)dt$$

L'intégrale dans le 3° terme de cette somme est toujours nulle :

$$\int_0^T cos(p\omega t).sin(n\omega t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin[(n-p)\omega t] + \sin[(n+p)\omega t]\,dt$$

$n = p \Longrightarrow \int_0^T cos(p\omega t).sin(n\omega t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T sin(2n\omega t)dt$ =0.

$$n \neq p \Longrightarrow \int_0^T cos(p\omega t).sin(n\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \sin[(n-p)\omega t]\, dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sin[(n+p)\omega t]\, dt = 0.$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{cos\left[(n-p)\frac{2\pi}{T}t\right]}{(n-p)\frac{2\pi}{T}}\right]_0^T + \left[\frac{cos\left[(n+p)\frac{2\pi}{T}t\right]}{(n+p)\frac{2\pi}{T}}\right]_0^T\right) = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\int_0^T g(t).cos(p\omega t)dt = \frac{a_0}{2}.\int_0^T cos(p\omega t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\int_0^T cos(p\omega t).cos(n\omega t)dt$$

Le calcul de l'intégrale du premier terme donne :

$p = 0 \Longrightarrow \int_0^T cos(p\omega t)dt = \int_0^T dt = T,$

et $p \neq 0 \Longrightarrow \int_0^T cos(p\omega t)dt = \left[\frac{sin(p\omega t)}{p\omega}\right]_0^T = \frac{sin\left[\left(p\frac{2\pi}{T}\right).T\right]}{p.\left(\frac{2\pi}{T}\right)} - \frac{sin[0]}{p.\left(\frac{2\pi}{T}\right)} = 0.$

et celui de la dernière intégrale :

$p = n \Longrightarrow \int_0^T cos(p\omega t).cos(n\omega t)dt = \frac{T}{2}$

$et\ p \neq n \Longrightarrow \int_0^T cos[(p\omega)t].cos[(n\omega)t]dt = \frac{1}{2}.\int_0^T \left[cos\left[\left((p+n)\omega\right)t\right] + cos\left[\left((p-n)\omega\right)t\right]\right]dt = 0.$

On a donc : $p = 0 \Longrightarrow \int_0^T g(t).cos(p\omega t)dt = \int_0^T g(t).dt = \frac{a_0}{2}.T$

$$p \neq 0 \Longrightarrow \int_0^T g(t).cos(p\omega t)dt = a_p.\int_0^T cos^2(p\omega t).dt = a_p\frac{T}{2}$$

Et donc pour tout p entier (éventuellement nul) :

$$a_p = \frac{2}{T}.\int_0^T g(t).cos(p\omega t)dt$$

Le même raisonnement, en multipliant cette fois les deux membres de l'équation proposée par $sin(p\omega t)$, donne l'expression attendue des amplitudes b_p.

Une formulation équivalente peut être déduite de la décomposition en série de Fourier que nous venons de prouver en définissant le nombre A_n suivant $a_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n.\cos\varphi_n$ et $b_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n.\sin\varphi_n$.

Dans ces conditions :

$\tan\varphi_n = \frac{\sin\varphi_n}{\cos\varphi_n} = \frac{b_n}{a_n},$

$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2.(cos^2\varphi_n + sin^2\varphi_n) = A_n^2 \Longrightarrow A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$

et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos[(n.\omega).t] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin[(n.\omega).t] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos[(n.\omega).t] + b_n.\sin[(n.\omega).t]$

En utilisant la relation de trigonométrie $\cos p.\cos q + \sin p.\sin q = \cos(p-q)$, et en introduisant la variable A_n, et le terme sommé s'écrit :

$a_n.\cos[(n.\omega).t] + b_n.\sin[(n.\omega).t] = A_n.(\cos[(n.\omega).t].\cos\varphi_n + \sin[(n.\omega).t].\sin\varphi_n)$

$= A_n.\cos[(n.\omega).t - \varphi_n]$.

On obtient donc :

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.cos[(n\omega)t - \varphi_n] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.sin\left[(n\omega)t + \frac{\pi}{2} - \varphi_n\right]$$

Soit puisque $\omega = 2.\pi.f$, $g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.cos[(2\pi.f.n)t + \varphi_n]$

avec $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan\varphi_n \stackrel{\text{def}}{=} \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

On constate donc que toute fonction périodique de période $T = \frac{1}{f}$, continue par morceaux, peut effectivement être décomposée en une somme de fonctions cosinus (ou sinus) de fréquences égales à celle de la fonction et à ses multiples. Cette décomposition se généralise facilement à tout signal physique à support borné (c'est-à-dire nulle en dehors d'un intervalle $[0, T]$).

F- Fonctions exponentielle et logarithme

Pour tout réel positif non nul ($\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$), on définit la fonction **logarithme népérien** (ou en base e) de x, notée $\boldsymbol{ln(x)}$ **ou** $\boldsymbol{log_e(x)}$ la fonction primitive de la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$, ce qui revient à écrire :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \text{ et } ln'(x) = \frac{d\ ln(x)}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}$$

La fonction $ln(x)$ donne donc l'aire sous la courbe de la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ dans l'intervalle $[1, x]$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, négative si $x < 1$ puis positive si $x > 1$, tendant vers $-\infty$ quand $x \to 0$ et vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, suivant le graphe ci-dessous.

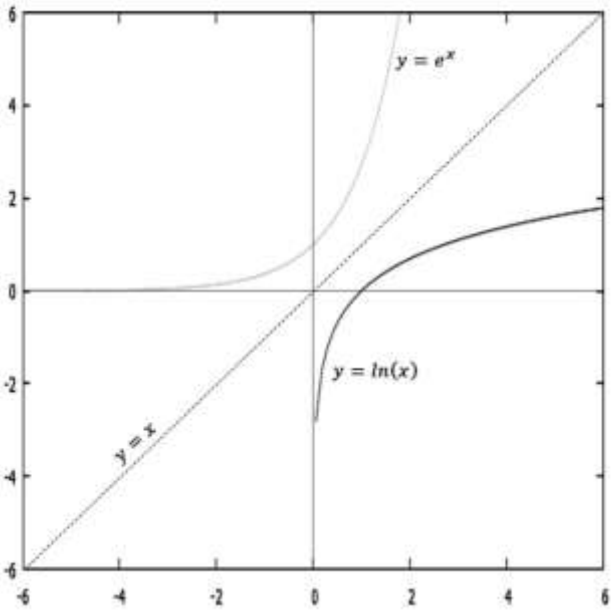


Figure A-5 : Fonctions logarithme népérien et exponentielle

De cette définition et de la loi de dérivation de la composition de deux fonctions rappelée ci-dessus (paragraphe « dérivée, différentielle et dérivée partielle »), on déduit que pour toute fonction $f(x)$ à valeurs strictement positives, la dérivée $\left[ln\big(f(x)\big)\right]' = \frac{d\, ln[f(x)]}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{f(x)}$ soit plus simplement $d\ ln[f] = \frac{df}{f}$, un résultat utile pour établir la loi de Weber-Fechner (équation 1-23).

Comme $(x.ln(x) - x)' = ln(x) + \frac{x}{x} - 1 = ln(x)$, une primitive de la fonction $ln(x)$ s'écrit :

$$\int \ln(x) = x.lnx - x.$$

Le logarithme népérien vérifie la relation suivante :

$$ln(x.y) = ln(x) + ln(y)$$

En effet, pour tout réel k, la dérivée de la fonction $f_k(x) = ln(k.x)$ est $f_k{}'(x) = k.ln'(k.x) = k.\frac{1}{k.x} = \frac{1}{x} = ln'(x)$. Les fonctions $ln(k.x)$ et $ln(x)$ ont donc même dérivées et sont donc égales à une constante additive K près : $ln(k.x) = ln(x) + K$. Pour $x = 1$, cette relation donne : $ln(k) = ln(1) + K = K$, et donc : $ln(k.x) = ln(x) + ln(k)$.

Il découle de cette relation que pour tout réel y : $ln(x^y) = y.ln(x)$ et $ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$.

Enfin, un logarithme peut aussi être évaluée dans toute base b, et en particulier en base 10. La fonction logarithme en base 10 est définie par $log_{10}(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$ (et, plus généralement, $log_b(x) = \frac{ln(x)}{ln(b)}$). Les règles de calcul évoquées ci-dessus s'appliquent pour des logarithmes de toute base.

Par définition, la fonction **exponentielle**, notée $\boldsymbol{exp(x)}$ ou $\boldsymbol{e^x}$ est la fonction réciproque de la fonction $ln(x)$: $ln(e^x) = e^{ln(x)} \stackrel{\text{def}}{=} x$. Son graphe est donc le symétrique de celui de la fonction logarithme par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$). Il est représenté sur la figure A-5. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ où elle est croissante, tendant vers 0 quand $x \to -\infty$ et vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, en passant par 1 pour $x = 0$.

En dérivant les deux membres de l'équation définissant l'exponentielle $exp\big(ln(x)\big) \stackrel{\text{def}}{=} x$ on obtient $ln'(x).exp'\big(ln(x)\big) \stackrel{\text{def}}{=} 1 \Longrightarrow exp'\big(ln(x)\big) = x$. La dérivée de la fonction exponentielle est donc la fonction réciproque de la fonction $ln(x)$. Il s'agit donc de la fonction $exp(x)$ elle-même : $(e^x)' = e^x$. Cette propriété est spécifique de la fonction exponentielle.

De même, e^x est une primitive de la fonction exponentielle : $\int e^x = e^x$

La fonction exponentielle est aussi la seule fonction vérifiant $e^{x+y} = e^x.e^y$ pour tout x et y réels.

En effet, $ln(e^{x+y}) = x + y = ln(e^x) + ln(e^y) = ln(e^x.e^y) \Longrightarrow e^{x+y} = e^x.e^y$.

Plus généralement, les règles de calculs bien connues pour les puissances s'appliquent à la fonction exponentielle qui s'identifie à l'élévation à la puissance x d'un nombre réel $e \approx 2{,}72$.

La fonction réciproque de la fonction $log_{10}(x)$ est la fonction $x \to 10^x = e^{x.ln(10)}$.

FONCTION		DERIVEE
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Logarithme népérien	$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Deux remarques vont mettre en lumière le grand intérêt de la fonction exponentielle en physique :

1- Lorsque la variable x augmente d'une constante additive, $x \to x + K$, l'exponentielle de cette variable est multipliée par une constante: $y = e^x \to e^K.e^x = e^K.y$. Par exemple, si $K = 10$, toute augmentation de 10 de la variable conduira à une multiplication par $e^{10} \approx 22\,026$ de l'exponentielle. C'est ce qui définit une « croissance exponentielle » d'une grandeur y par rapport au paramètre y qui la définit.

2- Plus important peut-être est le lien entre exponentielle et modélisation d'un phénomène physique aléatoire : chaque fois que des objets physiques (des particules par exemple) subissent une interaction de façon aléatoire avec une probabilité proportionnelle à une certaine grandeur (le temps, la distance parcourue etc.), la mise en équation de ce phénomène conduit à caractériser le nombre d'objets n'ayant pas interagit par une loi exponentielle décroissante. Le paragraphe 3-H-IV en détaille un exemple à propos de décroissance radioactive. Une modélisation similaire conduit à la même loi exponentielle décroissante par exemple pour l'interaction de particules non chargées (photons, neutrons) avec de la matière.

G- Vecteur, produit scalaire et produit vectoriel

I-Vecteurs

Commençons par quelques définitions : de façon réductrice mais suffisante pour le propos de cet ouvrage, nous définissons un **vecteur** $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ comme un couple de points (ordonné) dans un espace euclidien. Le point A est appelé **origine** ou **point d'application** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. La **direction** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la droite passant par A et par B. Son **sens** est de A vers B. La longueur du segment $[A, B]$ est appelée **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$. Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits **équipollents** si la figure (A, B, C, D) forme un parallélogramme, c'est-à-dire si le milieu du segment $[A, C]$ coïncide avec le milieu du segment $[B, D]$. Deux vecteurs équipollents ont donc même direction, même sens et même norme et peuvent être considérés comme égaux (dans un sens où l'origine des vecteurs n'est pas prise en compte dans la relation d'égalité).

La **relation de Chasles** découle de la définition de la somme de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Pour tout point A, le vecteur $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ est appelé vecteur nul et permet de définir $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ comme vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$ puisque $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$.

Pour tout nombre réel $x > 0$ (respectivement $x < 0$), le vecteur $x.\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de même direction, de même sens (respectivement de sens opposé) que $\overrightarrow{AB}$ et de norme $|x|.\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

II-Produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ faisant entre eux un angle $(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$ est un nombre réel noté $\vec{U}.\vec{V}$ et défini par le produit des normes de ces deux vecteurs et du cosinus de l'angle entre ces deux vecteurs :

$$\vec{U}.\vec{V} \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|.\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est donc nul ($cos(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}})$= $cos(90°) = 0$).

Quelques propriétés du produit scalaire sont notables :

1- Le produit scalaire est commutatif : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

2- Le produit scalaire est associatif pour l'addition vectorielle : $\vec{U}.(\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$

3- Si deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux, alors $\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et :
$$\vec{U} \perp \vec{V} \Longrightarrow \vec{U}.\vec{V} = 0.$$

4- $\vec{U}.\vec{U} = \left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{U}\right\|.\cos(\widehat{\vec{U},\vec{U}}) = \left\|\vec{U}\right\|^2.\cos(0)$ et donc : $\vec{U}.\vec{U} = \left\|\vec{U}\right\|^2$

5- Un vecteur $\vec{u}$ de norme 1 est qualifié de vecteur unitaire.

6- Le vecteur $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ est le vecteur unitaire dirigé le long de la droite (A,B) dans le sens de A vers B. Son produit scalaire $\vec{u}.\overrightarrow{AB}$ avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'identifie à la norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ qui n'est rien d'autre que la distance de A à B.

7- si $\left\|\vec{U}\right\| = 1$, alors $\vec{U}.\vec{V} = \left\|\vec{V}\right\|.\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$ s'identifie à la longueur de la projection du vecteur $\vec{V}$ sur la direction qui porte le vecteur unitaire $\vec{U}$.

Dans un espace euclidien à 3 dimensions doté d'un repère orthonormé $(0, x, y, z)$ et muni d'une base de trois vecteurs unitaires orthogonaux $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}\,, \overrightarrow{e_z})$, un vecteur quelconque $\vec{U}$ peut être décomposé de façon unique en une combinaison linéaire des vecteurs de la base suivant $\vec{U} = U_x.\overrightarrow{e_x} + U_y.\overrightarrow{e_y} + U_z.\overrightarrow{e_z}$. Le triplet de 3 nombres réels (U_x, U_y, U_z) définit les **coordonnées** du vecteur $\vec{U}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}\,, \overrightarrow{e_z})$. Ce triplet vérifie $U_x = \vec{U}.\overrightarrow{e_x}$, $U_y = \vec{U}.\overrightarrow{e_y}$ et $U_z = \vec{U}.\overrightarrow{e_z}$.

Dans ces conditions, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$ et $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ s'exprime sous la forme $\vec{U}.\vec{V} = (U_x.\overrightarrow{e_x} + U_y.\overrightarrow{e_y} + U_z.\overrightarrow{e_z}).(V_x.\overrightarrow{e_x} + V_y.\overrightarrow{e_y} + V_z.\overrightarrow{e_z})$. En développant, et compte tenu du fait que $\|\overrightarrow{e_x}\|^2 = \left\|\overrightarrow{e_y}\right\|^2 = \|\overrightarrow{e_z}\|^2 = 1$ et $\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_z} = 0$, on obtient :

$$\vec{U}.\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z.$$

Dans le cas où $\vec{V} = \vec{U}$, ce résultat permet de calculer la **norme** d'un vecteur par rapport à ses coordonnées : $\vec{U}.\vec{U} = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 = \|\vec{U}\|^2 \Rightarrow \|\vec{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$

Enfin, puisque $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$, l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non nuls s'exprime en fonction de leurs coordonnées suivant :

$$\cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) = \frac{\vec{U}.\vec{V}}{\|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|} = \frac{U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z}{\sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}.\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

III-Produit vectoriel

La définition du produit vectoriel nécessite de définir une orientation de l'espace. Considérons pour cela deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans le plan (O, x, y) faisant entre eux un angle $\alpha = (\widehat{\vec{U},\vec{V}})$ compté positivement dans le sens de $\vec{U}$ vers $\vec{V}$: un vecteur dont la direction est perpendiculaire à $\vec{U}$ et $\vec{V}$ peut avoir deux sens opposés, soit $\overrightarrow{W_1}$ *et* $\overrightarrow{W_2}$ suivant la partie gauche de la figure A-6 :

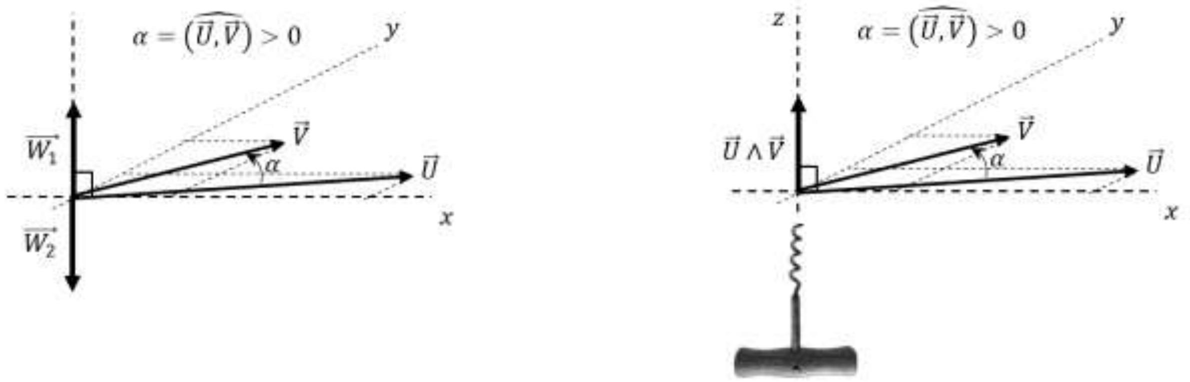


Figure A-6 : Produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ de deux vecteurs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$.

Dans cette configuration, on qualifie de **direct** le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W_1})$, et d'indirect le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \overrightarrow{W_2})$.

On définit le **produit vectoriel** noté $\boldsymbol{\vec{U} \wedge \vec{V}}$ deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ faisant entre eux un angle $\alpha = (\widehat{\vec{U},\vec{V}})$ compté positivement dans le sens de $\vec{U}$ vers $\vec{V}$ par :

1- $\vec{U} \wedge \vec{V}$ est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$
2- Le trièdre $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$ est direct
3- $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\sin(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$

Un moyen pratique permet de déterminer facilement le sens de $\vec{U} \wedge \vec{V}$: il suffit d'imaginer que l'on se sert d'un tire-bouchon positionné au point d'application commun des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ pour faire tourner $\vec{U}$ de manière à le rapprocher de $\vec{V}$. La direction donnée par le déplacement du tire-bouchon donne le sens de $\vec{U} \wedge \vec{V}$.

H- Calcul de l'accélération dans un mouvement circulaire uniforme

Dans un référentiel fixe immobile (F), considérons un objet ponctuel en mouvement sur une trajectoire circulaire de rayon R à une vitesse angulaire ω (en rad/s) constante. La norme de la vitesse de l'objet est elle-même constante et vaut $v = \|\vec{v}\| = R.\omega$. En revanche, la direction de cette vitesse varie au fil du temps, ce qui confère à l'objet une accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ que nous allons calculer.

La figure A-7 montre la variation de la direction de la vitesse de l'objet $d\vec{v} = \vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$ entre deus instants t et $t + dt$ infiniment proches ($dt \to 0$).

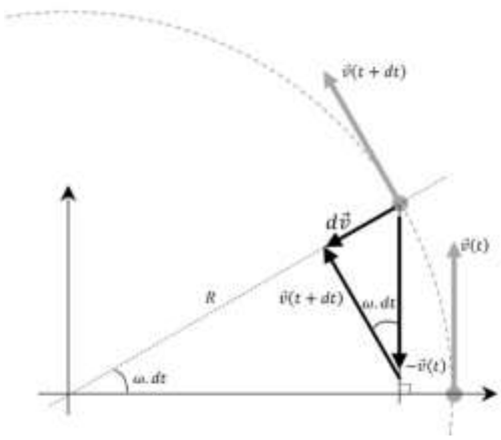


Figure A-7 : Accélération d'un mobile en mouvement circulaire uniforme.

Lorsque $dt \to 0$, la direction de $d\vec{v}$ est portée par le rayon de la trajectoire et pointe vers le centre de la trajectoire. Cette variation de vitesse dans l'intervalle de temps dt crée une accélération centripète $\overrightarrow{a_F} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Les directions des vecteurs $\vec{v}(t+dt)$ et $-\vec{v}(t)$ étant perpendiculaires à celles qui définissent l'angle $\omega.dt$, ces deux vecteurs font entre-eux me même angle $\omega.dt$. La norme du vecteur $d\vec{v}$ tend donc vers la longueur de l'arc $v.\omega.dt$ lorsque $dt \to 0$.

Si $dt \to 0$ donc, l'accélération $a_{CP} = \|\vec{a}_{CP}\| = \frac{\|d\vec{v}\|}{dt} = \frac{v.\omega.dt}{dt} = v.\omega.$

Mais la norme de la vitesse $v = \|\vec{v}\| = R.\omega \Longrightarrow \omega = \frac{v}{R}$. Il s'ensuit que l'accélération centripète a_{CP} qui permet à l'objet de suivre une trajectoire circulaire de rayon R à vitesse angulaire uniforme est :

$$a_{CP} = \frac{v^2}{R}$$

Dans le modèle atomique de Bohr, cette accélération centripète est générée par la force électrostatique qu'exercent les charges positives des protons du noyau sur un électron atomique et dont la norme vaut exactement $\|\vec{F}\| = m.\|\vec{a}_{CP}\| = \frac{m.v^2}{R}$.

Dans un référentiel mobile lié à l'objet en rotation, ce dernier est immobile : la force d'accélération centripète est compensée par une force centrifuge de même norme $\frac{m.v^2}{R}$ correspondant à une accélération $a_{CF} = \frac{v^2}{R}$ de même direction que $\vec{a}_{CP}$ mais de sens opposé.