



# ONDES ET MATIERE

PASS : POLYCOPIE DE COURS. ANNEE 2025-2026

Pr DENIS MARIANO-GOULART

Prête au vrai maintenant une oreille attentive,  
*Quod super est, vacuas auris animumque sagacem*  
Nette de tout souci, aiguise ton esprit,  
*semotum a curis adhibe veram ad rationem,*  
Et mes dons, apprêts avec un soin fidèle,  
*ne mea dona tibi studio disposta fideli,*  
Garde d'en faire fi avant d'y rien comprendre,  
*intellecta prius quam sint, contempta relinquas.*  
Car je vais t'exposer les hautes lois du ciel  
*nam tibi de summa caeli ratione deumque*  
Et des dieux, dévoiler d'où procèdent les choses,  
*dissere incipiam et rerum primordia pandam.*

Lucrèce. De la nature des choses, Chant 1, vers 50-55  
Traduction d'Olivier Sers, Belles lettres, Paris, 2012

## « Le penseur de Tobyl ».

Région de Qostanaï, Kazakhstan.  
Musée national de la République du Kazakhstan.

L'auteur de cette sculpture arpentait la steppe kazakhe au 3<sup>e</sup> ou au 2<sup>e</sup> millénaire avant notre ère. Il exprime un sentiment toujours présent chez l'homme moderne qui lève ses yeux vers les cieux : celui d'un rêve mêlé de perplexité, puis, très vite, du désir de comprendre, selon les mots de Lucrèce, d'où proviennent les choses.



# INTRODUCTION

La physiologie, l'imagerie médicale, la radiothérapie ou les techniques de laboratoire sont des disciplines fondées sur une physique qui ne s'est développée qu'à partir de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Celle-ci fut élaborée au moyen de modèles et d'outils mathématiques qui ne constituent pas un héritage commun aux étudiants se destinant à une profession de santé.

Or limiter pour ceux-ci l'étude de la physique à quelques recettes, ou pire à un formulaire indigeste, ne permettrait pas à l'étudiant de fonder ses connaissances sur les bases solides nécessaires à un exercice raisonnable d'une profession de santé comme à la prise en main de techniques thérapeutiques nouvelles tout au long de la vie professionnelle. Pire, cela conduirait à reléguer des faits scientifiques indiscutablement établis à un certain degré de précision au rang d'opinions subjectives dépendant de l'individu, du temps ou du lieu où elles sont énoncées. La notion même de science s'y dissoudrait, et la physique passerait pour une discipline ésotérique.

Le cours que nous proposons est donc fondé sur deux partis pris pédagogiques :

- 1- A de très rares exceptions près, les lois de physique qui font l'objet de ce cours seront systématiquement démontrées pas à pas, ou au minimum justifiées dans le cadre d'un modèle et d'hypothèses clairement énoncées.
- 2- Cette justification ne s'appuiera pas sur des notions de mathématiques qui sortent du programme enseigné en lycée. Au besoin, une seconde polycopié proposé aux étudiants rappelle toutes les bases de mathématique nécessaires.

L'objectif de ce cours est de fournir à l'étudiant une compréhension suffisante de la physique atomique et nucléaire et de celle des rayonnements pour exercer une activité de soins.

Cela nécessitera de commencer par définir et modéliser une **onde**, puis sa propagation au moyen d'un **principe de moindre action** que nous justifierons. Les exemples des **ondes sonores et électromagnétiques** permettront à l'étudiant de comprendre d'une part le fonctionnement et les pathologies de la vision et de l'audition humaine, et d'autre part les techniques de radiothérapie et d'imagerie utilisées dans les centres de soins.

L'étude des **ondes stationnaires** constituera une première approche de la **quantification** des grandeurs physiques. Celle d'une onde traversant un orifice en **diffractant** et en produisant des **interférences** permettra de définir la **Résolution** d'un appareil d'imagerie médicale.

Ces éléments amèneront à une **modélisation duale, onde-particule**, de la nature. Après un détour dans le monde de la **relativité restreinte** pour justifier la relativité de l'écoulement du temps et l'énergie qui associée à une masse au repos ( $E = m \cdot c^2$ ), nous expliquerons pourquoi l'**énergie d'un photon** est proportionnelle à la fréquence de cette onde ( $E = h \cdot f$ ). Un retour sur les expériences de diffraction permettra de comprendre l'origine des phénomènes aléatoires qui régissent le comportement d'une particule élémentaire, et justifient les **relations d'incertitudes d'Heisenberg**. Enfin, la notion d'onde stationnaire décrite précédemment éclairera le concept de **quantification** des grandeurs physiques associées aux particules élémentaires. Dans les pas du physicien Niels Bohr, nous établirons un **modèle d'atome** où les électrons atomiques se répartissent sur des couches énergétiques discrètes. Ce modèle, et ses améliorations ultérieures est à la base de toute la **chimie moderne** mais aussi des **sources de rayonnement ionisants** utilisés en imagerie ou dans les laboratoires d'analyse médicale. Nous nous intéresserons enfin au noyau atomique, pour décrire les réactions de **désintégrations radioactives** qui sont exploitées par les médecins nucléaires en diagnostic et en thérapie.

# CHAPITRE 1 : PHYSIQUE DES ONDES

*Présentation :* Ce chapitre commence de façon un peu formelle par définir et modéliser la notion d'onde progressive et les grandeurs physiques fondamentales qui lui sont associées. Cela permettra de justifier un des principes de base de la radioprotection. On explique ensuite pourquoi toute onde progressive périodique est la superposition d'ondes progressives sinusoïdales, ce qui permettra de limiter la suite de l'exposé au cas simple de ces ondes. Ce modèle sera exploité pour justifier le principe de moindre action et expliquer par exemple pourquoi un rayon lumineux se propage en ligne droite dans un milieu homogène.

Pour ancrer ces concepts un peu abstraits dans la réalité physique, on décrira ensuite deux types d'ondes particulièrement utiles aux soignants : l'onde sonore d'abord en explicitant ses caractéristiques utiles à l'étude de l'audition, puis les ondes électromagnétiques au moyen d'un formalisme minimal pour permettre à des soignants de les exploiter au mieux.

La notion d'onde stationnaire ouvrira à une première approche de la quantification que nous utiliserons pour établir les fondements de la mécanique ondulatoire. Ce chapitre se terminera en traitant du comportement d'une onde à la traversée d'un orifice (diffraction) et des phénomènes d'interférences qui s'ensuivent, ce qui permettra de définir la résolution d'un appareil d'imagerie, comment numériser une image ou comment déterminer la géométrie d'une molécule.

## A- Onde progressive : définitions et caractéristiques

### I- Définitions

- 1- Une **onde progressive** est la propagation dans un milieu donné (matériel ou vide) d'une perturbation entretenue d'une ou plusieurs caractéristiques physiques de ce milieu (par exemple, une position de particules, une pression, une température, un champ électrique ou magnétique etc.). La vitesse de propagation de cette perturbation est appelée **célérité** de l'onde.
- 2- Une onde progressive est **scalaire** lorsque la grandeur physique perturbée est quantifiée par un nombre réel, **vectorielle** lorsqu'elle est quantifiée par un vecteur.
- 3- Une onde progressive est **longitudinale** lorsque la grandeur est perturbée dans la direction de propagation de l'onde, **transversale** lorsque la grandeur est perturbée dans la direction orthogonale à la propagation de l'onde.
- 4- Dans le cas d'une onde progressive vectorielle, l'onde est **polarisée rectilignement** si la grandeur physique vectorielle perturbée garde une direction constante durant la propagation de l'onde. Si ce vecteur tourne avec une vitesse angulaire constante perpendiculairement à la direction de propagation sans changer de norme, on parlera de **polarisation circulaire**. Le terme de **polarisation elliptique** sera réservé à un vecteur décrivant une ellipse le long de sa direction de propagation.

## II- Exemples

La figure 1 donne un exemple d'une onde sonore générée par une corde ou une surface vibrante telle que la membrane d'un haut-parleur (HP). Il s'agit d'une onde progressive scalaire longitudinale de vibration où la grandeur physique perturbée est la position de molécules d'air selon une direction notée  $x$ . La mise en vibration de proche en proche des particules du milieu de propagation est assurée par une onde de surpression locale créée par un rapprochement périodique de ces particules (cf. paragraphe 1-C).

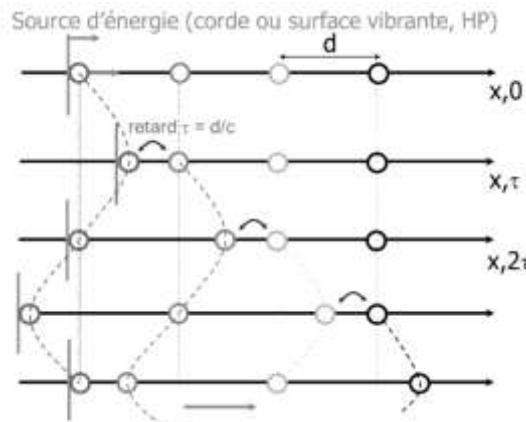


Figure 1 : Onde sonore produite par la mise en oscillation de proche en proche de molécules d'air au moyen d'une corde (violon...) ou d'une surface (tambour, haut-parleur, cordes vocales) vibrante.

La figure 2 constitue un autre exemple d'onde progressive scalaire, transversale cette fois. La grandeur physique perturbée est la position suivant une direction verticale de portions d'une corde tendue par une force de tension  $T$ . La propagation se fait le long de cette corde qui constitue le milieu de propagation, dans une direction horizontale. La source de l'onde est une baguette fixée à une extrémité de la corde qui lui impose mouvement oscillant.

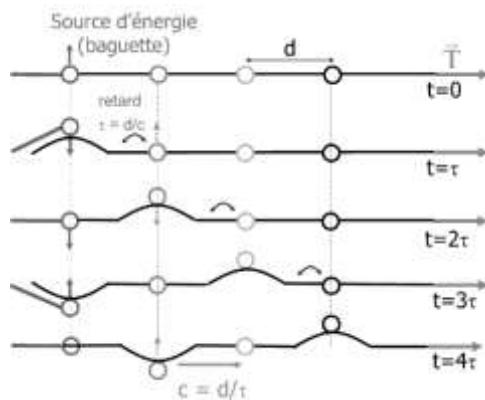


Figure 2 : Propagation d'une onde progressive transversale de vibration le long d'une corde tendue, ou de la surface d'un plan d'eau.

La figure 3 donne un dernier exemple concernant cette fois une onde vectorielle transversale. La grandeur physique perturbée est ici un champ électrique ou magnétique polarisé rectilignement suivant une direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ( $x$ ) et dont la norme varie périodiquement avec le temps. Ce champ induit l'apparition retardée d'un champ analogue de proche en proche (cf. paragraphe 1-D).

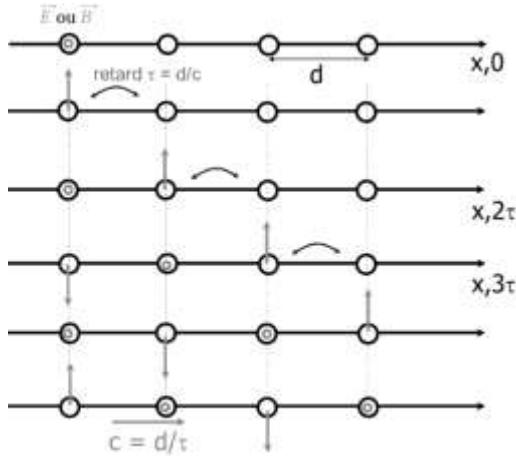


Figure 3 : Propagation d'une onde vectorielle transversale (électromagnétique par exemple).

### III- Modélisation

On modélise la grandeur physique associée à une onde qui se propage dans le sens des  $x > 0$  à la célérité  $c$  par une fonction  $g(t, x)$  continue et deux fois dérivable par rapport à chacune de ses deux variables  $t$  et  $x$ . La figure 4 représente une grandeur physique  $g(t, 0)$  perturbée en  $x = 0$  et  $g(t, x)$  en un point  $x > 0$ .

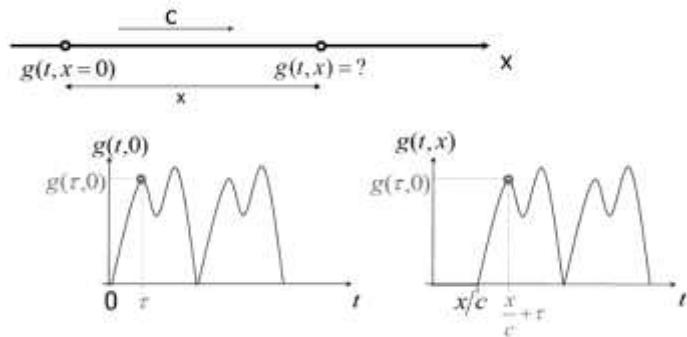


Figure 4 : Modélisation d'une onde progressive sinusoïdale

Dans ces conditions, pour tout instant  $\tau$ ,  $g\left(\tau + \frac{x}{c}, x\right) = g(\tau, 0)$ . En posant  $t = \tau + \frac{x}{c}$ , on a :

$$\boxed{\begin{aligned} g(t, x) &= g\left(t - \frac{x}{c}, 0\right) \\ g_x(t) &= g_0\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned}} \quad (1)$$

Si l'onde progressive se déplaçait dans le sens des  $x$  négatifs, on aurait de même :

$$\boxed{\begin{aligned} g(t, x) &= g\left(t + \frac{x}{c}, 0\right) \\ g_x(t) &= g_0\left(t + \frac{x}{c}\right) \end{aligned}} \quad (2)$$

## IV- Décomposition en série de Fourier

Considérons une fonction  $g_0(t)$  périodique de **période**  $T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\omega}$  (ou de durée finie  $T$ ) et raisonnablement régulière (continue par morceaux avec un nombre fini de points de discontinuités sur une période). Dans ces conditions, le **théorème de décomposition en série de Fourier** (cf. rappels de mathématique) affirme que moyennant le calcul de :

$$\begin{aligned} a_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T g_0(\tau) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot \tau) \cdot d\tau \\ b_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T g_0(\tau) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot \tau) \cdot d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \tan \varphi_n \stackrel{\text{def}}{=} \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (4)$$

La fonction  $g_0(t)$  s'exprime sous la forme d'une somme de fonctions circulaires (sinus ou cosinus) de fréquences  $0, f, 2.f, 3.f, \dots$  multiples de  $f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{2\pi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}$  suivant :

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos[(n\omega)t - \varphi_n] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \left[ (n\omega)t + \frac{\pi}{2} - \varphi_n \right] \\ g_0(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos[(2\pi \cdot f \cdot n)t - \varphi_n] \end{aligned} \quad (5)$$

La fréquence de la fonction  $g_0$ ,  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ , est la **fréquence fondamentale** en hertz ( $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ), et  $\omega = 2\pi \cdot f$  est la **pulsation propre fondamentale** en ( $\text{rad/s}$ ).

Les fonctions cosinus (ou sinus) de fréquences multiples de la fréquence fondamentale  $f$  sont appelées des **harmoniques** d'ordre 1,2,3, ... Les harmoniques de plus hautes fréquences représentent dans cette décomposition les variations les plus rapides de la fonction  $g_0$  sur une période. Pour des ondes ayant une réalité physique, il existe une valeur maximale à la variation de la fonction  $g_0$  en fonction du temps, ce qui limite le nombre d'harmoniques à une valeur finie.

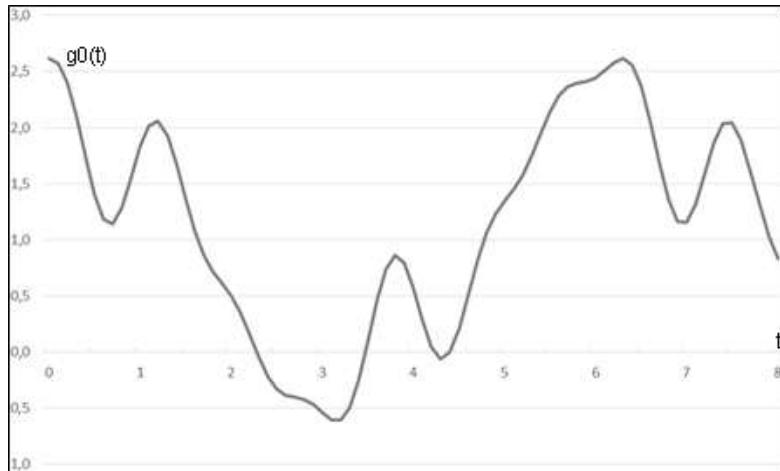


Figure 5 : Exemple d'une fonction périodique (de période  $2\pi$ ) décomposable en somme de fonctions sinus ou cosinus au moyen de 7 harmoniques. Ici  $g_0(t) = 1 + 1,3.\cos(t) + 0,4.\cos\left(3.t + \frac{\pi}{2}\right) + 0,3.\cos(5.t) + 0,2.\cos\left(7.t - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1,3.\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 0,4.\sin(3.t + \pi) + 0,3.\sin\left(5.t + \frac{\pi}{2}\right) + 0,2.\sin(7.t)$  puisque  $\cos(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Les graphes représentant  $A_n$  et  $\varphi_n$  en fonction des fréquences harmoniques  $n.f$  (figure 6) sont appelés **spectres en amplitude et en phase** (ou transformée de Fourier) de la fonction  $g_0$ . Ils la définissent complètement.

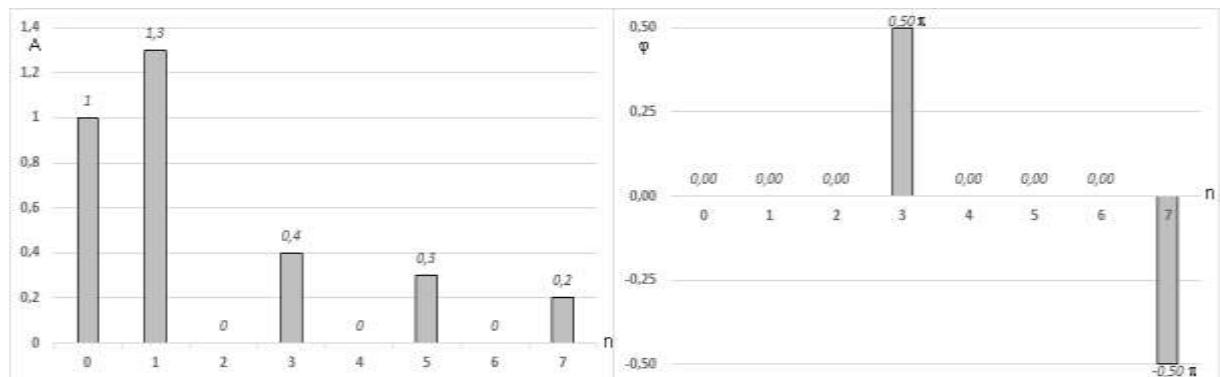


Figure 6 : Spectres en amplitude ( $A$ , à gauche) et en phase ( $\varphi$ , à droite) de la fonction  $g_0(t) = 1 + 1,3.\cos(t) + 0,4.\cos\left(3.t + \frac{\pi}{2}\right) + 0,3.\cos(5.t) + 0,2.\cos\left(7.t - \frac{\pi}{2}\right)$ . La valeur  $n$  en abscisse représente le numéro de l'harmonique, donc la fréquence  $n.f$ .

Cette possibilité de décomposer une perturbation source d'une onde progressive  $g_0(t)$  en somme de fonctions cosinus s'étend à la fonction  $g_x(t) = g_0\left(t - \frac{x}{c}\right)$  et donc au modèle d'onde progressive que nous avons établi. Sans perte de généralité, l'étude des ondes progressives peut donc se limiter au cas d'un type d'onde progressive particulière que nous qualifierons de **pure**, de **sinusoïdale**, de **monochromatique**, ou encore de **radiation** (tous ces termes sont synonymes) et qui consiste en une onde progressive créée par une perturbation  $g_0(t)$  dont le spectre ne contient qu'une seule fréquence.

Une onde dont le spectre contient plus d'une fréquence sera qualifiée d'une **polychromatique**, ou **complexe** et peut donc être décomposée en une superposition d'ondes monochromatiques, si bien que les résultats que nous obtiendrons dans le cas simplifié de ces dernières pourront aussi s'appliquer aux ondes complexes.

## V- Caractéristiques d'une onde progressive monochromatique

Une **onde progressive monochromatique** se propageant dans la direction  $x > 0$  à la célérité  $c$ , produite par une perturbation localisée au point  $x = 0$  sera donc de la forme :

$$g(t, x) = g(0, x) + A \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

où  $g(0, x)$  est la valeur de la grandeur physique observée en tout point  $x$  avant toute perturbation par l'onde progressive. Pour éviter de surcharger les notations par ce terme additif, on supposera dans la suite que  $g(0, x) = 0$  pour toute position  $x$ , et l'on notera :

$$g(t, x) = A \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (6)$$

Dans cette dernière expression :

$A$  est l'**amplitude** de l'onde (de même unité que la grandeur physique perturbée  $g$ ),

$\omega \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{T}$  est la **pulsation propre** (en radians par seconde) et  $f$  la **fréquence** de l'onde (en Hertz), deux grandeurs représentant la même réalité physique avec deux unités différentes,

$T$  est la **période** (pour la variable temporelle, en seconde).

L'onde progressive monochromatique  $g(t, x)$  présente deux périodes, l'une pour la variable temporelle ( $T$ ), l'autre suivant la variable d'espace :

En tout point  $x$  fixé,  $g(t + T, x) = A \cdot \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \cdot \left( t + T - \frac{x}{c} \right) \right] = A \cdot \sin \left[ \frac{2\pi}{T} \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) + 2\pi \right] = g(t, x)$

A tout instant  $t$  fixé,  $g(t, x) = g(t, x - T) = A \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - T - \frac{x}{c} \right) \right] = A \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{ct+x}{c} \right) \right] = g(t, x + c \cdot T)$

La période spatiale  $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} c \cdot T$  parcourue par l'onde en une période temporelle  $T$  est appelée **longueur d'onde** et est notée  $\lambda$  (en mètre) :

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} c \cdot T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi c}{\omega} \quad (7)$$

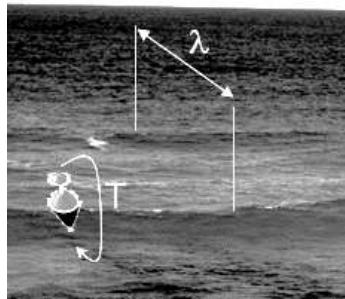


Figure 7 : Période et longueur d'onde

Quelques définitions :

La **phase** est le terme indépendant du temps  $\phi = \frac{\omega x}{c}$  de la relation  $g(t, x) = A \cdot \sin \left[ \omega \cdot t + \frac{\omega x}{c} \right]$ , complété éventuellement d'autres termes indépendants du temps.

Une **surface d'onde** est une surface connexe contenant l'ensemble des points de même phase.

Dans le cas d'une source ponctuelle isotrope positionnée en un point C de l'espace, les surfaces d'ondes sont constituées de sphères concentriques centrées en C et de rayons  $x$ , associées à des phases identiques  $\phi = \frac{\omega x}{c}$ . Ce type d'onde est qualifiée d'**onde sphérique**. A distance de la source C et localement, ces surfaces d'ondes sont proches des plans tangents aux cercles et peuvent autoriser une approximation locale d'une onde sphérique par une **onde plane** (Figure 8).

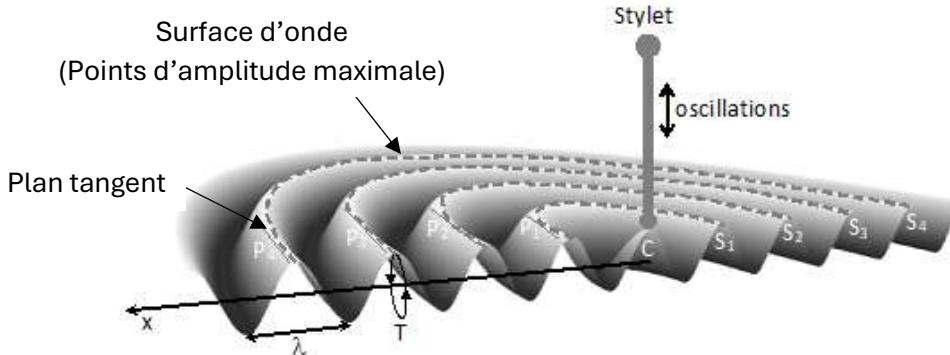


Figure 8 : Exemple de surfaces d'ondes sphériques  $S_i$  (en pointillés)

En tout point atteint par une onde, le **vecteur d'onde**,  $\vec{k}$ , est un vecteur dont la direction est normale aux surfaces d'ondes, le sens identique à celui de la propagation de l'onde, et de norme  $\|\vec{k}\| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{c}$ . Pour un modèle à 1 dimension, on a :

$$g(t, x) = A \cdot \sin[\omega \cdot t - k \cdot x] \quad (8)$$

Deux ondes progressives de même longueur d'onde définies par les fonctions  $g_1(t, x) = A \cdot \sin[\omega \cdot t - k \cdot x - \phi_1]$  et  $g_2(t, x) = A \cdot \sin[\omega \cdot t - k \cdot x - \phi_2]$ , avec  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$  sont qualifiées d'**ondes cohérentes** si la différence de phase  $\phi_1 - \phi_2$  reste constante dans le temps.

**Principe fondamental de la radioprotection**: Considérons une source ponctuelle de rayonnement émettant de façon isotrope une puissance  $P$  (en watt,  $W$ ). A une distance  $d$  de la source, cette puissance se répartit de façon homogène sur l'ensemble de la surface d'une sphère de rayon  $d$ , donc de surface  $4\pi d^2$ . La puissance surfacique  $I$  (en  $W/m^2$ ) reçue dans chaque  $m^2$  de cette surface est donc inversement proportionnelle au carré de la distance séparant la source de la sphère où cette puissance surfacique est évaluée, et s'écrit :

$$I(W/m^2) = \frac{P}{4\pi} \frac{1}{d^2} \quad (9)$$

Un patient ou un soignant exposant la surface de son corps à une source de rayonnement recevra donc une puissance par unité de surface corporelle inversement proportionnelle au carré de la distance qui le sépare de la source. Cette **loi « en  $1/d^2$  »** est une des 3 règles fondamentales permettant de se protéger de rayonnements dangereux (avec la limitation du temps d'exposition et l'utilisation d'écrans atténuant le rayonnement). Elle fonde de nombreuses pratiques et réglementations en matière de **radioprotection**.

## B- Propagation d'une onde : du principe d'Huygens au principe de moindre action

Le **principe de Huygens** découle directement de la modélisation et des exemples que nous avons donné d'une onde progressive. Il stipule que **tout point atteint par une onde issue d'une source se comporte comme une nouvelle source ponctuelle, et réemet ainsi de façon isotrope une onde sphérique**, qui atteindra à son tour un point voisin, permettant ainsi une propagation de l'onde de proche en proche.

Considérons un rayon lumineux se propageant d'un point  $S$  à un point  $S'$ . Si l'on considère que le point  $S$  a été atteint par l'onde, puis réemet, suivant le principe de Huygens, une onde sphérique isotrope, une infinité de trajectoires  $C_i$  de longueurs  $x_i$  reliant  $S$  à  $S'$  (en pointillés sur la figure 9) peuvent *a priori* être envisagées, en plus de la ligne droite  $C_d$ .

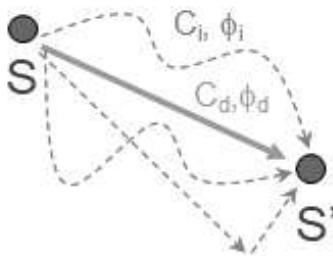


Figure 9 : Illustration de quatre des différents chemins *a priori* possibles pour une onde lumineuse entre deux points  $S$  et  $S'$ . Chaque pointillé se comporte comme une source secondaire d'ondes sphériques dont certaines directions construisent un chemin de  $S$  à  $S'$ .

En  $S'$ , toutes les ondes issues de  $S$  ayant suivi tous les chemins  $C_i$  passant par  $S'$  s'additionnent, et l'onde en  $S'$  s'écrit, suivant (6) :

$$g(t, S') = A \cdot \sum_{chemins C_i} \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x_i}{c} \right) \right] = A \cdot \sum_{chemins C_i} \sin [\omega \cdot t - \omega \cdot t_i] \text{ où } t_i = \frac{x_i}{c} \quad (10)$$

La pulsation propre de l'onde est de l'ordre de  $10^{14}$  rad/s par exemple pour une radiation lumineuse dans le spectre visible par un être humain.

Si le temps de propagation  $t_i$  ne varie pas infiniment peu entre deux chemins possibles rejoignant  $S$  et  $S'$ , alors le terme de phase  $\omega \cdot t_i$  dans l'expression (10) prend des valeurs très variables d'un chemin à un autre chemin voisin, générant dans la somme, pour tout instant  $t$ , des valeurs de la fonction sinus réparties de façon uniforme entre -1 et +1. Une fois ces sinus sommés, ces valeurs se compensent, et la somme présente dans l'équation (10) est nulle.

L'onde en  $S'$ ,  $g(t, S')$ , ne sera produite que par une composante sinusoïdale dans la somme de l'équation (10) obtenue pour un chemin  $C_d$  pour lequel le temps de trajet  $t_d$  entre  $S$  et  $S'$  varie infiniment peu entre  $C_d$  et un autre chemin voisin. Cette condition de **stationnarité du temps de trajet** suppose que  $t_d$  soit un **extremum** (un minimum, un maximum ou une plage constante) de la fonction exprimant le temps de trajet en fonction du chemin emprunté.

Ce résultat est un cas particulier d'un principe physique beaucoup plus général que le raisonnement heuristique qui précède, dû au physicien Robert Feynman (1918-1988), justifie :

**Principe de moindre action de Fermat** (pour un rayon lumineux, 1657) : La trajectoire suivie par une onde lumineuse est celle que cette onde peut parcourir en un extremum de temps.

Dans un milieu homogène où la vitesse de propagation de l'onde est constante, sans miroir, cet extremum correspond à un minimum et tous les rayons ayant suivi des chemins autres que celui parcouru en un minimum de temps produisent des ondes qui se détruisent par interférences. Seul subsiste, *in fine*, le rayon qui s'est propagé en **ligne droite** entre  $S$  et  $S'$ .

Des trajectoires correspondant à un temps de parcours constant ou maximal peuvent survenir dans certaines configurations, avec un rayon lumineux se réfléchissant sur un miroir elliptique ou sphérique par exemple :

Cas d'un miroir elliptique. La figure 10 illustre le cas d'un rayon lumineux issu d'un foyer  $F_1$  d'un miroir elliptique se réfléchissant sur ce miroir en un point  $M_i$  avant d'atteindre le second foyer  $F_2$ . La définition d'une ellipse garantit que pour tout point  $M_i$ , la longueur de la trajectoire  $(F_1, M_i, F_2)$ , donc le temps de trajet pour parcourir cette trajectoire est constant. Tous les rayons issus de  $F_1$  qui se réfléchissent en un point quelconque du miroir elliptique convergent donc vers  $F_2$ .

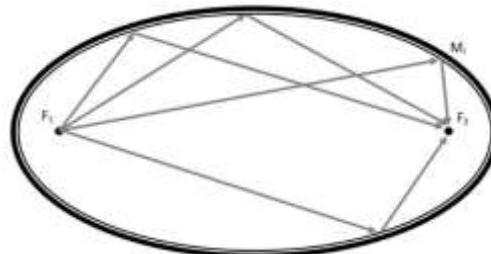


Figure 10 : Exemple de temps de trajet constants de rayons lumineux issus d'un foyer et se réfléchissant sur un miroir elliptique.

- Cas d'un miroir sphérique. Plaçons dans le vide un miroir sphérique de rayon 1 centré à l'origine d'un repère  $(0, x, y, z)$  et considérons un rayon lumineux issu du point  $A(-1,0,0)$  qui se réfléchit sur le miroir en  $M(x - 1, y, 0)$  puis atteint le point  $C(1,0,0)$  suivant la figure 11.

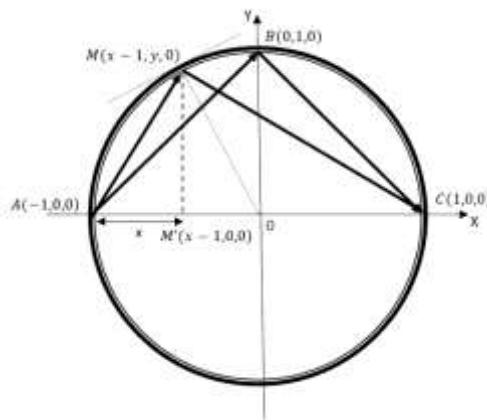


Figure 11 : Exemple de temps de trajet maximal d'un rayon lumineux après réflexion sur un miroir sphérique.

Le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur  $L(A, M, C)$  de la trajectoire du rayon issu de  $A$ , se réfléchissant en  $M$  et atteignant  $C$ . On pourra facilement vérifier que  $L(A, M, C) = \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot (2 - x) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2 - x})$ . L'étude de cette fonction de  $x$  pour  $x \in [0,2]$  retrouve une fonction croissante puis décroissante, avec un maximum atteint en  $x = 1$ , c'est-à-dire au point  $B(0,1,0)$  qui satisfait à la loi de Descartes sur la réflexion. Dans cet exemple donc, le trajet effectivement suivi par un rayon lumineux issu de  $A$ , se réfléchissant sur le miroir sphérique avant d'atteindre  $C$  est donc la trajectoire  $(A, B, C)$  qui correspond à un maximum de temps de trajet.

L'application du principe de Huygens et une construction graphique simple mettant en jeu une onde plane ou sphérique se propageant de proche en proche permet aussi de comprendre pourquoi la forme des surfaces d'ondes (des plans ou des sphères) se conserve au fil de la propagation de l'onde dans un milieu homogène.

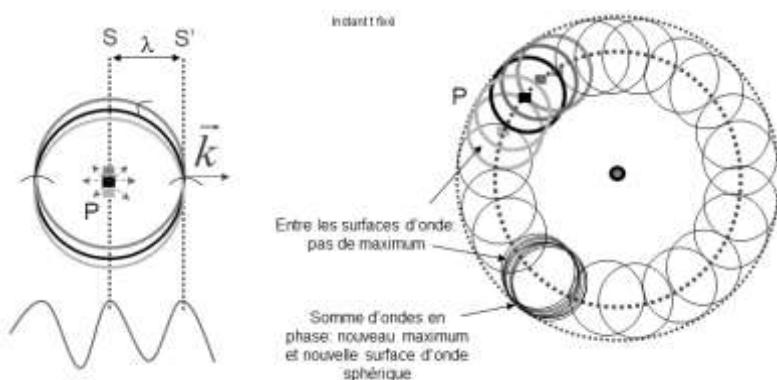


Figure 12 : Application du principe de Huygens pour comprendre la conservation des surfaces d'ondes (planes à gauche ou sphériques à droite) au fil de la propagation d'une onde. Les surfaces d'ondes représentées sur la figure concernent dans cet exemple des points au maximum d'intensité à un instant  $t$  donné.

Considérons par exemple l'onde plane représentée dans la partie gauche de la figure 12 et un point  $P$  situé dans un plan d'onde associé (à l'instant de la figure) à un maximum de vibration. La superposition des ondes sphériques émises par le point  $P$  et ses voisins produit un unique maximum situé à une longueur d'onde à droite de  $P$ . Il en est de même des points situés au-dessus et au-dessous de  $P$ , ce qui conduit à une nouvelle surface d'onde constituée par un plan à une longueur d'onde de la surface d'onde précédente, et parallèle à celle-ci. Le même raisonnement sur des surfaces d'ondes sphériques (schéma de droite de la figure 12) conduit de même à la propagation de surfaces d'ondes sphériques sous la forme de sphères de rayons croissants centrées sur la source ponctuelle de l'onde.

## C- Premier exemple d'onde progressive : l'onde sonore

### I- Onde de (sur)pression acoustique, impédance acoustique et célérité du son

La figure 13 illustre les oscillations de deux particules gazeuses mises en vibration autour de leurs positions de repos  $x_1$  et  $x_2$  par un haut-parleur avec un déphasage  $\frac{x_2-x_1}{c}$ .

Au fil du temps, on constate que les particules 1 et 2 s'éloignent puis se rapprochent suivant une période identique à celle de l'onde de vibration. La densité de particules en  $x$ , suit de ce fait aussi une loi périodique de même période que le mouvement vibratoire. Il s'ensuit une surpression locale périodique apportée par la propagation du son à la pression initiale du milieu.

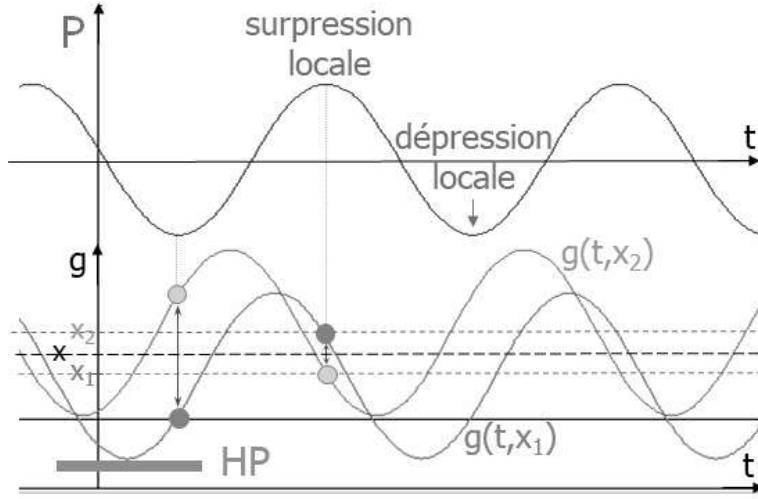


Figure 13 : illustration du mouvement vibratoire déphasé de deux particules situées à des distances  $x_1 < x_2$  de la membrane d'un haut-parleur, source d'une onde sonore.

Pour aller au-delà, on définit le **coefficent de compressibilité  $\chi$**  (en  $\text{Pa}^{-1}$ ) par la diminution relative d'un volume de matière (un gaz le plus souvent) qui passe d'un volume  $V$  à un volume  $V + \Delta V$ , avec  $\Delta V < 0$ , sous l'effet d'une surpression  $P$  :

$$\chi = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\Delta V}{V} \quad (11)$$

Dans le cas simple de la propagation d'une onde sonore suivant une seule direction  $x$ , dans le sens des  $x$  positifs, considérons deux particules du milieu de propagation positionnées au repos, avant l'arrivée de l'onde sonore ( $t = 0$ ), en des abscisses  $x$  et  $x + \partial x$  (figure 14).

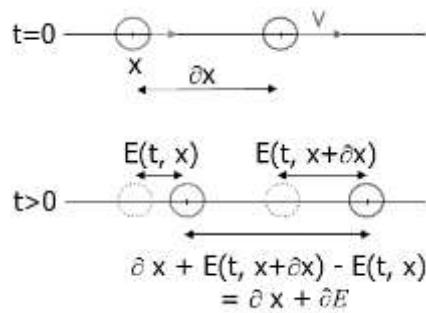


Figure 14 : modélisation de l'onde de surpression acoustique

Dans ce cas à une dimension  $\chi = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \Rightarrow P = -\frac{1}{\chi} \cdot \frac{\partial [A \sin(\omega(t - \frac{x}{c}))]}{\partial x} = \frac{A \omega}{\chi c} \cdot \cos\left(\omega(t - \frac{x}{c})\right)$

La vitesse de vibration des particules  $v$  est :

$$\nu = \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial [A \cdot \sin(\omega \cdot (t - \frac{x}{c}))]}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

et donc :

$$P = \frac{1}{\chi \cdot c} \cdot \nu \stackrel{\text{def}}{=} Z \cdot \nu \quad (12)$$

$Z = \frac{P}{\nu} = \frac{1}{\chi \cdot c}$  est appelé **impédance acoustique** et s'exprime donc en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour contourner la difficulté de mesurer la compressibilité de certains milieux non gazeux, considérons un petit élément de volume  $\partial x \cdot dS$  de masse  $m = \rho \cdot \partial x \cdot dS$  au sein du milieu de masse volumique  $\rho$  où se propage un son (figure 15).

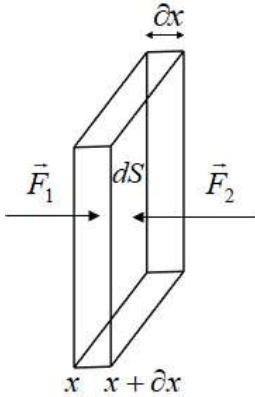


Figure 15 : Elément de volume d'un milieu de propagation d'un son constitué de deux faces de surfaces  $dS$  séparées d'une distance  $\partial x$

La relation fondamentale de la dynamique sur ce petit élément de volume s'écrit :

$$m \cdot \frac{\partial \nu}{\partial t} = F_1 - F_2 = [P(x) - P(x + \partial x)] \cdot dS = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \partial x \cdot dS$$

$$\text{Or } P = Z \cdot \nu = Z \cdot A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial [Z \cdot A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot (t - \frac{x}{c}))]}{\partial x} = \frac{Z \cdot A \cdot \omega^2}{c} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right).$$

$$\text{Donc } m \cdot \frac{\partial \nu}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \partial x \cdot dS = -\frac{Z \cdot A \cdot \omega^2}{c} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \cdot \partial x \cdot dS$$

$$\text{Comme } \nu = \frac{\partial [A \cdot \sin(\omega \cdot (t - \frac{x}{c}))]}{\partial t} = A \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \Rightarrow \frac{\partial \nu}{\partial t} = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right), \text{ on obtient :}$$

$$-m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = -\frac{Z \cdot A \cdot \omega^2}{c} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \cdot \partial x \cdot dS \Rightarrow m = \rho \cdot \partial x \cdot dS = \frac{Z}{c} \cdot \partial x \cdot dS, \text{ soit :}$$

$$Z = \rho \cdot c \quad (13)$$

Les relations (12) et (13) combinées permettent d'établir la **loi de Laplace** qui détermine la **célérité du son**:

$$Z = \rho \cdot c = \frac{1}{\chi \cdot c} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\chi \cdot \rho}} \quad (14)$$

Dans un gaz réel, par exemple pour de l'air à 20°C,  $\chi \approx 6,53 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$  et  $\rho \approx 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . La relation (14) donne alors une célérité du son estimée à  $c \approx 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Dans l'approximation d'un gaz parfait, des considérations de thermodynamique montrent que la loi de Laplace prend une forme remarquablement simple où  $c$  ne dépend que de la température :

$$c = 20 \cdot \sqrt{T(\text{Kelvin})} = 20 \cdot \sqrt{\theta(\text{° Celsius}) + 273} \quad (15)$$

Dans un fluide, Pour de l'eau salée à 37°C,  $\rho \approx 1030 \text{ kg.m}^{-3}$  mais  $\chi \approx 4,18 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  est très faible, ce qui donne  $c \approx 1524 \text{ m.s}^{-1}$ .

Dans un solide, le **module de Young Y** est défini par le rapport entre une contrainte de pression  $P = \frac{F}{S}$  exercée sur la face du solide et le raccourcissement relatif  $\frac{-\Delta L}{L}$  de ce solide sous cette contrainte. Dans ces conditions,  $\frac{F}{S} \stackrel{\text{def}}{=} P = -Y \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \frac{1}{Y} = -\frac{1}{P} \cdot \frac{\Delta L}{L}$  permet de définir la compressibilité d'un solide comme  $\frac{1}{Y}$ . La relation de Laplace pour un solide s'écrit alors :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Y} \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (16)$$

Dans de l'os cortical à 37°C,  $Y = 15 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  et  $\rho = 1900 \text{ kg.m}^{-3}$ , et  $c \approx 2810 \text{ m.s}^{-1}$ .

Ces estimations de la célérité du son permettent de constater que les impédances acoustiques varient beaucoup dans les différents milieux d'un organisme humain :

	$\rho (\text{kg.m}^{-3})$	$c (\text{m.s}^{-1})$	$Z (\text{kg.m}^{-2}.s^{-1}) = \rho \cdot c$
Air à 20°C	1,3	343	446
Eau salée à 37°C	1030	1524	$1,6 \cdot 10^6$
Os cortical humain à 37°C	1900	2810	$5,3 \cdot 10^6$

Ce point qui justifie chez l'homme l'existence de l'oreille moyenne (Cf. cours de DFGSM2).

## D- Second exemple d'onde progressive : l'ondes électromagnétique

### I- Rappels d'électrostatique et de magnétostatique

La justification de ces rappels repose sur les équations de Maxwell (cf. paragraphe 1-D-II).

Par définition, on qualifie de **statique** un champ vectoriel (électrique ou magnétique) créé par une **source** (charge ou courant électrique) **dont l'intensité est constante** au fil du temps.

Une charge électrique  $q'$  constante dans le temps, positionnée en un point  $O$  de l'espace, crée en tout point  $M$  distinct de  $O$  de l'espace un vecteur **champ électrostatique**  $\overrightarrow{E(r)}$  caractérisé par la relation :

$$\overrightarrow{E(r)} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{q'}{r^2} \overrightarrow{u_r} \quad (17)$$

où  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ ,  $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$  le vecteur unitaire (de norme 1) dirigé de  $O$  vers  $M$ .

La **permittivité** du milieu  $\epsilon$ , en Farad/mètre ( $1 \text{ F} = 1 \text{ A.s.V}^{-1}$ ) se décompose comme le produit de la **permittivité relative du milieu  $\epsilon_r$**  par la **permittivité du vide  $\epsilon_0$**   $\stackrel{\text{def}}{=} 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_r \cdot \epsilon_0 = \epsilon_r \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 10^{-9} \text{ F/m} \quad (18)$$

Dans un tel espace, une seconde charge  $q$  placée au point M est soumise à une **force électrostatique  $\vec{F}(r)$**  proportionnelle au champ électrostatique, suivant la **loi de Coulomb** :

$$\vec{F}(r) = q \cdot \vec{E}(r) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \frac{q \cdot q'}{r^2} \vec{u}_r \quad (19)$$

Cette force sera donc répulsive (dirigée de O vers M comme  $\vec{u}_r$ ) pour la charge  $q$  si  $q \cdot q' > 0$ , donc si  $q$  et  $q'$  sont de même signe, et attractive dans le cas contraire.

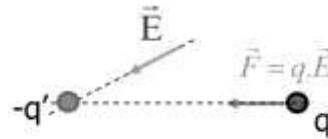


Figure 16 : illustration de la création d'un champ électrostatique et d'une force de Coulomb par une charge électrique négative d'intensité constante dans le temps.

Un fil électrique rectiligne parcouru par une intensité de courant constante / crée en tout point  $M$  éloigné d'une distance  $r \neq 0$  du fil, **champ magnétostatique  $\vec{B}(r)$**  caractérisé par la **loi de Biot et Savart** (Cf. figure 17 pour la définition du vecteur unitaire  $\vec{u}_\theta$ ) :

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{r} \vec{u}_\theta \quad (20)$$

La **perméabilité** du milieu  $\mu$ , en Henry/mètre ( $1 \text{ H} = 1 \text{ V.A}^{-1} \cdot \text{s}$ ) se décompose comme le produit de la **perméabilité relative du milieu  $\mu_r$**  par la **perméabilité du vide  $\mu_0$**   $\stackrel{\text{def}}{=} 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ .

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu_r \cdot \mu_0 = \mu_r \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad (21)$$

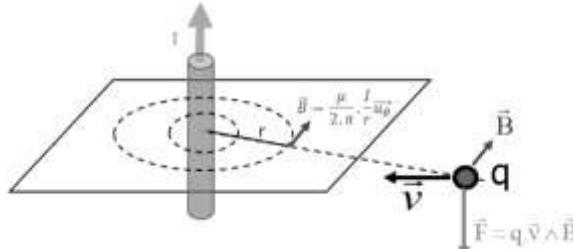


Figure 17 : illustration de la création d'un champ magnétostatique et d'une force de Lorentz par un courant électrique d'intensité constante dans le temps.

Sous l'effet de  $\vec{B}(r)$ , une charge  $q$  qui se déplace avec une vitesse  $\vec{V}$  dans le référentiel du laboratoire subit une **force de Lorentz** qui va courber sa trajectoire et dont on peut montrer qu'elle s'exprime suivant (cf. rappels de mathématique) :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \wedge \vec{B} \quad (22)$$

Considérons maintenant le montage présenté en figure 18. Dès que l'on fait glisser la barre conductrice sur le cadre conducteur en forme de U, on constate qu'un courant (d'électrons) y apparaît, ce qui nécessite l'existence d'une force de type Lorentz ou Coulomb de la forme  $\vec{F} = -e \cdot (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$ , sous réserve de l'existence de champs électrostatique  $\vec{E}$  ou magnétostatique  $\vec{B}$ .

Dans le référentiel R fixe par rapport à ce montage, il n'y a pas de champ électrique, mais un électron de charge  $-e$  de la barre se déplace dans un champ magnétostatique et subit donc une force de Lorentz  $\vec{F} = -e \cdot \vec{V} \wedge \vec{B}$  qui explique le courant.

Dans le référentiel R' lié à la baguette métallique, cette dernière est immobile, mais les électrons restent en mouvement, mis par une force  $\vec{F}' = \vec{F}$  qui ne peut être que de type Lorentz, de la forme  $\vec{F}' = -e \cdot \vec{E}'$ . Un champ  $\vec{E}' = \vec{V} \wedge \vec{B}$  apparaît donc dans R', en lieu et place du champ  $\vec{B}$  dans R.

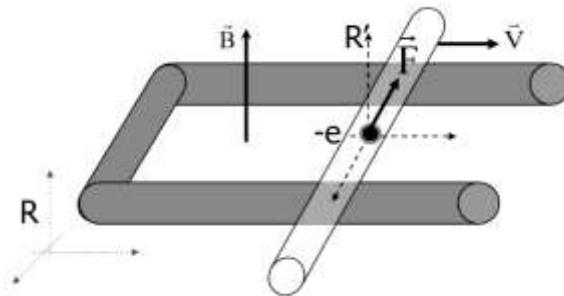


Figure 18 : Modèle d'un fil conducteur en forme de lettre U, placé dans un champ magnétostatique  $\vec{B}$ , sur lequel glisse une barre conductrice à la vitesse  $\vec{V}$ .

La circulation d'un courant électrique est donc vue comme l'effet d'un champ magnétostatique dans le repère fixe, et d'un champ électrostatique dans un repère mobile. Ces deux champs relèvent d'une même grandeur physique, vue sous des référentiels différents. C'est ce lien intime entre champs électrique et magnétique que la théorie de Maxwell va nous permettre d'explorer, mais pour cela, il va falloir généraliser et considérer la possibilité de sources (charges ou courants) dont l'intensité varie avec le temps.

## II- Équations de Maxwell et caractéristiques d'une onde électromagnétique

Dans un milieu conducteur contenant  $n$  charges  $q / \text{m}^3$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$ , on définit :

- Densité de charge  $\rho \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot q$  en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$
- Densité de courant  $\vec{j} \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot q \cdot \vec{V}$  en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Les quatre équations de Maxwell (1864) s'écrivent sous une forme simplifiée :

Une densité de charge crée un champ électrique  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ .

Il n'existe pas de charges magnétiques.

Un champ magnétique variable dans le temps crée (induit) un champ électrique (également variable dans le temps).

Un courant électrique  $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$ , mais aussi un champ électrique variable dans le temps crée (induit) un champ magnétique.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (23)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \epsilon \cdot \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} \quad (26)$$

Les deux dernières équations de Maxwell (25 et 26) caractérisent le **couplage** entre champs électrique et magnétique qui constituent (dans le cas de sources variables dans le temps) deux grandeurs indissociables que nous appellerons désormais un **champ électromagnétique**. Ces équations se démontrent en théorie des champs classiques en se fondant sur la relativité restreinte et le principe de moindre action, mais cette démonstration sort du cadre de ce cours. Nous nous limitons à explorer les conséquences de ces équations sur un exemple simple.

Soit le champ électrique  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, E_z = E_z(x, t))$  dans un milieu sans densité de courant ( $\vec{j} = 0$ ). Supposons que la composante  $E_z(x, t)$  corresponde à une onde progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  se déplaçant dans le sens des  $x > 0$  à la célérité  $c_n$  suivant (6) :

$$\vec{E}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right] \end{pmatrix} \quad (27)$$

La relation de Maxwell (25) permet de finir d'expliciter le champ magnétique :

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = - \frac{\omega}{c_n} \cdot E_0 \cdot \cos \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right] \text{ et donc } B_y = - \frac{E_0}{c_n} \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right].$$

Une onde électrique de la forme (27) génère donc une autre onde progressive, de nature magnétique cette fois, perpendiculaire et en phase avec  $\vec{E}(t, x)$ , de même fréquence, de même célérité, de la forme :

$$\vec{B}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -B_0 \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right] \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ en notant } B_0 = \frac{E_0}{c_n}.$$

Les ondes magnétique  $\vec{B}(t, x)$  et électrique  $\vec{E}(t, x)$  sont **couplées**. Elles ne forment qu'une seule grandeur physique, appelée **onde électromagnétique**.

En manipulant de façon plus technique les équations de Maxwell, il est possible d'étendre les résultats obtenus sur notre exemple simple et de montrer qu'en toute généralité, les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  constituant une onde électromagnétique sont liés au vecteur unitaire (de norme 1)  $\vec{u}$  porté par la direction de propagation suivant les relations équivalentes :

$$\vec{B} = \frac{1}{c_n} \vec{u} \wedge \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = -c_n \cdot \vec{u} \wedge \vec{B} \quad (28)$$

Comme  $B_y = -\frac{E_0}{c_n} \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right]$  et  $E_z = E_0 \cdot \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right]$ , l'équation (26) donne :

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow -\frac{E_0}{c_n} \frac{\partial \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right]}{\partial x} = \varepsilon \cdot \mu \cdot E_0 \cdot \frac{\partial \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c_n} \right) \right]}{\partial t} \Rightarrow \frac{\omega \cdot E_0}{c_n^2} = \varepsilon \cdot \mu \cdot E_0 \cdot \omega$$

On en déduit l'expression de la célérité de l'onde électromagnétique :

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} \quad (29)$$

Compte tenu des relations (18) et (21), la célérité est  $c_n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ .

Le terme  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$  n'est autre que la célérité **c** d'une onde électromagnétique dans le vide. En utilisant les valeurs données en (18) et (21),  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \approx \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 10^{-9}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Le terme  $\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}$  est appelé **indice de réfraction** du milieu de propagation, et est noté **n** :

$$n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r} > 1 \quad (30)$$

La **célérité** d'une onde électromagnétique dans un milieu d'indice de réfraction **n** est donc :

$$c_n = \frac{c}{n} < c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (31)$$

La période temporelle  $T = \frac{1}{f}$  d'une onde progressive pure est la même dans le vide et dans un milieu d'indice de réfraction **n**, mais pas sa longueur d'onde puisque  $\lambda_n = c_n \cdot T = \frac{c}{n} \cdot T = \frac{\lambda}{n}$ .

**Une onde électromagnétique ( $\vec{E}, \vec{B}$ ) est donc constituée de deux ondes progressives vectorielles couplées, perpendiculaires entre-elles et avec leur direction de propagation commune  $\vec{u}$ , vibrant en phase, à la même fréquence et se propageant à la même célérité  $c_n = c/n$  dans un milieu d'indice de réfraction  $n$ .** (Fig. 1-20)

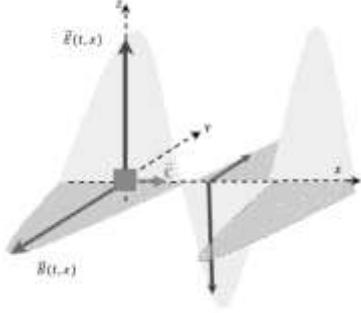


Figure 20 : Illustration de la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique polarisée rectilignement ( $\vec{E}, \vec{B}$ ). Durant leurs propagations suivant l'axe  $x$ , les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  varient en norme en restant en phase. Notez que, sur ce schéma, la norme de  $\vec{B}$  a été fortement exagérée par rapport à celle de  $\vec{E}$ , pour des raisons de lisibilité.

Une classification des ondes électromagnétiques sera donnée au paragraphe 2-C.

## E- Lois de Snell-Descartes de la réflexion et de la réfraction

### I- Chemin optique

Compte-tenu de l'équation (31), le temps mis par une onde électromagnétique pour se propager du point A au point B distants de  $d(A, B)$  dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  est :

$$t_n = \frac{d(A, B)}{c_n} \quad (32)$$

$$t_n = \frac{n \cdot d(A, B)}{c} \quad (33)$$

Le **chemin optique  $L(A \rightarrow B)$**  entre les points A et B dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  est la distance parcourue dans le vide dans le même temps que  $d(A, B)$  dans un milieu d'indice  $n$  :

$$L(A \rightarrow B) \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot d(A, B) \quad (34)$$

L'équation (34) s'écrit de façon équivalente (cf. rappels de mathématique) :

$$L(A \rightarrow B) \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ où } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \quad (35)$$

Le principe de moindre action nous a appris que l'onde suit entre A et B le chemin qui minimise le temps de trajet. Les équations (33) et (34) permettent de le reformuler suivant :

**Principe de moindre action de Fermat** : Entre deux points A et B de l'espace, une onde suit la trajectoire associée à un chemin optique  $L(A \rightarrow B)$  extrémal.

Cela revient à dire que pour une onde issue de A atteignant B, la variation de chemin optique est infiniment petite ( $dL \rightarrow 0$ ) si le point B est déplacé sur une distance infiniment petite ( $dB \rightarrow 0$ ).

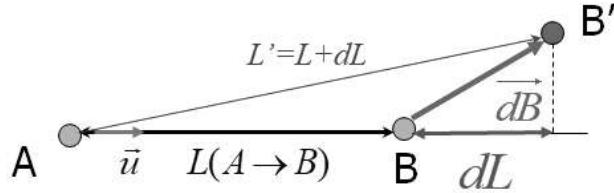


Figure 19 : illustration de la variation infinitésimale de chemin optique  $dL(A \rightarrow B)$  provoquée par un déplacement infinitésimal  $dB$  du point B.

Pour deux points A et B distants, lorsque le B se déplace en B' suivant un vecteur infiniment petit  $\vec{dB} = \vec{BB}'$ , le vecteur unitaire  $\vec{u}' = \frac{\vec{AB}'}{\|\vec{AB}'\|}$  est en première approximation peu différent de  $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$  et le chemin optique entre les points A et B devient  $L(A \rightarrow B') = n \cdot \vec{u} \cdot \vec{AB}'$ .

D'après la relation de Chasles :  $L(A \rightarrow B') = n \cdot \vec{u} \cdot (\vec{AB} + \vec{dB}) = L(A \rightarrow B) + n \cdot \vec{u} \cdot \vec{dB}$ . Le chemin optique a donc varié de  $dL(A \rightarrow B) = n \cdot \vec{u} \cdot \vec{dB}$ , le produit de  $n$  par la longueur de la projection du vecteur  $\vec{dB}$  sur la direction portée par le vecteur  $\vec{u}$ . Pour un rayon lumineux joignant les points A et B, le principe de moindre action s'écrit donc :

$$dL(A \rightarrow B) = n \cdot \vec{u} \cdot \vec{dB} = 0 \quad (36)$$

## II- Loi de Snell-Descartes pour la réflexion

La figure 20 montre un rayon lumineux issu du point A (dans un milieu d'indice de réfraction  $n_1$ ) qui se réfléchit sur un miroir au point M puis atteint le point B. Notons  $\vec{u}_i = \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$ ,  $\vec{u}_r = \frac{\vec{MB}}{\|\vec{MB}\|}$ ,  $i$  et  $r$  les angles d'incidence et de réflexion (par rapport à la normale au miroir en M) :

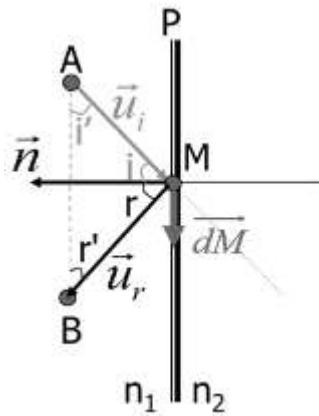


Figure 20 : Réflexion d'un rayon lumineux par un miroir.

Pour un petit déplacement  $\vec{dM}$  du point M,  $dL(A \rightarrow M \rightarrow B) = 0$ .

Cela nécessite que les points A, M et B soient coplanaires.

Par ailleurs, si M est translaté de  $\vec{dM}$  en se rapprochant de B la relation (36) donne :

$$dL(A \rightarrow M \rightarrow B) = dL(A \rightarrow M) + dL(M \rightarrow B) = n_1 \vec{u}_i \cdot \vec{dM} - n_1 \vec{u}_r \cdot \vec{dM} = 0$$

Il s'ensuit que  $n_1 \vec{u}_i \cdot \vec{dM} = n_1 \vec{u}_r \cdot \vec{dM} \Rightarrow n_1 dM \cos i' = n_1 dM \cos r'$ .

Or  $\cos i' = \cos r' \Rightarrow \sin i = \sin r \Rightarrow i = r$  puisque les angles  $i$  et  $r$  varient entre 0 et  $90^\circ$ .

D'où les **lois de Snell-Descartes pour la réflexion**

- 1- Les rayons incidents et réfléchis sont coplanaires,
- 2- L'angle d'incidence  $i$  est égal à l'angle de réflexion  $r$ .

### III- Loi de Snell-Descartes pour la réfraction

Le figure 21 montre le trajet d'un rayon émis en A, atteignant en M une interface entre deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ , et réfracté dans le second milieu sous l'angle  $t$ . Pour un petit déplacement  $\overrightarrow{dM}$  du point M,  $dL(A \rightarrow M \rightarrow C) = 0$ , ce qui nécessite que les points A, M et C soient coplanaires. On a par ailleurs :

$$dL(A \rightarrow M \rightarrow C) = dL(A \rightarrow M) + dL(M \rightarrow C) = n_1 \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{dM} - n_2 \vec{u}_r \cdot \overrightarrow{dM} = 0 \Rightarrow n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin t$$

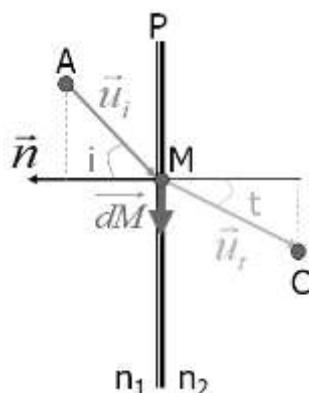


Figure 21 : Réfraction d'un rayon lumineux à travers une interface P.

D'où les **lois de Snell-Descartes pour la réfraction** :

- 1- Les rayons incidents et réfractés sont coplanaires,
- 2- L'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $t$  sont liés par la relation  $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin t$

La fonction sinus étant croissante sur l'intervalle  $[0, 90^\circ]$ ,  $t > i$  si  $n_2 < n_1$  (et  $t < i$  sinon)

Lorsque  $n_2 < n_1$  (milieu d'émergence est moins **réfringent** que le milieu d'incidence), il existe un angle d'incidence limite  $i_{max}$  au-delà duquel  $t > 90^\circ$ : le rayon est intégralement réfléchi, et plus du tout transmis par réfraction dans le second milieu. Cet angle d'incidence limite se calcule facilement :  $\frac{n_1}{n_2} \cdot \sin i = \sin t < 1 \Rightarrow i < i_{max} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Cette **réflexion totale** est utilisée dans les fibres optiques où le rayon laser constituant le signal arrive sur la face interne de la fibre avec un angle d'incidence  $i > i_{max}$  de manière à assurer une réflexion totale de ce rayon et sa propagation à l'intérieur de la fibre (figure 22).

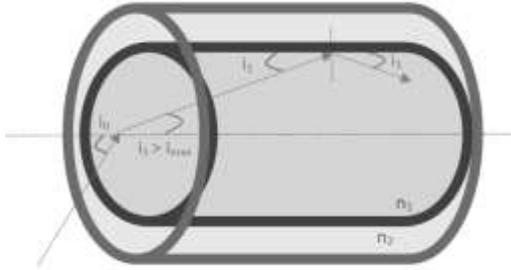


Figure 22 : Réflexion totale d'un rayon laser dans une fibre optique.

Notons enfin que, compte tenu de la relation (31) suivant laquelle l'indice de réfraction  $n = \frac{c}{c_n}$ , la loi de Descartes pour la réfraction s'écrit aussi de façon équivalente  $\frac{1}{c_1} \cdot \sin i = \frac{1}{c_2} \cdot \sin t$ . Sous cette forme, elle est aussi applicable à une onde sonore réfractée par une interface séparant deux milieux d'impédances acoustiques différentes.

## F- Optique géométrique et dioptrique oculaire

### I- Définition et hypothèses.

- **Dioptre** : surface séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents.
  - o **Sphérique** : si la surface du dioptre est une portion de sphère.
- **Lentille** : succession de deux dioptres.
- **Système optique** : milieu transparent contenant des miroirs ou des dioptres.
  - o **Dioptrique** s'il ne contient que des dioptres,
  - o **Catadioptrique** s'il contient aussi des miroirs.
  - o **Centré** s'il est invariant par rotation autour d'un axe (de révolution).
    - **Satisfaisant à l'approximation de Gauss** si les angles entre les rayons lumineux et l'axe de révolution sont assez petits pour approximer le sinus de ces angles par leur valeur en radians.
      - **Stigmate** si l'image de tout point objet lumineux est un point image, astigmate sinon.
      - **Aplanétique** si l'image de tout segment lumineux perpendiculaire à l'axe optique est un segment qui reste perpendiculaire à cet axe.
- **Espace objet** : en amont du dioptre (par rapport au sens de propagation des rayons).
- **Espace image** : en aval du dioptre.

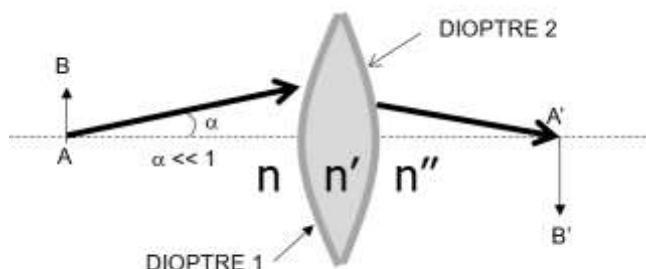


Figure 23 : Illustration, dans l'approximation de Gauss ( $\alpha \ll 1$ ), d'un système optique centré constitué d'une lentille, stigmate et aplanétique.

## II- Relation de conjugaison d'un dioptre, construction des images.

La figure 24 illustre la déviation d'un rayon lumineux issu d'un point objet  $A$  au travers d'un diopbre sphérique séparant deux milieux d'indices de réfraction  $n$  et  $n'$  et contenu dans une sphère de centre  $C$  et de rayon  $SC$ . Le point  $S$ , intersection du diopbre avec l'axe optique est appelé **sommet** du diopbre. Après réfraction au point  $P$ , le rayon incident  $AP$  est dévié et converge sur l'axe optique en un point  $A'$ , image du point  $A$ .

Par convention, l'axe des abscisses est orienté positivement dans le sens de propagation de la lumière. Les arcs et les angles sont mesurés positifs dans le sens trigonométrique. On rappelle que la mesure algébrique du bipoint  $\overline{AB}$  est la distance de  $A$  à  $B$  dotée d'un signe suivant ces conventions.

La somme des angles d'un triangle valant  $\pi$  radians :

$$\text{Dans le triangle } (A, P, C), \pi - i + \omega + \alpha = \pi \Rightarrow i = \omega + \alpha,$$

$$\text{Et dans le triangle } (A', P, C), \pi - \omega + i' + \alpha' = \pi \Rightarrow i' = \omega - \alpha'.$$

Dans l'approximation de Gauss, la loi de Snell-Descartes pour la réfraction s'écrit :

$$n \cdot i = n' \cdot i' \Rightarrow n \cdot (\omega + \alpha) = n' \cdot (\omega - \alpha') \Rightarrow (n' - n) \cdot \omega = n \cdot \alpha + n' \cdot \alpha'.$$

En exprimant les angles  $\alpha = \frac{\overline{SP}}{\overline{SA}} = -\frac{\overline{PS}}{\overline{SA}}$ ;  $\alpha' = \frac{\overline{PS}}{\overline{SA'}}$ ;  $\omega = \frac{\overline{PS}}{\overline{SC}}$ , on obtient :

$$(n' - n) \cdot \frac{\overline{PS}}{\overline{SC}} = -n \cdot \frac{\overline{PS}}{\overline{SA}} + n' \cdot \frac{\overline{PS}}{\overline{SA'}} \Rightarrow \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}}$$

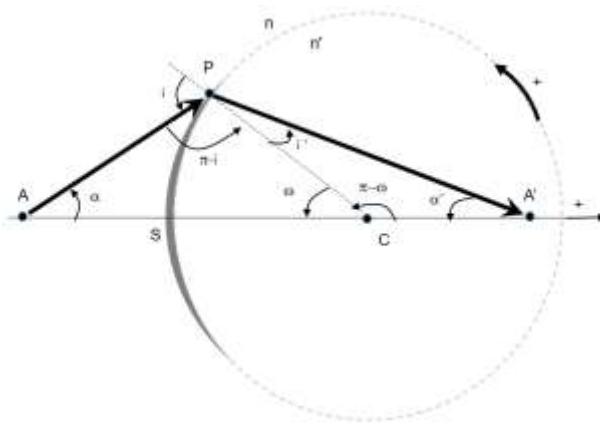


Figure 24 : Illustration de la déviation d'un rayon lumineux par un diopbre sphérique et de la formation de l'image  $A'$  d'un point objet  $A$ .

D'où la localisation de l'image  $A'$  par la **formule de conjugaison du diopbre sphérique** :

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} \quad (37)$$

La **puissance** ou **vergence** du diopbre sphérique  $\Pi$  est une grandeur algébrique et additive caractéristique du diopbre qui s'exprime en **dioptrie** ( $D_p$ ), avec par définition  $1 D_p \stackrel{\text{def}}{=} 1 m^{-1}$ .

Le diopbre sera qualifié de **convergent** si  $\Pi > 0$ , et de **divergent** si  $\Pi < 0$ .

Si le point objet  $A$  est infiniment éloigné du diopbre  $\overline{SA} \rightarrow -\infty$ , alors l'angle  $\alpha$  tend vers 0 et le rayon lumineux prend une direction parallèle à l'axe optique avant d'atteindre le diopbre. Ces

rayons convergent en un point image appelé **foyer image**  $F'$  du dioptre. La relation de conjugaison (37) permet d'en préciser la position :

$$\overline{SA} \rightarrow -\infty \Rightarrow \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n' - n}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SF'}} \Rightarrow \overline{SF'} = \frac{n'}{\Pi} \quad (38)$$

Ajouter aux hypothèses la condition d'aplanétisme permet de compléter le modèle et de l'utiliser pour construire l'image par un dioptre sphérique de tout objet lumineux constitué d'un segment  $AB$  perpendiculaire à l'axe optique dont le point  $A$  est sur cet axe. Il suffit pour cela :

- 1- De localiser l'image  $A'$  du point  $A$  en utilisant la relation de conjugaison (37),
- 2- De remarquer qu'un rayon issu du point objet  $B$  et dont la direction incidente passe par le centre du dioptre sphérique  $C$  arrive sur le dioptre sous une incidence normale et n'est donc pas dévié.
- 3- La condition d'aplanétisme impose que l'image du point  $B$  se trouve à l'intersection de la droite  $(BC)$  et de la droite perpendiculaire à l'axe optique passant par  $A'$ .

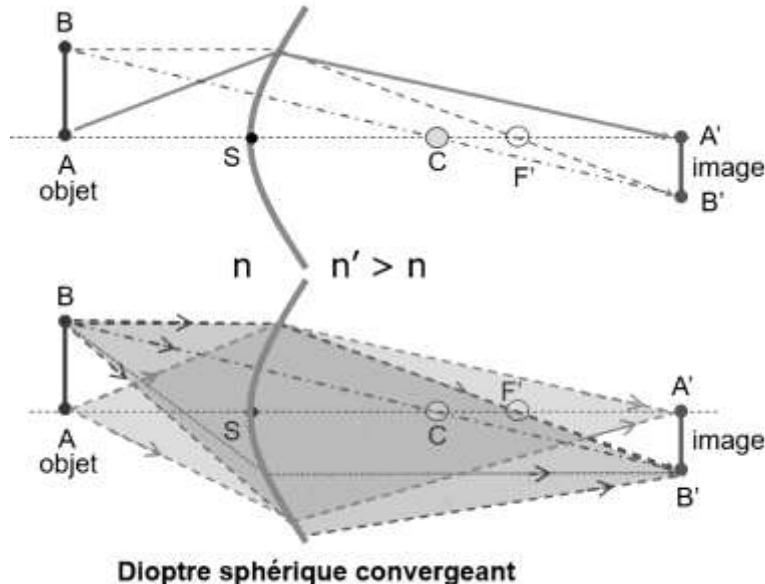


Figure 25 : Image d'un segment lumineux  $AB$  par un dioptre sphérique convergent.

Pour un dioptre convergent, on constate sur figure 25 que l'image  $A'B'$  du segment  $AB$  se forme dans l'espace image. On qualifie cette image d'**image réelle**.

Le cas d'un dioptre sphérique divergent est illustré en figure 26 : L'image  $A'B'$  se forme dans l'espace objet. Elle est de ce fait qualifiée d'**image virtuelle**.

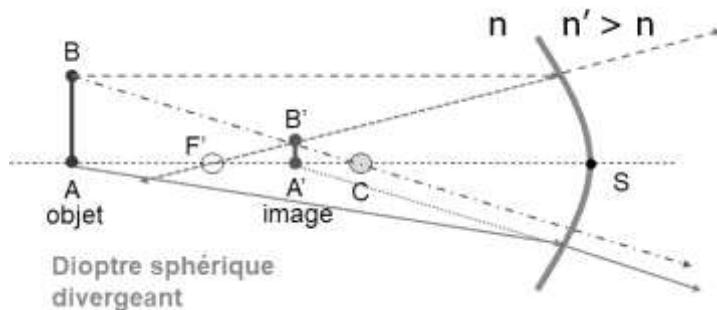


Figure 26 : Image d'un segment lumineux  $AB$  par un dioptre sphérique divergent.

### III- Introduction à la dioptrique oculaire et aux amétropies sphériques

L'œil humain est un système optique centré constitué de 4 dioptres formant deux lentilles, la cornée et le cristallin (partie supérieure de la figure 27).

Le premier de ces dioptres, le dioptre cornéen antérieur, de rayon 7,8 mm sépare l'air ambiant du tissu cornéen d'indice de réfraction 1,377. Le deuxième dioptre, de rayon 6,8 mm, sépare la cornée de la chambre antérieure de l'œil remplie d'un liquide, l'humeur aqueuse, d'indice 1,34. La puissance de la cornée est la somme des puissances de ces deux dioptres :

$$\Pi_{\text{cornée}} = \frac{1,377-1}{7,8 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,34-1,377}{6,8 \cdot 10^{-3}} = 42,9 \text{ Dp}$$

Un diaphragme, l'iris, sert à limiter l'intensité de la lumière transmise. On trouve ensuite le cristallin (indice de l'ordre de 1,40) dont les dioptres antérieur et postérieur ont des rayons de courbure au repos, lors d'une vision de loin, de 10 et -6 mm respectivement (en vision de près, ces rayons varient pour assurer une accommodation).

En aval du cristallin, la **chambre postérieure** est remplie d'un liquide, l'**humour vitrée** d'indice de réfraction  $n'=1,336$ . La puissance du cristallin au repos est donc :

$$\Pi_{\text{cristallin}} = \frac{1,40-1,34}{10 \cdot 10^{-3}} + \frac{1,336-1,40}{-6 \cdot 10^{-3}} = 17 \text{ Dp.}$$

La chambre postérieure est tapissée d'un tissu constitué de cellules nerveuses photosensibles, la **rétine**, et de neurones dont les axones forment le **nerf optique**. C'est au sein ce dernier que le signal lumineux, transformé en signal électrique, est transmis au cortex occipital pour analyse et intégration.

La puissance totale d'un œil humain au repos en vision de loin est la somme des puissances des deux lentilles :  $\Pi = \Pi_{\text{cornée}} + \Pi_{\text{cristallin}} = 60 \text{ Dp}$ , dont de 48 Dp proviennent du seul dioptrre antérieur de la cornée.

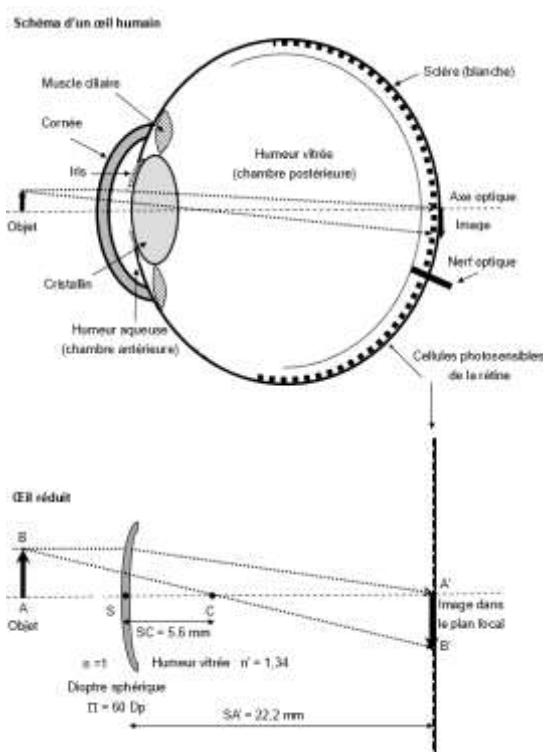


Figure 27 : Représentation schématique d'un œil humain (partie supérieure) et modélisation fonctionnelle dite de « l'œil réduit »

Les **amétropies sphériques** sont des défauts de courbure du dioptrre antérieur de la cornée qui n'affectent pas sa sphéricité. Elles conduisent à une image floue sur la rétine.

Dans la **myopie**, l'image d'un objet éloigné se forme dans un plan focal en amont de la rétine, du fait soit un rayon de courbure  $\overline{SC}$  trop faible (donc une courbure trop forte), soit une profondeur SR du globe oculaire trop élevée (figure 28, partie médiane). Cette amétropie se corrige en soustrayant la puissance en excès au moyen de verres divergents.

Dans l'**hypermétropie**, l'image d'un objet éloigné se forme dans un plan focal en aval de la rétine, du fait soit un rayon de courbure  $\overline{SC}$  trop grand, soit une profondeur SR du globe oculaire trop faible (figure 28, partie inférieure). Cette amétropie se corrige en ajoutant la puissance manquante au moyen de verres convergents.

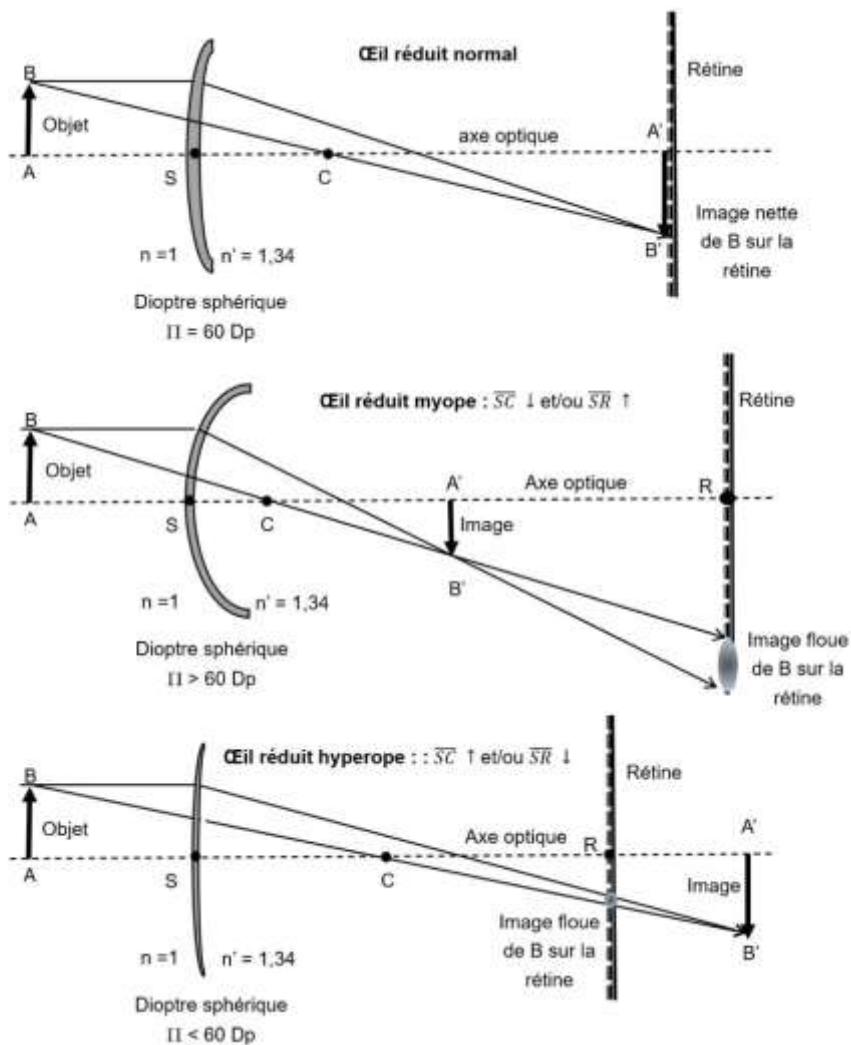


Figure 28 : Comparaison de la position de l'image d'un objet éloigné dans le cas d'un œil sain, d'un œil myope (image du milieu) et d'un œil hypermétrope (ou hyperope, image du bas)

Des corrections analogues à celles que nous venons d'évoquer peuvent être proposées à des patients présentant des amétropies non sphériques (**astigmatisme**), c'est-à-dire des défauts de convergence qui concernent de la cornée de façon moins uniforme, avec par exemple des dioptres non sphériques de puissances différentes sur les méridiens verticaux et horizontaux.

## G- Onde stationnaire et quantification

### I- Réflexion normale

Une onde progressive  $g_i(t, x) = A_i \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right]$  qui atteint sous une incidence normale une interface P positionnée en  $x = 0$ , perpendiculaire à l'axe des  $x$  génère une onde réfléchie  $g_r(t, x) = A_r \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right]$  et une onde réfractée  $g_t(t, x) = A_t \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right]$ .

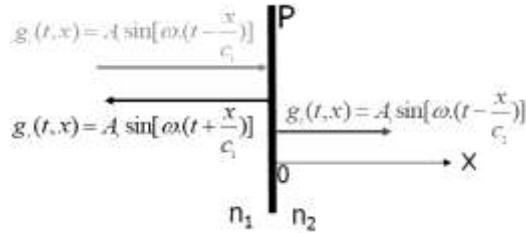


Figure 29 : Réflexion et réfraction d'une onde progressive  $g_i(t, x)$  atteignant, sous une incidence normale, une interface P séparant deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ .

La grandeur physique étant continue sur l'interface :  $g_i(t, 0) + g_r(t, 0) = g_t(t, 0)$  pour tout  $t$ , soit  $A_i \cdot \sin[\omega \cdot t] + A_r \cdot \sin[\omega \cdot t] = A_t \cdot \sin[\omega \cdot t]$ , ce qui nécessite d'avoir  $A_i + A_r = A_t$ .

La continuité de la dérivée de la grandeur physique au niveau de l'interface donne, pour tout  $t$  :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}(t, 0) + \frac{\partial g_r}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial g_t}{\partial x}(t, 0) \Rightarrow -\frac{\omega}{c_1} A_i \cdot \cos[\omega \cdot t] + \frac{\omega}{c_1} A_r \cdot \cos[\omega \cdot t] = -\frac{\omega}{c_2} A_t \cdot \cos[\omega \cdot t], \text{ ce qui nécessite } -\frac{\omega}{c_1} A_i + \frac{\omega}{c_1} A_r = -\frac{\omega}{c_2} A_t, \text{ soit } A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2} A_t.$$

En combinant ces deux résultats, il vient :

$$A_i - A_r = \frac{c_1}{c_2} A_t = \frac{c_1}{c_2} (A_i + A_r) \Rightarrow 1 - \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_1}{c_2} \left(1 + \frac{A_r}{A_i}\right) \Rightarrow \frac{A_r}{A_i} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{\frac{c}{n_2} - \frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2} + \frac{c}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Le coefficient de réflexion en amplitude est donc :

$$r_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_r}{A_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (39)$$

De même,  $A_t = A_i + A_r = A_i + r_A \cdot A_i \Rightarrow \frac{A_t}{A_i} = 1 + r_A = 1 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2}$ , soit

$$t_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A_t}{A_i} = \frac{2 \cdot n_1}{n_1 + n_2} \quad (40)$$

A titre d'exemple, pour une lentille en verre d'indice de réfraction  $n_2 = 1,5$ , placée dans de l'air ( $n_1 \approx 1$ ) :  $r_A = \left| \frac{1-1,5}{1+1,5} \right| = \frac{1}{5}$  et  $t_A = \frac{2}{1+1,5} = \frac{4}{5}$ .

En termes d'intensité transmise, on peut montrer que dans le milieu incident, l'intensité lumineuse est proportionnelle au carré des amplitudes :

$$r_I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (41)$$

Le coefficient de transmission en intensité se calcule simplement en remarquant que  $I_i = I_r + I_t$ , et que donc  $r_I + t_I = 1$ , soit

$$t_I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I_t}{I_i} = 1 - r_I = \frac{4 \cdot n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (42)$$

Dans l'exemple précédent, on trouve  $r_I = \frac{1}{5^2} = 4\%$  et  $t_I = \left(\frac{4,1,5}{2,5}\right)^2 = 96\%$  : l'intensité lumineuse est donc principalement transmise à travers le verre étudié.

## II- Onde stationnaire et première approche de quantification

Reprenons l'exemple précédent en supposant que l'onde est intégralement réfléchie par l'interface (Fig. 1-31 avec  $n_2 \gg n_1$ , de sorte que  $r_I = 1$  et  $t_I = 0$ ).

En  $x = 0$ ,  $g(t, 0) = A_i \cdot \sin[\omega \cdot (t)] + A_r \cdot \sin[\omega \cdot (t)] = 0$  pour  $t$ , ce qui implique  $A_r = -A_i$ .

En amont de P (pour  $x < 0$ ), les ondes progressives  $g_i$  et  $g_r$  s'additionnent et créent une onde :

$$g(t, x) = A_i \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] + A_r \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right] = A_i \cdot \left[ \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c_1}\right)\right] - \sin\left[\omega \cdot \left(t + \frac{x}{c_1}\right)\right] \right]$$

Compte-tenu de la relation de factorisation  $\sin(p) - \sin(q) = 2 \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$ :

$$g(t, x) = \left[ -2 \cdot A_i \cdot \sin\left(\frac{\omega x}{c_1}\right) \right] \cos(\omega \cdot t) = A(x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

L'onde de type  $\cos(\omega \cdot t)$ , sans terme de retard de la forme  $\omega \cdot \frac{x}{c_1}$  est qualifié d'**onde stationnaire** : tous les points de l'espace sont dans le même état vibratoire à chaque instant (ils vibrent en phase, mais avec une amplitude  $A(x)$  variable entre 0 et  $2 \cdot A_i$ ).

Lorsque  $\frac{\omega x}{c_1} = \frac{2\pi x}{\lambda_1}$  est un multiple de  $\pi$ , c'est-à-dire lorsque  $x$  est un multiple de  $\frac{\lambda_1}{2}$ ,  $A(x) = 0$  et l'onde disparaît à tout instant. On qualifiera ces points de **nœuds de vibration**.

D'autres points pour lesquels  $\frac{\omega x}{c_1} = \frac{2\pi x}{\lambda_1}$  est un multiple impair de  $\frac{\pi}{2}$ , soit quand  $x$  est un multiple impair de  $\frac{\lambda_1}{4}$ , verront une onde d'amplitude maximale  $2 \cdot A_i$ . On qualifie ces points de **ventres** de l'onde stationnaire (Figure 30).

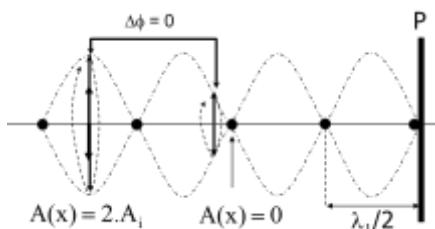


Figure 30 : Onde stationnaire obtenue par réflexion normale complète d'une onde progressive.

Une onde stationnaire de longueur d'onde  $\lambda_1$  peut ainsi être maintenue et amplifiée dans une cavité résonnante constituée de deux miroirs P et P' positionnés sur deux nœuds de vibration, suivant la figure 31, à condition donc que la distance L qui sépare ces deux miroirs soit un multiple de  $\lambda_1/2$ . Cette distance ne peut donc pas prendre n'importe quelle valeur, mais seulement des valeurs parmi  $\lambda_1/2, \lambda_1, 3\lambda_1/2, 2\lambda_1$  etc. On dira que cette distance est **quantifiée**. Cette remarque sera essentielle pour comprendre les bases de la mécanique quantique.

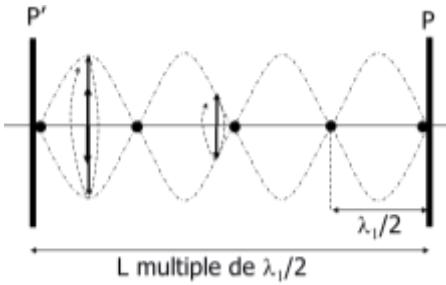


Figure 31 : Illustration d'une onde stationnaire au sein d'une cavité résonnante.

## H- Diffraction et interférences.

### I- Interférences après diffraction

On considère une onde plane progressive pure qui se propage à travers un orifice percé dans un écran opaque. Si l'orifice est petit (par rapport à la longueur d'onde) un seul point au sein de l'orifice réemet en aval de l'orifice une seule onde sphérique suivant le principe de Huygens (figure 32-a). Si l'orifice est plus large, plusieurs sources ponctuelles au sein de l'orifice réémettent des ondes sphériques qui vont s'additionner algébriquement en aval de celui-ci (figure 32-b). Dans les deux cas, le changement de direction du vecteur d'onde au passage de l'orifice est qualifié de **diffraction**. Dans le second cas, on appelle **interférences** la sommation des ondes sphériques émergentes.

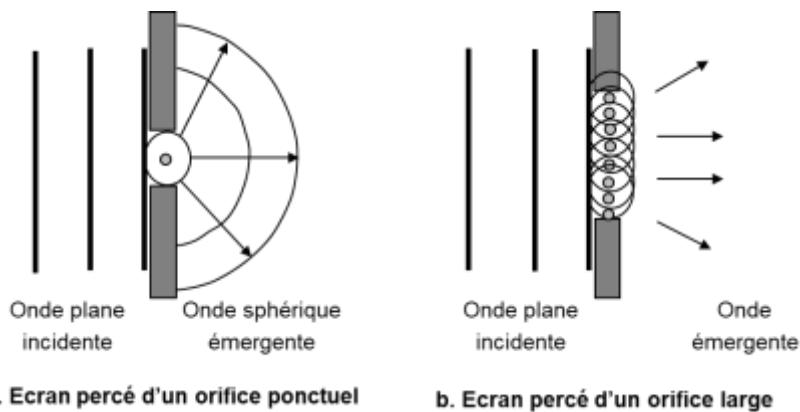


Figure 32 : Illustration de la diffraction d'une onde stationnaire plane à travers un orifice percé dans un écran opaque.

Calculons d'abord l'onde progressive qui se forme sur un écran distant par interférences à partir de deux sources ponctuelles espacées d'une distance  $b$  dans le vide (figure 33).

Dans une direction  $\theta \ll 1$  peu inclinée par rapport à l'horizontale, le chemin optique d'un des deux rayons est majoré de la valeur  $D = b \cdot \sin \theta$  par rapport à l'autre rayon (figure 33), ce qui conduit à un déphasage entre les deux rayons de  $\varphi = \frac{\omega}{c} \cdot D = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot D = 2\pi \frac{b \cdot \sin \theta}{\lambda}$ .

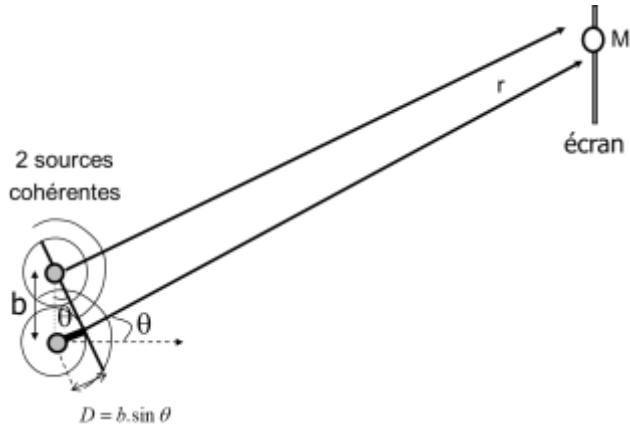


Figure 33 : Interférence de deux ondes sphériques.

L'onde  $g(t, r)$  mesurée en un point M sur un écran distant de  $r$  de la source s'écrit :

$$g(t, r) = A_0 \cdot \left[ \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot r}{c}\right) + \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot r}{c} - \varphi\right) \right]$$

En se souvenant de la relation de factorisation  $\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ , il vient :

$$g(t, r) = 2 \cdot A_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot r}{c} - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \cdot A_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\omega(2r - D)}{c} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Il s'agit d'une onde progressive apparaissant sur l'écran (à la distance moyenne de  $\frac{r+(r-D)}{2}$ ) avec une amplitude  $2 \cdot A_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2 \cdot A_0 \cdot \cos\left(\pi \frac{b \cdot \sin \theta}{\lambda}\right)$  qui est extrémale lorsque  $\frac{b \cdot \sin \theta}{\lambda}$  est un entier  $k$ , et qui s'annule lorsque  $\frac{b \cdot \sin \theta}{\lambda}$  est un multiple impair de  $\frac{1}{2}$ . Il apparait donc sur l'écran une succession de bandes claires ( $\theta$  tels que  $\sin \theta = k \cdot \frac{\lambda}{b}$ ,  $k$  entier), et de bandes sombres ( $\theta$  tels que  $\sin \theta = (k + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{b}$ ). On parlera dans le premier cas d'une **interférence constructive** (les deux ondes sont en phase et se renforcent en s'additionnant), et dans le second d'une **interférence destructive** (les deux ondes s'annulent en s'additionnant). Pour des angles  $\theta \ll 1$ , les centres des bandes claires (comme ceux des bandes sombres) sont espacés d'un angle de valeur  $\frac{\lambda}{b}$ .

Généralisons au cas d'une fente de diffraction rectangulaire de largeur  $b$  centrée à l'origine d'un repère  $(x, y)$  (Figure 34).

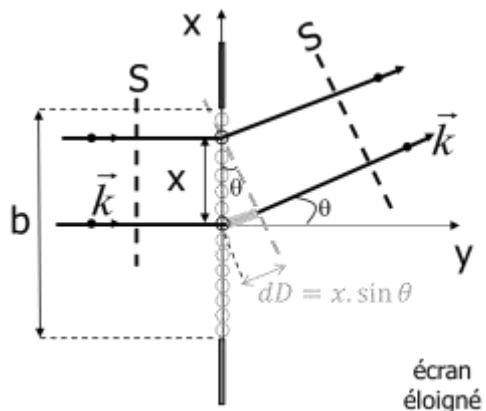


Figure 34 : Interférence après diffraction par une fente rectangulaire de hauteur  $b$ .

Pour deux points de la fente rectangulaire distants de  $x$ , le déphasage des ondes diffractées dans une direction  $\theta$  est  $d\varphi = \frac{\omega}{c} dD = \frac{2\pi}{\lambda} dD = \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} x = \Theta \cdot x$  en notant  $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}$ .

L'onde observée dans la direction  $\theta$  après diffraction est donc, en notant  $\varphi_r = \frac{\omega r}{c}$  (cf. rappels de mathématique) :

$$g(t, r) = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_r - \Theta \cdot x) \cdot dx \Rightarrow g(t, r) = \frac{A_0}{b} \cdot \frac{1}{\Theta} \cdot [\cos(\omega \cdot t - \varphi_r - \Theta \cdot x)]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$\Rightarrow g(t, r) = \frac{A_0}{b} \cdot \frac{1}{\Theta} \cdot \left\{ \cos\left(\omega \cdot t - \varphi_r - \Theta \cdot \frac{b}{2}\right) - \cos\left(\omega \cdot t - \varphi_r + \Theta \cdot \frac{b}{2}\right) \right\}$$

En utilisant la formule de factorisation  $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2}$ :

$$g(t, r) = -\frac{A_0}{b} \cdot \frac{2}{\Theta} \cdot \sin\left(-\frac{\Theta \cdot b}{2}\right) \sin(\omega \cdot t - \varphi_r) = \frac{\sin\left(\frac{\Theta \cdot b}{2}\right)}{\left(\frac{\Theta \cdot b}{2}\right)} A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_r)$$

En introduisant la fonction **sinus cardinal** définie pour tout  $x \neq 0$  par  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  et  $\text{sinc}(0) = 1$ , et en remplaçant  $\Theta$  par sa valeur  $\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda}$ , on obtient :

$$g(t, r) = \text{sinc}\left(\frac{\pi \cdot b \cdot \sin \theta}{\lambda}\right) \cdot A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_r)$$

On retrouve une onde progressive dont l'amplitude est modifiée par un facteur  $A(\theta) = \text{sinc}\left(\frac{\pi \cdot b \cdot \sin \theta}{\lambda}\right)$ . L'intensité lumineuse étant proportionnelle au carré des amplitudes, l'intensité qui se projette sur l'écran dans la direction  $\theta$  est donc modulée par la fonction  $I(\theta) = A(\theta)^2$  :

$$I(\theta) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \cdot b \cdot \sin \theta}{\lambda}\right) \quad (43)$$

Cette fonction  $I(\theta)$  s'annule lorsque son argument est un multiple de  $\pi$ , soit lorsque  $\sin \theta = k \cdot \frac{\lambda}{b}$  avec  $k$  entier. Pour des angles  $\theta$  petits devant l'unité,  $\sin \theta \approx \theta$  et l'on observe sur un écran placé en aval de la fente des bandes sombres pour les valeurs de  $\theta$  multiples de  $\frac{\lambda}{b}$ . De même,  $I(\theta)$  présentera un maximum absolu pour  $\theta = 0$ , dans la direction du rayon incident en aval de la fente, et des maxima relatifs pour  $\sin \theta = \left(\frac{2k+1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda}{b}$ , avec  $k$  entier non nul, formant des bandes plus claires entre deux bandes sombres (figure 35).

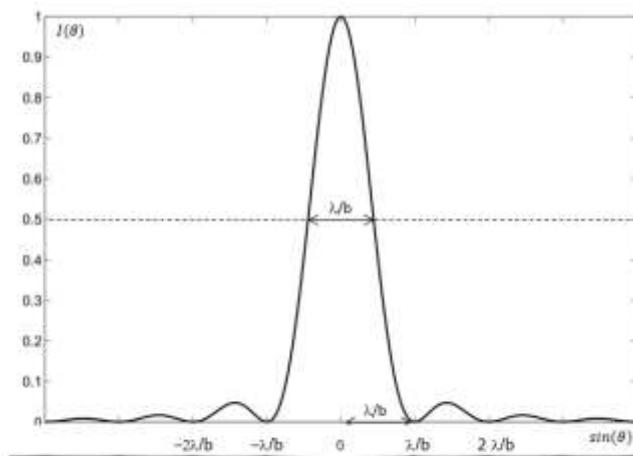


Figure 35 : Graphe de la fonction  $I(\theta) = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \cdot b \cdot \sin \theta}{\lambda}\right)$  en fonction de  $\sin \theta$ .

La valeur  $\frac{\lambda}{b}$  définissant la position du 1<sup>o</sup> minimum,  $\theta_{min} = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{b}\right) \approx \frac{\lambda}{b}$ , correspond aussi à une bonne approximation près à la largeur (en radians) de la bande claire principale mesurée entre les deux points définissant la moitié de son intensité (figure 35). On qualifiera cette largeur de **Largeur à Mi-Hauteur angulaire** ( $LMH_a = \frac{\lambda}{b}$ , ou **FWHM<sub>a</sub>**, **Full Width at Half maximum** en anglais) de la réponse impulsionnelle de l'appareil d'optique utilisé.

Dans le cas d'un orifice de diffraction circulaire de diamètre  $d$ , le calcul de la figure d'interférence est plus complexe, mais aboutit à un résultat similaire à un facteur 1,22 près, avec des minima locaux observés pour des angles vérifiant  $\sin \theta_{min} = 1,22 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{b}$  avec  $k$  entier et une largeur à mi-hauteur de la frange lumineuse principale de l'ordre de  $LMH_a = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{b}$ .

## II- Résolution des appareils d'imagerie

Dans le vide, la **réponse impulsionnelle** d'un système d'imagerie est l'image d'une source ponctuelle et éloignée de rayonnement qui se forme sur un écran placé dans le plan focal d'un système optique après diffraction à travers l'orifice circulaire de diamètre  $d$  qui en constitue l'entrée, puis interférences (figure 36).

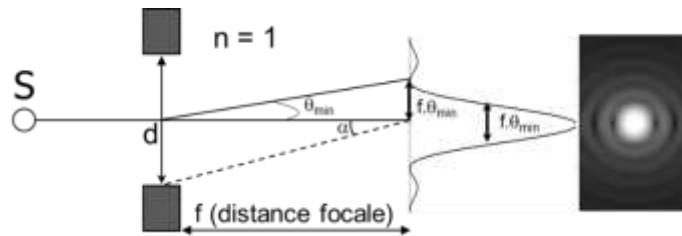


Figure 36 : Réponse impulsionnelle d'un appareil d'imagerie

La largeur à mi-hauteur LMH de la réponse impulsionnelle de ce système d'imagerie est :

$$LMH = f \cdot \theta_{min} = 1,22 \cdot f \cdot \frac{\lambda}{d} = 1,22 \cdot \lambda \cdot N \stackrel{\text{def}}{=} R \text{ où } N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{d}$$

Définitions : **Nombre d'ouverture** :  $N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{d}$

**Résolution angulaire** :  $\theta_{min}$  (en radians)

**Résolution spatiale** :  $R \stackrel{\text{def}}{=} LMH = f \cdot \theta_{min}$  (en unité de longueur),

En utilisant le petit angle  $\alpha$  défini dans la figure 36, on a  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{d}{2f} \Rightarrow N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{d} \approx \frac{1}{2 \cdot \sin \alpha}$

Si le milieu en aval de l'orifice de diffraction est caractérisé par un indice de réfraction  $n$  supérieur à l'unité, alors la longueur d'onde du rayonnement s'écrit  $\lambda_n = c_n \cdot T = \frac{c}{n} \cdot T = \frac{\lambda}{n}$ .

Dans le cas le plus général, la **résolution spatiale** d'un objectif de longueur focale  $f$ , de diamètre  $d$  et de nombre d'ouverture  $N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f}{d}$ , dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  est donc :

$$R \stackrel{\text{def}}{=} LMH = f \cdot \theta_{min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{f}{d} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{n} \cdot N = 0,61 \frac{\lambda}{n \cdot \sin \alpha} \quad (44)$$

En microscopie optique, le terme  $n \cdot \sin \alpha$  est appelé **ouverture numérique**.

Si  $\lambda$  n'est pas négligeable par rapport à  $d$ , du simple fait de la diffraction par l'orifice d'entrée d'un système optique (et d'autres artefacts), l'image d'un objet ponctuel n'est donc pas un point, mais une tache dont l'intensité décroît du centre vers la périphérie. L'équation 1-52 montre que les meilleurs appareils d'imagerie devront exploiter des optiques de grand diamètre (larges lentilles et miroirs des télescopes en astronomie), des longueurs d'ondes les plus petites possibles (intérêt des rayons X en imagerie électromagnétique), et baigner dans des milieux d'indice élevés (intérêt d'une goutte d'huile transparente interposée dans un microscope).

Dans un œil humain, l'iris constitue un diaphragme de diamètre  $d \approx 5 \text{ mm}$ . L'indice de réfraction de l'humeur aqueuse est  $n = 1,34$ . Pour une radiation bleue de longueur d'onde dans le vide de  $\lambda = 500 \text{ nm}$ , l'équation 1-52 donne une résolution dans le plan focal de la rétine ( $f = 22 \text{ mm}$ ) de  $R = 1,22 \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9}}{1,34} \cdot \frac{22}{5} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2 \mu\text{m}$ .

### III- Pouvoir séparateur des appareils d'imagerie

Dans la figure 37, on représente l'acquisition d'une image de deux sources ponctuelles de rayonnement  $S$  et  $S'$  séparées par une distance  $x$ .

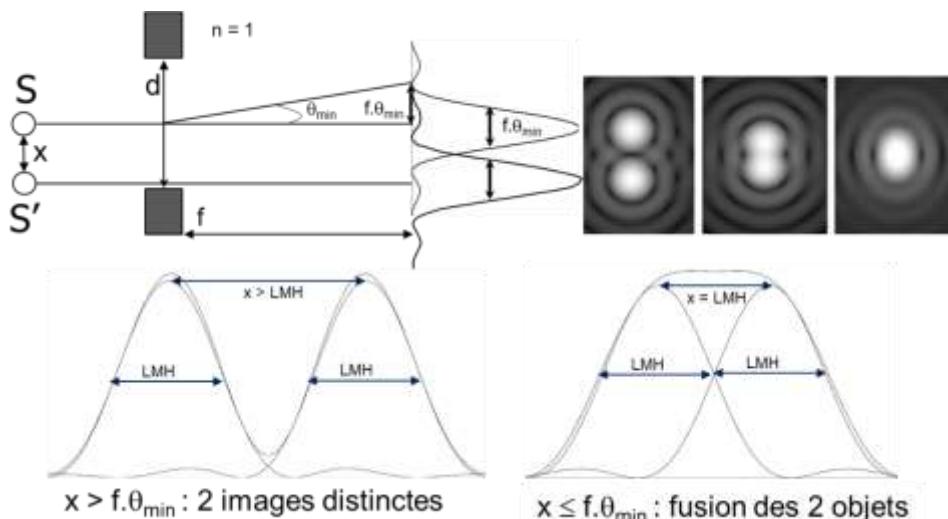


Figure 37 : Pouvoir séparateur d'un appareil d'imagerie

On constate que si  $x \leq R = LMH$ , les deux réponses impulsionales produites fusionnent en une seule image, l'intensité de l'image entre les deux maxima correspondant aux images de chacun des objets ponctuels dépassant le niveau de ses maxima. Les deux images ne sont individualisables que si  $x > R = LMH$  : la résolution est aussi le **pouvoir séparateur** de l'appareil d'imagerie.

Une image ne peut contenir que de composantes dont la période  $\frac{1}{f} > R$ , donc dont la fréquence (en  $m^{-1}$ )  $f < \frac{1}{R}$ . Dans la décomposition en série de Fourier de l'image (cf. paragraphe 1-A-IV), il existe donc une composante harmonique de fréquence maximale  $f_{max} = \frac{1}{R}$ .

## IV- Théorème d'échantillonnage de Shannon et numérisation des images

Considérons l'image de deux objets ponctuels séparés par une distance à peine supérieure à la résolution  $R$ , donc dont les images n'ont pas encore fusionné. Etudions la taille des pixels à utiliser pour numériser cette image sans perte. On constate sur la figure 38 que choisir des pixels de dimension  $R$  ne permet pas d'échantillonner la discrète diminution d'intensité qui, sur l'image analogique, permet d'identifier deux images à peine discernables.

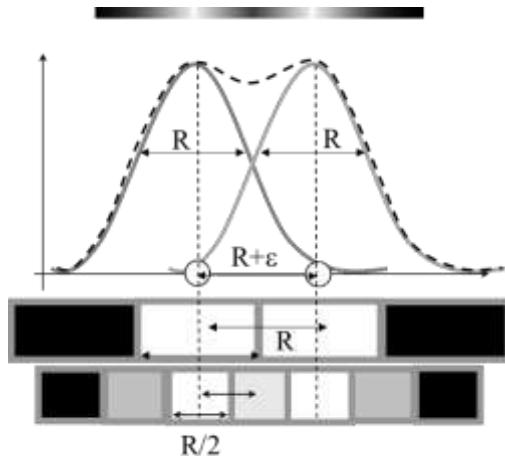


Figure 38 : Illustration heuristique du théorème d'échantillonnage sur un signal

Pour que cela soit possible, il faut utiliser des pixels de taille  $d = \frac{R}{2}$ , ce qui revient à échantillonner avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = \frac{1}{d} = \frac{2}{R}$ . Ce résultat obtenu ici de manière intuitive porte le nom de **théorème d'échantillonnage de Shannon**.

$$d = \frac{R}{2} \Leftrightarrow f_e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{d} = 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot \frac{1}{R} \quad (45)$$

## V- Application à l'étude de la structure tridimensionnelle des molécules

Lors d'une expérience de diffraction des rayons X par un réseau cristallin constitué de molécules biologiques déshydratées ( $\lambda$  et  $b \approx 10^{-10} \text{ m} \stackrel{\text{def}}{=} 1\text{\AA}$ ), la mesure de  $\frac{\lambda}{b}$  sur un écran distant permet de déterminer les distances  $b$  caractérisant les cristaux qui ont provoqué la diffraction. Dans le cas d'un cristal d'ADN, la figure de diffraction est plus complexe qu'un sinus cardinal, mais elle a permis en mai 1952 à R. Gosling, étudiant en thèse sous la direction de la biophysicienne Rosalind Franklin, d'élucider la structure en double hélice de la molécule d'ADN (figure 39).

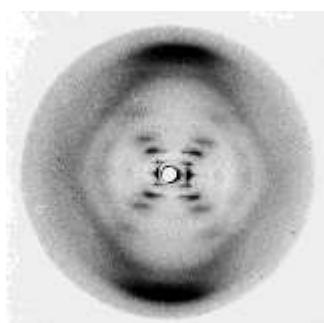


Figure 39 : Image de diffraction des rayons X par une molécule d'ADN (« photographie 51 »). Son analyse montre la structure en double hélice de l'ADN, détermine son diamètre (20 Å), la période de l'hélice (34 Å), l'espacement entre les bases (3,4 Å) et la pente de l'hélice (40°).

## CHAPITRE 2 : INITIATION A LA MECANIQUE ONDULATOIRE

*Présentation :* Ce chapitre propose une approche raisonnée aussi simple que possible des fondements de la mécanique ondulatoire (mécanique quantique) qui permettra au chapitre suivant de proposer une modélisation de l'atome et du noyau atomique suffisante pour la plupart des besoins des professionnels de santé. Nous commencerons par appliquer le principe de moindre action à une onde et à une particule pour établir la relation de Louis de Broglie et proposer une modélisation duale, corpusculaire et ondulatoire, de la nature. Pour aller au-delà, un détour par quelques éléments de relativité restreinte sera nécessaire : la prise de conscience d'un écoulement variable du temps en fonction du mouvement de l'observateur qui le mesure permettra d'établir la célèbre relation d'Einstein ( $E=mc^2$ ), de calculer l'énergie d'une particule de masse au repos nulle, puis d'en déduire la relation qui relie l'énergie d'un photon à la fréquence de l'onde électromagnétique qui lui est associée. Cela permettra de préciser le spectre de toutes les radiations électromagnétiques. Une approche très simple fondée sur une modélisation corpusculaire et ondulatoire du phénomène de diffraction permettra ensuite de justifier les inégalités d'Heisenberg, de comprendre pourquoi la notion de trajectoire perd toute signification physique à l'échelle des particules élémentaires et d'où provient le caractère probabiliste de la théorie quantique. Nous terminerons ce chapitre en revenant sur la notion d'onde progressive pour comprendre pourquoi les grandeurs physiques associées aux particules élémentaires (quantité de mouvement, énergie...) ne peuvent pas prendre des valeurs continues mais seulement certaines valeurs discrètes bien déterminées (quantification).

### A- Approche par principe de moindre action : relation de Louis de Broglie

D'après le principe de moindre action de Fermat (cf. paragraphe 1-E-I), une onde pure se propage entre deux points A et B en suivant un chemin optique  $L$  extrémal (figure 40). Ce chemin optique est la somme de chemins optiques élémentaires  $dL = n \cdot ds$  sur chaque portion infinitésimale de trajectoire  $ds$  dans un milieu d'indice  $n = \frac{c_{max}}{c_n}$  ( $c_{max} = c$  si l'onde est électromagnétique). Cette somme  $L = \int_A^B dL = \int_A^B n \cdot ds$  peut s'exprimer en fonction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  et du vecteur  $\vec{ds} = ds \cdot \vec{u}$  suivant :

$$\begin{aligned} L &= \int_A^B n \cdot ds = \int_A^B \frac{c_{max}}{c_n} \cdot ds = \int_A^B \frac{c_{max}}{c_n} \cdot \frac{\omega}{\omega} ds \\ &= \frac{c_{max}}{\omega} \int_A^B \frac{\omega}{c_n} \cdot ds = \frac{c_{max}}{\omega} \int_A^B \|\vec{k}\| \cdot ds = \frac{c_{max}}{\omega} \int_A^B \vec{k} \cdot \vec{u} \cdot ds = \frac{c_{max}}{\omega} \int_A^B \vec{k} \cdot \vec{ds} \end{aligned}$$

Comme  $\frac{c_{max}}{\omega}$  ne dépend pas de la trajectoire suivie entre A et B, le principe de moindre action de Fermat impose que la grandeur  $C_k = \int_A^B \vec{k} \cdot \vec{ds}$  soit extrémale.

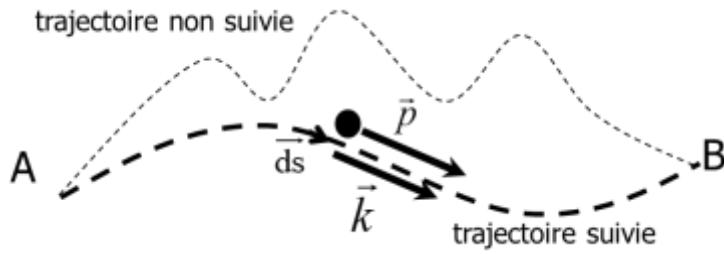


Figure 40 : Illustration d'une modélisation ondulatoire (vecteur d'onde  $\vec{k}$ ) et corpusculaire (quantité de mouvement  $\vec{p}$ ) d'un déplacement du point  $A$  vers le point  $B$ .

Supposons maintenant qu'une particule de quantité de mouvement  $\vec{p}$  suive la même trajectoire de  $A$  à  $B$  que l'onde précédente. Le principe de moindre action (dit de Maupertuis) appliqué à cette particule exige que le temps de trajet soit extrémal. On peut montrer que cela revient à exiger que la grandeur  $C_p = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{s}$  soit extrémale. La démonstration de ce principe est un peu technique, mais on peut le justifier facilement dans le cas d'une particule non relativiste se déplaçant à une vitesse constante :

$$C_p = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{s} = \int_A^B p \cdot ds = \int_A^B m \cdot v \cdot ds = \int_A^B m \cdot v \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_A^B m \cdot v^2 \cdot dt = 2 \cdot E_c \cdot (t_B - t_A)$$

Si la durée du trajet  $t_B - t_A$  entre  $A$  à  $B$  est extrémale, il en est donc de même de  $C_p$ .

Un cadre théorique commun à une modélisation à la fois ondulatoire et corpusculaire de la nature nécessite de satisfaire le principe de moindre action à la fois dans sa formulation ondulatoire (principe de Fermat) et dans sa formulation corpusculaire (principe de Maupertuis). Il faut donc que les deux grandeurs  $C_k = \int_A^B \vec{k} \cdot d\vec{s}$  et  $C_p = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{s}$  soit toutes deux extrémales sur la trajectoire effectivement suivie par l'onde et la particule, entre les points  $A$  et  $B$ . Il suffit pour cela d'imposer une proportionnalité entre le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et la quantité de mouvement  $\vec{p}$ . En notant  $\hbar$  (« h barre ») le coefficient de proportionnalité, on obtient un lien entre modélisation ondulatoire et modélisation corpusculaire :

$$\boxed{\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}} \quad (46)$$

La constante  $\hbar$  est appelée **constante de Planck réduite**.

En prenant les normes de ces vecteurs, on a :  $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k} \Rightarrow p = \hbar \cdot \frac{\omega}{c_n} = \hbar \cdot \frac{2\pi f}{c_n} = \hbar \cdot \frac{2\pi}{T \cdot c_n} = \frac{2\pi \hbar}{\lambda}$ . En définissant la **constante de Planck  $h$**  par  $h \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot \pi \cdot \hbar$ , on obtient la **relation de Louis de Broglie** qui relie la quantité de mouvement ( $p$ ) d'une particule et la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde qui lui est associée :

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad (47)$$

La constante de Planck a pu être évaluée expérimentalement à  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ .

Pour une personne de masse 70 kg se déplaçant à une vitesse de 10 km/h, la une quantité de mouvement  $p = m \cdot v = 70 \cdot \frac{10000}{3600} = 194,4 \text{ kg.m.s}^{-1}$  est donc associée à une onde de longueur

d'onde  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{194,4} = 3,4 \cdot 10^{-36} m$ . Pour l'observer, il faudrait la faire diffracter sur des objets de cet ordre de grandeur en dimension, ce qui n'est pas possible (le diamètre d'un électron est de l'ordre de  $10^{-18} m$ ). A cette échelle donc, la dualité onde-corpuscule n'est pas observable, et sort donc du domaine de la physique.

En revanche, un électron de masse  $m = 0,9 \cdot 10^{-31} kg$  et de charge  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} C$  accéléré sous une différence de potentiel de  $V = 100 V$  acquiert une énergie cinétique de  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = e \cdot V$  ce qui conduit à une quantité de mouvement  $p = m \cdot v = \sqrt{2 \cdot m \cdot e \cdot V} = 5,4 \cdot 10^{-24} kg \cdot m \cdot s^{-1}$  et à une longueur d'onde de l'onde associée  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{5,4 \cdot 10^{-24}} = 1,2 \cdot 10^{-10} m = 1,2 \text{ \AA}$ , de l'ordre de grandeur de la dimension d'un atome. On vérifie expérimentalement que des cristaux bombardés par un faisceau d'électrons produisent effectivement une figure de diffraction identique à celle observée avec des rayons X.

Un électron, de même que toute particule élémentaire, se comporte ainsi à la fois comme une onde (qui diffracte, permet de concevoir des microscopes électroniques à forte résolution suivant la relation 1-52), et comme une particule (capable de chocs). A l'échelle des particules élémentaires, la description de la nature doit donc être duale, particulaire et ondulatoire.

Symétriquement, la relation (47) permet d'associer à toute onde une particule. Pour décrire la particule associée à une onde électromagnétique, il va falloir mieux cerner ce qu'est la quantité de mouvement d'une particule de lumière, un photon...

## B- Temps, énergie et quantité de mouvement en relativité restreinte

Dans les équations de Maxwell (paragraphe 1-D-II), la vitesse de la lumière dans le vide apparaît comme une constante universelle de la physique qui ne dépend pas de l'observateur et de sa vitesse relative par rapport à une source lumineuse. Ce résultat théorique surprenant a été confirmé par des mesures expérimentales réalisées à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. En 1905, Albert Einstein en a tiré toutes les conséquences...

Dans un repère R' (un observateur) lié à un train qui se déplace à la vitesse constante  $V$ , l'intervalle de temps nécessaire à un rayon lumineux pour venir se réfléchir sur un miroir situé à une distance de  $L/2$  au-dessus de la source lumineuse, puis pour y retourner s'y faire détecter est  $dt' = L/c$  (Figure 41, partie haute).

Calculons ce même intervalle  $dt$  mais par rapport à un repère R (un observateur) fixe sur le quai. Le trajet « aller » de la source au miroir dure  $dt/2$ . Pendant cet intervalle de temps, le train s'est déplacé de la distance  $V \cdot dt/2$  et le rayon a parcouru la distance  $c \cdot dt/2$ , puisque  $c$  n'est pas modifié par le déplacement du train. Le trajet retour dure de même  $dt/2$ , durée pendant laquelle le rayon parcourt de nouveau la distance  $c \cdot dt/2$  et le train la distance  $V \cdot dt/2$  (Figure 41, partie basse).

D'après le théorème de Pythagore :  $\left(c \cdot \frac{dt}{2}\right)^2 = \left(V \cdot \frac{dt}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow (c^2 - V^2) \cdot dt^2 = L^2$ .

Mais  $L^2 = c^2 \cdot dt'^2$ , donc  $(c^2 - V^2) \cdot dt^2 = c^2 \cdot dt'^2$ , ce qui s'écrit :

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \gamma \cdot dt' \text{ avec } \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{dt}{dt'} \geq 1 \quad (48)$$

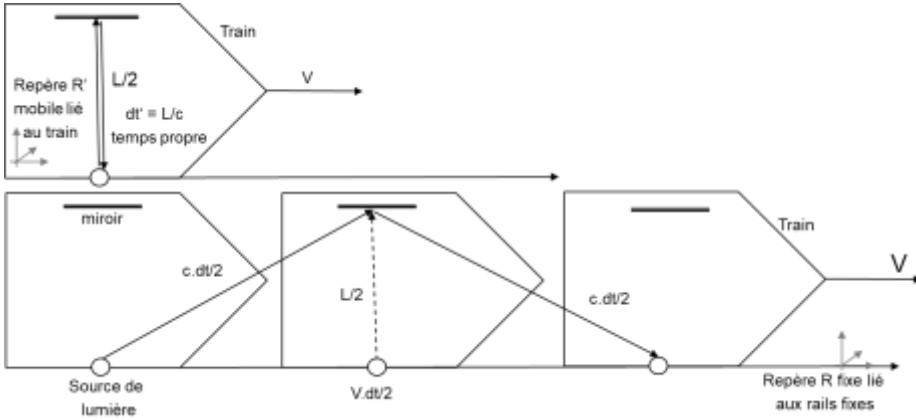


Figure 41 : La mesure d'un intervalle de temps  $dt$  ou  $dt'$  dépend du référentiel choisi.

Par exemple :  $V = 87\% \text{ de } c \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0,87^2}} = 2$  et  $dt = 2 \cdot dt'$  : un voyageur à l'intérieur du train voit passer un intervalle de temps  $dt'$  pendant que l'observateur immobile sur le quai voit lui passer un intervalle de temps  $dt = 2 \cdot dt'$  deux fois plus long : si une personne pouvait voyager dans un tel train, elle vieillirait donc deux fois moins vite qu'une autre personne restée sur la quai.

Pour une particule en mouvement, le temps  $t'$  de l'équation (48) mesuré par rapport à un référentiel lié à la particule est appelé le **temps propre** de la particule et définit la vitesse de la particule suivant  $\frac{dx}{dt'}$ .

Si cette vitesse vaut  $v = \frac{dx}{dt}$  dans un référentiel fixe  $R$ , alors, d'après (48) :

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \gamma \cdot \frac{dx}{dt} = \gamma \cdot v.$$

Dans  $R$ , la quantité de mouvement d'une particule de masse  $m$  est donc  $p = \gamma \cdot m \cdot v$ .

En particulier, si  $v \rightarrow c$ , alors  $\gamma \rightarrow \infty$  ce qui nécessite d'avoir  $m \rightarrow 0$  pour ne pas avoir une quantité de mouvement qui tende vers l'infini. On en déduit donc que seule une particule de masse au repos nulle peut se déplacer à la vitesse de la lumière :

$$v = c \Rightarrow m = 0 \quad (49)$$

Pour une particule de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $v \ll c$  par rapport à un repère  $R$  fixe :

$$\gamma \cdot m \cdot c^2 = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx m \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

En utilisant l'approximation  $(1 - \varepsilon)^n \approx 1 - n \cdot \varepsilon$  pour tout  $n$  si  $\varepsilon \ll 1$ .

Le terme  $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$  est donc l'expression d'une énergie décomposée en la somme d'une énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ , en lien avec la vitesse de la masse, et d'une énergie de repos portée seulement par la masse de la particule,  $E_r = m \cdot c^2$

Sous réserve du respect des lois de conservation, une particule au repos de masse  $m$  peut donc se désintégrer en une énergie  $E_r$ , et une énergie  $E_r$  peut se matérialiser en une particule de masse  $m$ , ces deux quantités étant liées par la relation :

$$E_r = m \cdot c^2 \quad (50)$$

En dehors de toute approximation sur  $v$ ,  $E = \gamma \cdot m \cdot c^2$  est donc l'énergie totale d'une particule (en l'absence de toute énergie potentielle), et l'expression relativiste de l'énergie cinétique est donc simplement  $E_c = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2$ . En calculant  $\gamma^2 - 1 = \frac{v^2}{c^2 - v^2}$ , on pourra facilement vérifier que  $E_c = (\gamma - 1) \cdot m \cdot c^2 = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \cdot m \cdot v^2$ , forme sous laquelle, lorsque  $v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1$ , on retrouve l'approximation non relativiste bien connue de l'énergie cinétique  $E_c \approx \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ .

L'énergie totale, cinétique et de repos, s'exprime aussi suivant :

$$E = \gamma \cdot m \cdot c^2 \Rightarrow E^2 = \gamma^2 \cdot m^2 \cdot c^4 = m^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{v^2}{c^2}} - 1\right) = m^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$\Rightarrow E^2 = m^2 \cdot c^4 \cdot \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 \cdot c^4 + m^2 \cdot c^2 \cdot \gamma^2 \cdot v^2.$$

Comme  $p = \gamma \cdot m \cdot v$ , nous obtenons pour l'énergie totale :

$$E^2 = m^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2 \quad (51)$$

## C- La relation du quantum

Par définition, le **photon** est le corpuscule associé à une onde électromagnétique.

Sa masse au repos  $m = 0$  puisqu'il se déplace à la vitesse de la lumière.

D'après (51), sa quantité de mouvement est :

$$p = \frac{E}{c} \quad (52)$$

L'onde électromagnétique pure suivant la relation (47) de Louis de Broglie  $\lambda = h/p$ .

Pour un photon, la combinaison des équations (47) et (52) permet d'écrire :  $E = p \cdot c = \frac{h}{\lambda} \cdot c$ . Dans le cas particulier d'un photon, la relation de Louis de Broglie est connue sous le nom de **relation du quantum**. Elle relie l'énergie d'un photon (aspect corpusculaire) à la fréquence de l'onde électromagnétique qui lui est associée :

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} = h \cdot f = \hbar \cdot \omega \quad (53)$$

En exprimant l'énergie en electronvolts ( $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ) et la longueur d'onde en nanomètres, cette équation s'écrit  $E(\text{eV}) = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \lambda(\text{nm}) \cdot 10^{-9}}$ , soit :

$$E(\text{eV}) = \frac{1240}{\lambda(\text{nm})} \quad (54)$$

La relation 54 permet de classer les ondes électromagnétiques en fonction de la longueur d'onde ou de la fréquence de l'onde, ou en fonction de l'énergie du photon associé (figure 42).

Les rayons X et  $\gamma$  se distinguent seulement par leur origine :

- Un **rayonnement gamma** ( $\gamma$ ) est produit au sein des noyaux atomiques ou par annihilation entre une particule et son antiparticule (cf. paragraphe 3-H-II).
- Un **rayonnement X** est lui produit par des transitions électroniques au sein d'un atome ou par une accélération d'électrons (freinage ou courbure de leurs trajectoires). Ces aspects sont détaillés aux paragraphes 3-F et 3-G.

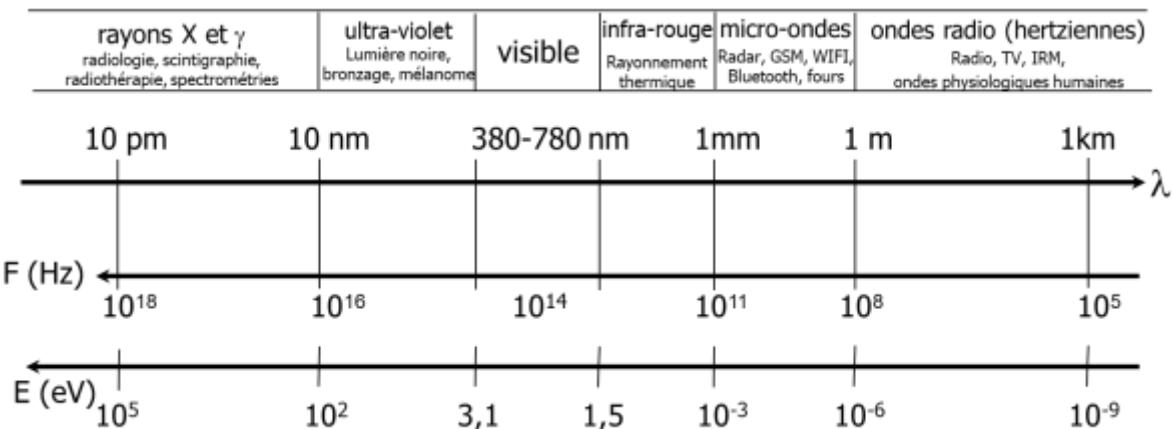


Figure 42 : Présentation simplifiée du spectre des ondes électromagnétiques.

On comprend que la nature se manifeste plutôt par ses aspects ondulatoires pour des énergies inférieures à quelques électrons-volt (visible, IR, micro-ondes et ondes hertziennes) pour lesquelles les longueurs d'ondes peuvent être diffractés par des objets proches de notre échelle. A l'inverse, les aspects corpusculaires prédomineront lorsque la longueur d'onde devient petite ( $\frac{\lambda}{d} \rightarrow 0$ , ce qui empêche toute manifestation ondulatoire du type diffraction) donc pour des énergies de photons supérieures à quelques dizaines d'électrons-volts (UV, X ou  $\gamma$ ).

## D- Retour sur la diffraction : les relations d'incertitude d'Heisenberg

Nous avons vu (cf. paragraphe 1-H) qu'une source ponctuelle de radiation de longueur d'onde  $\lambda$  placée à grande distance d'une fine fente rectangulaire de hauteur  $b$  percée dans un écran opaque s'y présente sous la forme d'une onde (localement plane), y est diffractée en vertu du principe de Huygens-Fresnel, puis subit des interférences tantôt constructives, tantôt destructives. Il en résulte sur un écran placé par exemple à un mètre de la fente, pour de faibles angles, l'apparition d'une figure de diffraction avec des minima de luminosité espacés d'un intervalle angulaire  $\theta_{min} \approx \sin \theta_{min} = \frac{\lambda}{b}$ . Cette figure qui résulte de l'addition algébrique de multiples ondes sphériques issues de la fente est un phénomène purement ondulatoire.

Reprendons la description d'une expérience de diffraction (cf. paragraphe 1-H), mais sous un point de vue corpusculaire, en supposant que la source de lumière émet ses photons un par un de manière à éviter que 2 photons soient en même temps dans un trajet entre la source et l'écran (figure 43). Aucune interférence n'est alors concevable, et pourtant au bout d'un certain temps, on enregistre sur l'écran la même figure que celle observée précédemment.

En terme corpusculaire, cela oblige à admettre que lorsqu'un photon arrive au niveau de la fente, un **processus aléatoire** dépendant d'une certaine loi de probabilité décide de l'angle  $\theta$  que prendra la trajectoire, donc la quantité de mouvement  $\vec{p}$  du photon après la fente. Cette probabilité est maximale pour les angles  $\theta$  associés à des maxima d'intensité sur l'écran, et minimale pour les multiples de  $\frac{\lambda}{b}$ .

Dans ce modèle, l'incertitude sur la position d'un photon  $x$  est  $\Delta x = b$ .

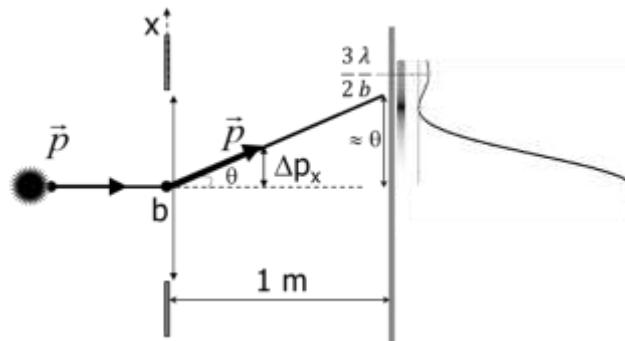


Figure 43 : Distribution d'intensité observée avec une source de photons émis un par un vers une fente mince percée dans un écran opaque.

Au passage de la fente, l'incertitude sur la composante verticale de  $\vec{p}$  est  $\Delta p_x = p \cdot \sin \theta \approx p \cdot \theta$  pour  $\theta \ll 1$ . Comme l'ordre de grandeur de  $\theta \approx \frac{\lambda}{b}$ , l'ordre de grandeur du produit  $\Delta x \cdot \Delta p_x$  est, d'après (47) :  $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx b \cdot p \cdot \theta \approx b \cdot p \cdot \frac{\lambda}{b} = p \cdot \lambda = h$

Le produit  $\Delta x \cdot \Delta p_x$  des incertitudes au passage de la fente sur la position et sur la quantité de mouvement du photon est donc de l'ordre de la constante de Planck, soit  $10^{-34}$ . Cette valeur est faible, mais non nulle :

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x > 0} \quad (55)$$

Cette inégalité porte le nom **de relation d'incertitude d'Heisenberg**.

Ces considérations ont plusieurs conséquences importantes :

- 1- L'introduction de hasard dans les lois physiques est nécessaire pour expliquer comment une particule peut se manifester comme une onde, dans une description duale.
- 2- Il est impossible de connaître avec une précision parfaite à la fois de la position et la quantité de mouvement de la particule à un instant donné, quelle que soit la précision des mesures envisagées.
- 3- La détermination de la trajectoire d'une particule nécessite d'intégrer deux fois la relation fondamentale de la dynamique  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , ce qui implique de connaître avec une précision parfaite à la fois de la position et la quantité de mouvement de la particule à un instant donné. Comme ceci est impossible, la notion de trajectoire n'a plus aucun sens à l'échelle des particules élémentaires. On ne pourra déterminer que des probabilités de présence à un endroit et un instant donnés.

## E- Quantification des grandeurs atomiques

Nous avons vu au paragraphe (1-G-II) qu'une onde pure confinée entre deux miroirs distants de  $L$  se réduisait à une onde stationnaire dont la longueur d'onde  $\lambda$  était quantifiée sous la forme  $\lambda = \frac{2L}{k}$ , soit  $f = \frac{c}{\lambda} = k \cdot \frac{c}{2L}$  avec  $k$  entier non nul.

Pour le photon associé à cette onde,  $E = h \cdot f = h \cdot k \cdot \frac{c}{2L}$  et  $p = \frac{E}{c} = k \cdot \frac{h}{2L}$ . Dans un espace clos, l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon ne peuvent donc prendre que certaines valeurs bien particulières. On dit que les grandeurs physiques sont **quantifiées**.

# CHAPITRE 3 : LE MODELE ATOMIQUE DE BOHR

Présentation : Ce dernier chapitre propose d'exploiter tous les résultats acquis pour établir un modèle de l'atome et du noyau atomique suffisamment pertinent pour permettre à un professionnel de santé de fonder ses connaissances en chimie (orbitales, construction des structures moléculaires), de comprendre le bénéfice pour ses patients de l'exploitation de rayonnement ionisants (en imagerie médicale radiologique ou scintigraphique comme en radiothérapie), mais aussi les risques que ces derniers peuvent engendrer. Nous détaillerons le premier modèle atomique proprement scientifique élaboré au tout début du XX<sup>e</sup> siècle par analogie avec le système solaire. Nous l'exploiterons pour définir la notion de défaut de masse au sein du noyau atomique, comprendre la stabilité du noyau et l'origine de l'énergie produite par les réactions de fusion ou de fission nucléaire. Nous verrons en quoi ce modèle est insuffisant pour décrire correctement les électrons d'un atome, avant d'exploiter les résultats de mécanique ondulatoire obtenus au chapitre précédent pour établir le modèle atomique de Bohr. Après avoir justifié la forme de l'équation de Schrödinger par une approche très simple, nous l'exploiterons pour introduire la notion de fonction d'onde et les nombres quantiques qui permettent d'améliorer le modèle de Bohr, de calculer de façon exacte l'énergie des électrons atomiques et la façon dont les électrons forment le nuage électronique d'un atome. Nous terminerons le chapitre en décrivant comment sont produites les sources de rayonnements ionisants utilisés en particulier dans les domaines du soin : fluorescence et rayonnement de freinage pour les rayons X, divers modes de radioactivité pour les rayonnements utilisés en médecine nucléaire.

## A- Le modèle atomique de Rutherford-Nagaoka.

**Modèle atomique de Rutherford-Nagaoka :** L'atome est modélisé par un petit noyau en son centre, chargé positivement et portant l'essentiel de la masse atomique, entouré d'électrons en orbite autour du noyau à une distance très supérieure au diamètre du noyau.

Quelques définitions et ordres de grandeurs :

- Les **nucléons** sont les neutrons et les protons qui constituent le noyau atomique. On les modélise comme des sphères de rayon  $r \approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,4 \text{ fm}$ .
- Le **nombre atomique Z** est le nombre de protons dans un noyau atomique. L'atome étant neutre, il est égal au nombre d'électrons dans l'atome.
- Le **nombre de masse A** est le nombre de nucléons (protons et neutrons) d'un noyau. Ce terme est justifié car la masse des électrons est négligeable par rapport à celle des nucléons. Le nombre de neutrons d'un atome est  $A-Z$ .
- Un atome de symbole chimique X sera noté  ${}^A_Z X$ .
- Un atome **hydrogénoidé** est un atome ne possédant qu'un électron.
- Deux atomes sont :
  - o **isotopes** s'ils ont même Z.
  - o **isobares** s'ils ont même A.
  - o **isotones** s'ils ont même nombre de neutrons  $A-Z$ .

### Quelques unités :

- **Un électron-volt** et notée **eV** est l'énergie acquise par un électron accéléré sous une différence de potentiel de 1 V :

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (56)$$

- **L'unité de masse atomique**, de symbole **u**, est le douzième de la masse d'un atome de carbone  $^{12}_6C$ , dont une mole a une masse de 12 g, soit  $1 \text{ u} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}}$  :

$$1 \text{ u} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (57)$$

- La relation (50),  $E = m \cdot c^2$ , permet d'exprimer une **masse en son équivalent énergétique** Dans ces conditions,  $1 \text{ u} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 299792458^2}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV}$ , soit :

$$1 \text{ u} = 931 \text{ MeV} \quad (58)$$

Dans cette unité énergétique exprimée, l'électron, le proton et le neutron ont des masses  $m_e = 0,511 \text{ MeV}$ ,  $m_p = 938,280 \text{ MeV}$  et  $m_n = 939,573 \text{ MeV}$ .

### A propos du noyau atomique :

- Un noyau est modélisé comme une sphère de rayon  $R$  tel que  $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \approx A \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ . Les valeurs de  $R = \sqrt[3]{A} \cdot r$  varient donc entre 1,4 fm (pour l'hydrogène) et 9,3 fm (pour l'oganesson  $^{294}_{118}Og$ ). Cette dimension de l'ordre du femtomètre explique la cohésion du noyau (par interaction forte qui domine la répulsion électrostatique entre protons) et le fait qu'un atome, dont le diamètre est de l'ordre d'1 Å =  $10^{-10} \text{ m}$  est majoritairement constitué de vide.
- La masse d'un noyau  $M(^A_ZX)$  est inférieure à la somme des masses de ses constituants  $Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n$ . L'écart entre ces deux masses est appelé **défaut de masse  $\Delta M$**  et fournit l'énergie de liaison  $\Delta E$  (par interaction forte) entre nucléons (relation 1-58) :

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M(^A_ZX) > 0 \quad (59)$$

La cohésion relative d'un noyau par rapport à un autre s'estime en évaluant l'**énergie de liaison par nucléons**  $\frac{\Delta E}{A}$  au sein des noyaux (figure 44). Les noyaux les plus stables sont ceux dont le nombre de nucléons est proche du fer  $^{56}_{26}Fe$ . Les nucléons des noyaux plus légers ou plus lourds sont moins liés peuvent conduire à des réactions de fusion (pour les noyaux légers) ou de fission (pour les noyaux les plus lourds) fortement exothermiques pour produire des noyaux plus stables.

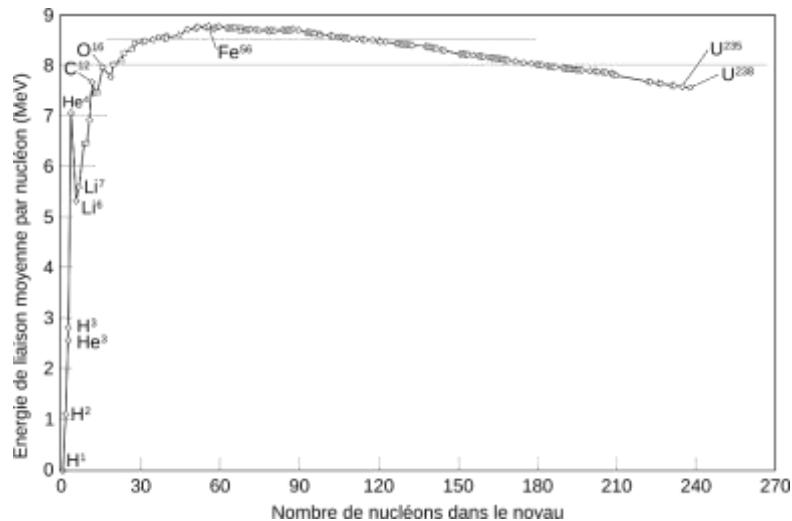


Figure 44 : Courbe d'Aston représentant évaluant l'énergie de liaison par nucléons  $\frac{\Delta E}{A}$  en fonction du nombre de nucléons  $A$ .

## C- Les limites du modèle atomique planétaire

Le modèle planétaire de Rutherford-Nagaoka présente une faille immédiatement identifiée par les scientifiques de l'époque :

Des électrons en orbite autour d'un noyau constituent une boucle de courant qui, suivant la théorie électromagnétique de Maxwell, doit rayonner de l'énergie. Les électrons perdant peu à peu cette énergie devraient l'émettre sous forme d'onde électromagnétique de période de plus en plus courte (avec le rayon de l'orbite qui diminue), donc de fréquence continument croissante avant de finir par s'écraser sur le noyau. L'expérience infirme complètement cette conclusion : d'une part, les atomes sont des structures stables. D'autre part, les spectres émis par des atomes chauffés dans des lampes contenant des gaz de sodium ou de mercure montrent au contraire des spectres discrets, composés de quelques fréquences seulement et non des spectres continus. Ces fréquences sont par ailleurs les mêmes que celles qui sont absorbées par ces atomes (figure 45).

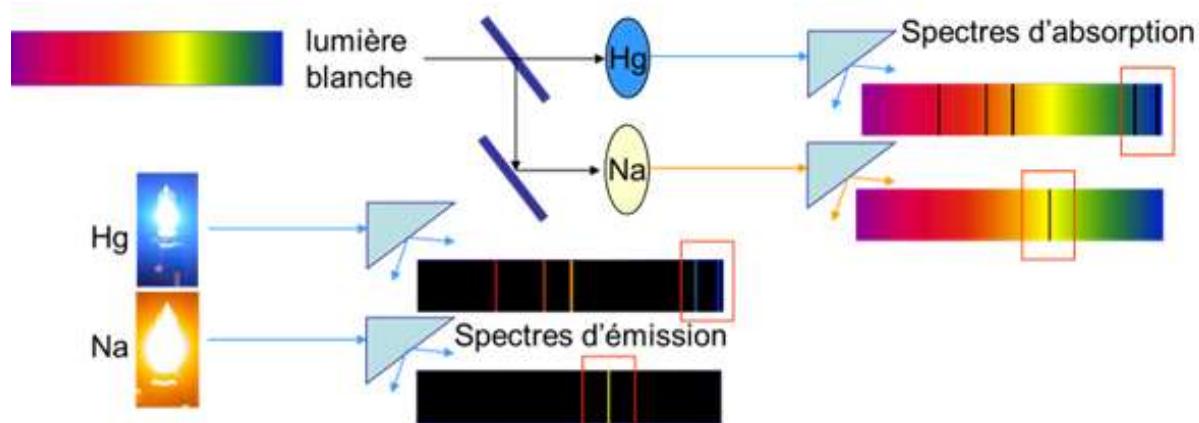


Figure 45 : Exemples de spectres d'émission et d'absorption discrets obtenus avec des vapeurs de mercure ou de sodium.

A la fin du XIX siècle, en tâtonnant, on avait fini par mettre en évidence que les longueurs d'onde des raies d'émission ou d'absorption de l'hydrogène pouvaient être calculées à partir d'une formule empirique où n'intervenait qu'une constante et deux nombres entiers. Cette formule est connue sous le nom de formule de Rydberg-Ritz s'écrit :

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (60)$$

Dans cette formule,  $0 < n < p$  sont deux entiers naturels et la constante de Rydberg est ajustée à la valeur  $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

## D- Le modèle atomique de Bohr

Nous nous intéressons dans un premier temps à un atome hydrogénoidé.

L'électron du modèle de Rutherford-Nagaoka est supposé confiné sur la circonference d'une orbite de longueur  $C = 2 \cdot \pi \cdot r$ . Il est donc associé à une onde stationnaire dont la longueur d'onde vérifie  $C = k \cdot \frac{\lambda}{2}$  avec  $k$  entier naturel non nul. Dans le cas d'une orbite circulaire (fermée sur elle-même), si  $k$  est impair, alors l'onde subit des interférences destructives et n'existe pas. On supposera donc  $C = 2 \cdot \pi \cdot r = n \cdot \lambda$ ,  **$n$  étant un entier naturel non nul**.

La relation de Louis de Broglie (47) donne alors  $C = 2 \cdot \pi \cdot r = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{h}{p} = n \cdot \frac{h}{m \cdot v}$ , soit :

$$\|\vec{L}\| \stackrel{\text{def}}{=} \|m \cdot \vec{v} \wedge \vec{r}\| = m \cdot v \cdot r = n \frac{h}{2 \cdot \pi} = n \cdot \hbar \quad (61)$$

La relation (61) constitue une première quantification qui porte sur la norme du moment cinétique  $\vec{L}$  de l'électron sur son orbite.

Dans le champ électrostatique d'un noyau de charge  $Z \cdot e$ , l'électron de charge  $-e$  est soumis à une force électrostatique attractive centrale de la part du noyau de norme  $\|\vec{F}_e\| = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$  qui génère une accélération centripète de la forme  $\frac{v^2}{r}$  nécessaire pour maintenir l'électron sur une trajectoire circulaire à vitesse angulaire constante (cf. rappels de mathématique). La relation fondamentale de la dynamique s'écrit  $\frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{1}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{1}{m \cdot v^2}$ . Le terme  $m \cdot v^2$  se calcule au moyen de la (61) :  $(m \cdot v)^2 = \left(\frac{n \cdot \hbar}{r}\right)^2 \Rightarrow m \cdot v^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{n \cdot \hbar}{r}\right)^2$ , ce qui donne  $r = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{m \cdot r^2}{(n \cdot \hbar)^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{m}{(n \cdot \hbar)^2}$ , soit :

$$r = n^2 \hbar^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{Z \cdot e^2 \cdot m} = n^2 \cdot r_0 \quad (62)$$

Dans la relation (62), pour de l'hydrogène ( $Z = 1$ ), puisque  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4 \cdot \pi \cdot c^2}$  (cf. équations 1-29 et 1-36), on évalue  $r_0 = \hbar^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{Z \cdot e^2 \cdot m} = \left(\frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \frac{\frac{10^7}{(2,998 \cdot 10^8)^2}}{(1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}} = 0,53 \cdot 10^{-10} = 0,53 \text{ \AA}$ .

Le fait d'associer une onde (stationnaire) à l'électron d'un atome d'hydrogène contraint celui-ci à se trouver sur des orbites discrètes de la forme  $r_n = n^2 \cdot 0,53 \text{ \AA}$ , soit  $r_1 = r_0 = 0,53 \text{ \AA}, r_2 =$

$2^2 \cdot r_0 = 2,12 \text{ \AA}$ ,  $r_3 = 3^2 \cdot r_0 = 4,77 \text{ \AA}$  ... qui correspondent bien aux estimations expérimentales de la dimension d'un atome.

### Aspect énergétique :

$\frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = m \cdot v^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2r} \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0}$  pour l'énergie cinétique de l'électron.

L'énergie potentielle d'interaction électrostatique avec le noyau  $E_p = -e \cdot V = -e \cdot \frac{Z.e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$ .

L'énergie totale de l'électron est donc  $E = E_c + E_p = \frac{1}{2r} \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0} - \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1}{2r} \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0}$ .

En remplaçant dans cette expression  $r$  par son expression donnée par la relation de quantification (62),  $r = n^2 \hbar^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{Z.e^2.m}$ , on obtient  $E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Z.e^2.m}{n^2 \left(\frac{\hbar}{2\pi}\right)^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z.e^2}{4\pi\epsilon_0} = -\frac{Z^2 e^4 m}{8.n^2.h^2.\epsilon_0^2}$ , soit :

$$E(J) = -\frac{e^4 \cdot m}{8 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -E_{1,1} \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad (63)$$

$E_{1,1}$  se calcule en eV suivant  $E_{1,1}(eV) = \frac{1}{e} \frac{e^4 \cdot m}{8 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0^2} = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^3 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}}{8 \cdot (6,626 \cdot 10^{-34})^2 \left(\frac{10^7}{4\pi \cdot (2,998 \cdot 10^8)}\right)^2} = -13,6 \text{ eV}$ .

L'expression de l'énergie totale de l'électron d'un atome hydrogénoidé de numéro atomique  $Z$  est finalement d'une forme simple :

$$E_n(eV) = -13,6 \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad (64)$$

Cette énergie (de liaison de l'électron au noyau) est quantifiée par un nombre entier strictement positif  $n$  que l'on nomme **nombre quantique principal** et qui définit une **couche (ou niveau) énergétique** de l'électron.

Pour soustraire l'électron à l'attraction du noyau, il faut amener cette énergie à 0 ( $n \rightarrow \infty$ ), et donc fournir à l'électron situé sur la couche  $n$  une **énergie d'ionisation**  $E_n^i = -E_n > 0$ , généralement apportée à l'électron par un photon d'énergie  $E_\varphi = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \hbar \cdot \omega$  qui est absorbé par l'électron, suivant la relation (53).

$$E_n^i = +\frac{e^4 \cdot m}{8 \cdot h^2 \cdot \epsilon_0^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = +13,6 \cdot \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV} \quad (65)$$

Si  $E_\varphi(eV) = E_p - E_n = -13,6 \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 13,6 \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$ , alors l'absorption d'un photon d'énergie  $E_\varphi$  par un électron d'une couche (énergétique) profonde  $n$  permet à cet électron de passer sur une couche plus périphérique  $p > n$ . On dira alors que l'atome est **excité**.

Un atome excité peut voir spontanément son électron placé sur une couche périphérique  $p$  revenir sur une couche plus proche du noyau  $n < p$ , donc moins énergétique, en émettant sous la forme d'un photon d'énergie  $E_\varphi$  l'écart d'énergie entre ces deux couches :  $E_\varphi(eV) =$

$13,6 \cdot Z^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$ . Le photon émis lors d'une telle désexcitation porte le nom de **photon de fluorescence**.

L'électron d'un atome d'hydrogène ne peut donc absorber ou émettre que certains photons de longueurs d'ondes bien spécifiques, les mêmes dans les deux cas, satisfaisant  $E_\varphi(eV) = \frac{h.c}{\lambda} = 13,6 \cdot Z^2 \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$ , et donc, en revenant à une énergie exprimée en joules :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{13,6.e}{h.c} \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) = R \cdot \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \text{ avec } R = \frac{13,6.e}{h.c} = \frac{13,6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

On retrouve ainsi très exactement la constante de Balmer et la formule empirique de Rydberg-Ritz (équation 1-68) à laquelle le modèle atomique de Bohr donne une explication cohérente. La présence des deux nombres entiers  $n$  et  $p$  se trouve expliquée, et l'équation (63) permet au passage d'exprimer la constante de Balmer en fonction de constantes :  $R = \frac{1}{h.c} \frac{e^4 \cdot m}{8 \cdot h^2 \cdot \varepsilon_0^2} = \frac{e^4 \cdot m}{8 \cdot h^3 \cdot c \cdot \varepsilon_0^2}$ .

Dans le cas d'atomes à plus d'un électron, le modèle de Bohr se généralise en exprimant que la charge du noyau est en partie masquée à un électron de la couche  $n$  par les charges négatives des électrons des couches  $p < n$  :

$$E(eV) = - \frac{e^3 \cdot m}{8 \cdot h^2 \cdot \varepsilon_0^2} \cdot \frac{(Z - \sigma)^2}{n^2} = -13,6 \cdot \frac{(Z - \sigma)^2}{n^2} \quad (66)$$

La constante  $\sigma$  est appelée **constante d'écran**. Elle est nulle pour des électrons de la première couche ( $n = 1$ ) et croît avec  $n$ .

Pour un électron impliqué dans une liaison covalente entre les atomes d'oxygène et d'hydrogène d'une molécule d'eau, l'énergie d'ionisation moyenne est de l'ordre de 32 eV. Cet électron ne pourra donc être ionisé que par des photons ultraviolet,  $\gamma$  ou X (cf. figure 42).

Ces rayonnements sont qualifiés de **rayonnements ionisants**. Pour un organisme humain constitué principalement de molécules d'eau, seuls les rayonnements ionisants sont capables d'ioniser un électron covalent d'une molécule d'eau et de provoquer la rupture de cette liaison covalente. Ceci produit des radicaux libres  $OH^\bullet$  (groupement OH avec un électron non apparié) qui sont des substances chimiques fortement oxydantes, ainsi que des électrons et des protons libres qui eux sont fortement réducteurs. Ces produits de la **radiolyse de l'eau** sont extrêmement réactifs (au sens chimique du terme) et capables de dénaturer des membranes ou des protéines cellulaires telles que l'ADN nucléaire. A forte dose, ils peuvent ainsi provoquer des lésions tissulaires responsables d'insuffisances organiques (hématopoïétiques en particulier) potentiellement mortelles. A plus faible dose, ils peuvent également être à l'origine de cancers radio-induits. Les rayonnements non ionisants, visibles, IR ou hertziens, au contraire, ne sont pas associés à des photons d'énergie suffisante pour ioniser un électron atomique, et ne peuvent donc pas provoquer de telles pathologies.

En dépit de ses succès dans la modélisation des faits expérimentaux, le modèle de Bohr conserve quelques limites :

- 1- La quantification du moment cinétique de l'électron qui en découle n'est pas vérifiée par l'expérience (équation 1-69).

- 2- Il suppose pour les électrons l'existence de trajectoires circulaires (orbites) à une distance bien déterminée du noyau (équation 1-70). Or l'inégalité de Heisenberg (équation 1-63) infirme l'existence de trajectoires pour des particules élémentaires.
- 3- Enfin, il ne modélise pas d'autres caractéristiques atomiques importantes, comme le comportement d'un atome plongé dans un champ magnétique par exemple.

## E- Equation de Schrödinger et remplissage des couches électroniques atomiques

Pour dépasser les limites du modèle de Bohr, il faut modéliser la position d'une particule électronique à un certain instant  $t$  au sein d'un atome non plus par un jeu de coordonnées précis  $(x, y, z, t)$ , mais par une fonction nommée **fonction d'onde**  $\psi(x, y, z, t)$  définissant la probabilité de présence  $dp$  de cet électron dans un volume infinitésimal  $dV$  centré sur le point  $(x, y, z)$ , à l'instant  $t$ , suivant la relation :

$$dp \stackrel{\text{def}}{=} |\psi(x, y, z, t)|^2 \cdot dV \quad (67)$$

Un raisonnement simple permet de comprendre comment une telle fonction d'onde peut être calculée. Pour simplifier, limitons-nous dans un premier temps à une fonction d'onde ne dépendant que du temps et d'une seule dimension de l'espace.

En se limitant à une dimension, cette fonction  $\psi(x, t)$  peut être recherchée sous la forme d'une onde progressive (de probabilité) se déplaçant avec l'électron, donc de la forme  $\psi(x, t) = A \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$  suivant la relation (8). En dérivant à deux reprises cette expression, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [A \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)] = -A \cdot k \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x), \text{ puis} \\ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} [-A \cdot k \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)] = -A \cdot k^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) = -k^2 \cdot \psi(x, t), \text{ soit} \\ \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + k^2 \cdot \psi(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

L'onde de probabilité  $\psi$  de vecteur d'onde  $\vec{k}$  se propage avec la particule électronique de quantité de mouvement  $\vec{p}$ . En suivant le même raisonnement que celui suivi pour établir la relation de Louis de Broglie (paragraphe 2-A), l'application du principe de moindre action à cette onde et à cette particule nous permet d'écrire  $p = \hbar \cdot k$  (relation 1-54), ce qui conduit à  $k^2 = \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 = \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2$ .

En régime stationnaire (où la fonction d'onde  $\psi$  ne dépend du temps), l'équation précédente s'écrit alors  $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + k^2 \cdot \psi(x) = 0$ . En remplaçant  $k^2$  par  $\left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2$  dans l'équation précédente, il vient  $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2 \cdot \psi(x) = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{m \cdot v^2}{2} \cdot \psi(x) = 0$ . On reconnaît dans cette expression l'énergie cinétique de l'électron  $E_c = \frac{m \cdot v^2}{2} = E - E_p$  où  $E$  est l'énergie totale de l'électron et  $E_p$  son énergie potentielle dans le champ électrostatique du noyau telle que définie au paragraphe 3-D. On a donc  $\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + (E - E_p) \cdot \psi(x) = 0$ , soit encore :

$$-\frac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_p \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x) \quad (68)$$

Cette équation est appelée **équation de Schrödinger** en régime stationnaire. Sa résolution (le plus souvent approchée) permet de déterminer la fonction d'onde  $\psi$ , et donc, via la définition (67), la probabilité de présence  $dp$  d'un électron atomique dans un volume infinitésimal  $dV$  centré en tout point de l'espace.

Exemple d'un « puits de potentiel » : il s'agit d'une configuration dans laquelle l'énergie potentielle  $E_p(x)$  est nulle pour  $x \in [0, L]$  et infinie en dehors de cet intervalle d'espace.

Pour une particule de masse  $m$  est piégée dans l'intervalle  $[0, L]$ , l'équation de Schrödinger (68) s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2.m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - E \cdot \psi(x) = 0 \text{ soit encore } \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \alpha^2 \psi(x) = 0 \text{ avec } \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}.$$

La fonction d'onde  $\psi(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot x + \varphi)$  est solution l'équation de Schrödinger puisque  $\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [\alpha \cdot A \cdot \cos(\alpha \cdot x + \varphi)] = -\alpha^2 A \cdot \sin(\alpha \cdot x + \varphi) = -\alpha^2 \cdot \psi(x)$ .

La constante  $\varphi$  peut être déterminée en remarquant que puisque la particule ne peut sortir de l'intervalle  $[0, L]$  :  $\psi(0) = A \cdot \sin(\varphi) = 0$ , et donc  $\varphi$  est un multiple de  $\pi$ , ce qui conduit à contraindre la solution sous la forme  $\psi(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot x)$ . En écrivant que la particule se trouve nécessairement quelque part dans l'intervalle  $[0, L]$ , avec une probabilité de 1, on peut déterminer la constante  $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ .

Comme de plus  $\psi(L) = 0 = A \cdot \sin(\alpha \cdot L)$ ,  $\alpha \cdot L = n \cdot \pi$ ,  $n$  étant un nombre entier. En revenant à la définition de  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar}$ , il vient  $\frac{\sqrt{2.m.E}}{\hbar} \cdot L = n \cdot \pi$  et donc  $E = n^2 \cdot \frac{(\frac{\pi \cdot \hbar}{L})^2}{2.m}$ , soit, avec  $n$  entier non nul :

$$E = \frac{\hbar^2}{8.m.L^2} \cdot n^2$$

$$\psi(x) = A \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi \cdot x}{L}\right)$$

On constate dans cet exemple à une dimension que la résolution de l'équation de Schrödinger aboutit à une fonction d'onde et à une énergie de la particule quantifiées par le nombre entier  $n$ . La généralisation de ce résultat à un puit de potentiel à 3 dimensions aboutit de même à une énergie et une fonction d'onde quantifiées cette fois par 3 nombres entiers  $n, l, m$ .

Ces résultats obtenus sur un exemple de puits de potentiel sont tout à fait généraux.

Dans le cas d'électrons atomiques, la résolution de l'équation de Schrödinger (sous forme analytique dans les cas simples, ou sous forme d'approximations numériques sinon) aboutit de même à des fonctions d'onde  $\psi_{n,l,m}(x, y, z)$  et à des énergies totales  $E_{n,l,m}$  quantifiées par 3 nombres entiers appelés  **nombres quantiques**,  $(n, l, m)$ .

Le calcul de la fonction d'onde pour un électron d'un atome d'hydrogène retrouve alors une probabilité de présence maximale pour une distance au noyau correspondant exactement à celle calculée par le modèle de Bohr, ce qui confirme, avec la validité de sa prévision pour les niveaux d'énergie de l'hydrogène, le grand intérêt de l'approximation que constitue ce modèle de Bohr.

Dans un atome, les nombres quantiques relatifs aux électrons qui permettent de déterminer les énergies et moments cinétiques des électrons atomiques sont soumis à certaines contraintes dont l'étude sort des limites de ce cours. On ne fait que les citer :

- Le **nombre quantique principal  $n > 0$**  est celui du modèle de Bohr. Il définit donc le **niveau** ou la **couche** énergétique d'un électron atomique identifiées par les chimistes par les lettres **K** ( $n = 1$ ), **L** ( $n = 2$ ), **M** ( $n = 3$ ) etc.
- Le **nombre quantique secondaire  $l$**  peut prendre toutes les  $n$  valeurs entières comprises entre 0 et  $n - 1$  incluses. Les chimistes désignent ces électrons par les lettres **s** (pour  $l = 0$ ), **p** (pour  $l = 1$ ), **d** (pour  $l = 2$ ) ou **f** (pour  $l = 3$ ), puis g, h, etc. dans l'ordre alphabétique. Ajustement notable avec le modèle de Bohr, il s'avère que la constante d'écran  $\sigma$  définie par l'équation (66) dépend non seulement de  $n$ , mais aussi de  $l$ . Il en est donc de même pour l'énergie d'un électron atomique qui s'écrit en toute généralité :

$$E_{n,l}(eV) = -\frac{e^3 \cdot m}{8 \cdot h^2 \cdot \varepsilon_0^2} \cdot \frac{(Z - \sigma(n, l))^2}{n^2} = -13,6 \cdot \frac{(Z - \sigma(n, l))^2}{n^2} \quad (69)$$

Pour un atome hydrogénoidé (à un seul électron,  $\sigma = 0$ ), le modèle de Bohr est inchangé. En revanche, pour un atome contenant plus d'un électron, il apparaît à partir de la couche L ( $n = 2$ ), des sous-couches électroniques correspondant à des énergies légèrement différentes associées aux différentes valeurs de  $l$  possibles. Pour la couche L par exemple ( $n = 2$ ), le nombre  $l$  peut prendre les valeurs 0 et 1 correspondant aux sous-couches 2s et 2p, chacune associée à un niveau d'énergie légèrement différent. Pour la couche K ( $n = 1$ ), en revanche, une seule sous-couche 1s ( $l = 0$ ) existe et s'identifie à la couche énergétique. Les physiciens parlent de niveaux dégénérés.

Avec des arguments de mécanique quantique qui sortent du cadre de cours, on peut montrer que le nombre quantique secondaire quantifie aussi correctement le module du moment cinétique orbital de l'électron atomique non plus suivant l'équation 1-69 du modèle de Bohr ( $\|\vec{L}\| = n \cdot \hbar$ ), mais suivant  $\|\vec{L}\| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$ .

- Le **nombre quantique magnétique  $m$**  peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre  $-l$  et  $+l$  incluses. Ce nombre n'a aucune influence sur la quantification des énergies des électrons atomiques. Lorsqu'un atome est plongé dans un champ magnétique externe ayant une certaine direction, on peut montrer que ce nombre  $m$  permet de quantifier la projection  $L$  du moment cinétique de l'électron atomique  $\vec{L}$  sur cette direction suivant  $L = m \cdot \hbar$ .
- Un quatrième et dernier nombre quantique n'est pas lié à l'interaction électrostatique entre les électrons et le noyau (nous avons vu que celle-ci ne nécessitait que les 3 nombres quantiques). Il résulte de l'existence avérée d'un moment cinétique non plus orbital mais propre à la particule électronique. La projection de ce moment cinétique sur la direction d'un champ magnétique externe est quantifiée par le **nombre quantique de spin  $m_s = \pm \frac{1}{2}$** .

Un électron atomique sera donc complètement défini par 4 nombres quantiques (principal, secondaire, magnétique et de spin),  $n, l, m$ , et  $m_s$ .

Le « **principe d'exclusion** » de Pauli affirme que deux électrons au sein d'un atome ne peuvent être caractérisés par le même quadruplet ( $n, l, m, m_s$ ). Dans une couche  $n$  donnée, il est ainsi possible de disposer de  $n$  sous-couches ( $l = 0, 1, \dots, n - 1$ ) et pour chacune de ces sous-couches  $l$  de  $2l + 1$  valeurs différentes de  $m$ . On dispose donc de  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  valeurs distinctes de  $m$ , donc de  $n^2$  triplets ( $n, l, m$ ) distincts pour une couche  $n$  donnée. Enfin, à chacun de ces  $n^2$  triplets ( $n, l, m$ ), il est possible d'associer deux valeurs ( $\pm \frac{1}{2}$ ) de  $m_s$ . **Chaque couche électronique  $n$  peut donc contenir au plus  $2n^2$  électrons** que l'on peut regrouper par paires d'électrons de spin  $-\frac{1}{2}$  et  $+\frac{1}{2}$ .

La figure 48 donne un exemple des sous-couches énergétiques et du remplissage de celles-ci possibles pour un atome d'argon ( $Z = 18$ ).

## F- Excitation et désexcitation d'électrons atomiques

La figure 48 illustre comment un électron peut passer d'une sous-couche énergétique à une autre plus profonde en émettant un **photon de fluorescence** dont l'énergie  $E = hf$  est égale à l'écart d'énergie entre les sous-couches de départ et d'arrivée (d'où le spectre d'émission de l'atome). Elle montre de même comment un électron peut être **excité** (ou **ionisé**) en passant d'une sous-couche énergétique à une autre plus périphérique à condition d'absorber un photon d'énergie  $E = hf$  égale de nouveau à l'écart d'énergie entre les sous-couches de départ et d'arrivée de l'électron, expliquant de ce fait le spectre d'absorption de l'atome.

Lorsqu'un photon dont l'énergie  $E = hf > E_n^i$  voit son énergie intégralement absorbée par un électron de la couche  $n$ , ce dernier est **ionisé** (soustrait à l'attraction du noyau) et doté d'une énergie cinétique  $E_c = hf - E_n^i$ . On parle alors d'**effet photo-électrique**. Un autre électron (d'une couche  $p > n$  ou libre dans la matière) pourra alors occuper la case quantique  $n$  laissée vacante par l'ionisation, en émettant un photon de fluorescence.

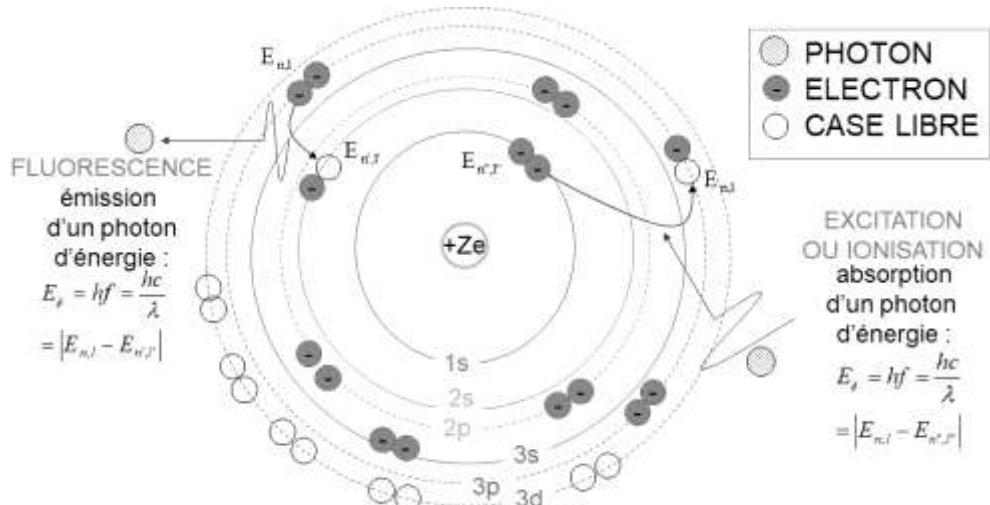


Figure 48 : Représentation schématique d'un atome d'Argon ( $Z=18$ , configuration  $3s^2 3p^6$ ) ayant subi deux ionisations (cases quantiques libres sur les couches  $2s$  et  $3p$ ) avec exemple de deux transitions possibles (une fluorescence et une excitation).

Lors de transitions électroniques entre une couche périphérique et une couche profonde, proche du noyau, l'écart d'énergie peut conduire à l'émission de rayons ionisants d'énergie de l'ordre de la centaine d'électronvolts ou plus, qualifiés de ce fait de **rayonnements X**.

En **spectrométrie de fluorescence par rayons X**, la mesure de l'énergie des photons de fluorescence X d'un échantillon au préalable excité par un rayonnement électronique ou X polychromatique permet de reconnaître dans ces énergies de fluorescence certains écarts d'énergie  $|E_{n,l} - E_{n',l'}|$  correspondant à des transitions entre sous-couches d'un atome donné, donc d'identifier cet atome et d'en déterminer sa concentration au sein de l'échantillon.

Pour être complet sur ce point, notons que lors d'une transition électronique d'une sous-couche  $(n, l)$  vers une sous-couche  $(n', l')$  plus profonde, le photon de fluorescence émis peut aussi être absorbé par un électron  $(n'', l'')$  plus périphérique qui se trouvera ionisé. Après dissipation de son énergie cinétique, ce dernier électron pourra revenir sur une couche électronique disponible d'un atome, émettant alors un photon de fluorescence d'énergie inférieure à celui de la transition initiale  $|E_{n,l} - E_{n',l'}|$ . Ce phénomène porte le nom d'**effet Auger** et constitue un mode alternatif de production de rayons X.

Nous verrons au paragraphe 3-H que certains processus radioactifs peuvent aussi conduire secondairement à la production de rayonnements X.

Ces processus produisent des spectres de raies avec des intensités relativement limitées. L'imagerie médicale radiologique a besoin de sources de rayonnement X beaucoup plus intenses pour produire des radiographies exploitables. Elle utilisera pour cela une autre façon de produire des rayons X qui est décrite dans le paragraphe 3-G.

## G- Rayonnement de freinage

La figure 49 représente schématiquement un tube à rayons X utilisé dans les services de radiologie. Un filament chauffé libère des électrons qui sont accélérés vers une anode tournante A en tungstène ( $Z = 74$ ) sous une différence de potentiel  $V$  de l'ordre de 100 kV.

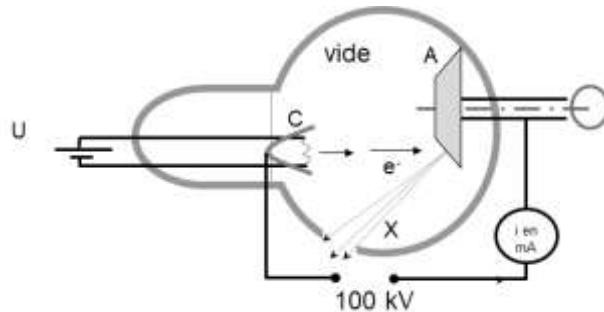


Figure 49 : Schéma d'un tube producteur de rayons X par rayonnement de freinage.

Dans l'anode, le faisceau d'électrons de 100 keV sont déviés par l'attraction électrostatique des noyaux de tungstène, et subissent une décélération  $a$  de la forme  $m \cdot a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r^2}$ . Ce freinage des électrons est principalement transmis à l'anode sous forme de chaleur, mais la variation de densité du courant d'électrons génère aussi un **rayonnement de freinage X** ou *Bremsstrahlung* (suivant l'équation 1-34). L'énergie  $e$  ce rayonnement est proportionnelle au carré de l'accélération, soit inversement proportionnelle au carré de la masse des particules déviées, et donc particulièrement importante pour des particules de faibles masses comme les électrons.

Spectre du rayonnement de freinage: Les électrons d'énergie  $E_{max} = e \cdot V$  atteignent A puis traversent une épaisseur  $dx$  où un premier seul photon X est produit pour un électron incident. L'énergie du photon X étant une fraction aléatoire et équiprobable de  $E_{max}$ , le spectre émis par  $dx$  est constant entre 0 et  $E_{max}$ . La deuxième épaisseur  $dx$  traversée émet de même un spectre constant entre 0 et  $E_{max} - \varepsilon$ , l'énergie maximale des électrons se présentant devant cette deuxième épaisseur. Après traversée de toute l'anode, le spectre X obtenu est donc un spectre continu tel que celui représenté dans la partie gauche de la figure 50.

Mais les photons de faibles énergies sont absorbés par effet photo-électrique dans l'anode et ne sont donc pas observés (figure 50, partie médiane). Enfin, ces effets photo-électriques produisent secondairement des photons de fluorescence qui forment finalement un spectre continu de rayonnement de freinage tel que celui de la partie droite de la figure 50.

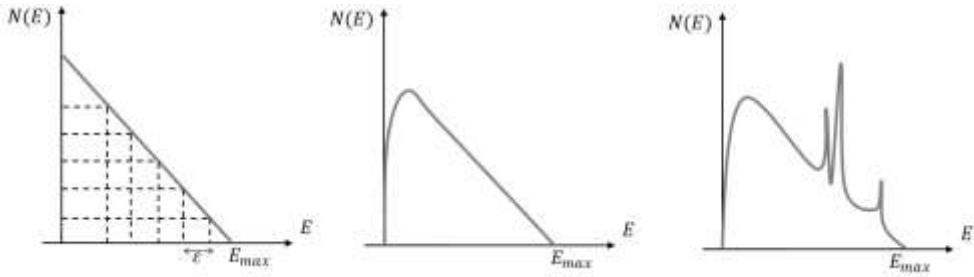


Figure 50 : Construction du spectre d'un rayonnement X de freinage

## H- Désintégrations radioactives

Une désintégration radioactive est une transformation d'un noyau atomique père  ${}_Z^AX$  instable en un noyau fils  ${}_Z^{A'}Y$  avec émission de particules élémentaires. Les noyaux instables sont caractérisés par des nombres de masse  $A$  élevés, un déséquilibre entre nombre de protons et de neutrons ou des nucléons excités. Il existe une cinquantaine d'isotopes radioactifs de naturels qui se désintègrent très lentement. Depuis les travaux d'Irène et Frédéric Joliot-Curie ont su fabriquer des isotopes radioactifs artificiels qui se désintègrent beaucoup plus vite, et peuvent de ce fait être administrés à des patients sans entraîner une longue exposition à des rayonnements ionisants.

Pour qu'une désintégration radioactive soit possible, il faut, entre autres choses, que les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, et de la charge électrique soient respectées.

Considérons une désintégration  ${}_Z^AX \rightarrow {}_{Z'}^{A'}Y + p$  où  $p$  est une particule élémentaire.

Notons  $\mathcal{M}({}_{Z}^{A}X)$  la masse de l'atome  ${}_{Z}^{A}X$ ,  $M({}_{Z}^{A}X)$  celle de son noyau,  $m_p$  celle de la particule et  $m_e$  la masse d'un électron.

L'énergie  $E_d$  rendue disponible lors de la réaction est :

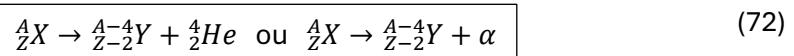
$$E_d = \left( M({}_{Z}^{A}X) - [M({}_{Z'}^{A'}Y) + m_p] \right) \cdot c^2 \quad (70)$$

La masse du noyau est celle de l'atome moins celle de ses électrons :

$$M({}_{Z}^{A}X) = \mathcal{M}({}_{Z}^{A}X) - Z \cdot m_e \quad (71)$$

## I- Radioactivité alpha (impliquant l'interaction forte)

La radioactivité alpha ( $\alpha$ ) consiste en l'émission d'un noyau d'hélium  ${}_{2}^{4}He$  (2 protons + 2 neutrons), encore appelé **particule alpha**, par un noyau père :



La radioactivité  $\alpha$  concerne les noyaux volumineux :

$$E_d = (M(X) - [M(Y) + M(\alpha)]).c^2 = (\mathcal{M}(X) - [\mathcal{M}(Y) + M({}_{2}^{4}He)]).c^2 > 0 \Rightarrow A > 150$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m_Y \cdot v_Y = m_\alpha \cdot v_\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (m_Y \cdot v_Y)^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_\alpha \cdot v_\alpha)^2 \Rightarrow m_Y E_Y = m_\alpha E_\alpha \Rightarrow E_Y = \frac{m_\alpha}{m_Y} E_\alpha$$

Puisque  $E_d = E_Y + E_\alpha = \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_Y}\right) E_\alpha$  et compte-tenu de  $m_Y \gg m_\alpha$  :

$$E_\alpha = \frac{m_Y}{m_Y + m_\alpha} E_d \approx E_d \quad (73)$$

Le spectre de l'émission alpha est donc (en première approximation), un spectre de raie unique. En pratique, l'énergie de la raie est de l'ordre de 4 à 9 MeV en fonction des isotopes utilisés en **radiothérapie métabolique** ou en **curiethérapie**. Ces isotopes permettent de déposer une forte énergie sur une distance de quelques micromètres et sont utilisés pour traiter divers cancers (col de l'utérus, sein, peau, prostate, etc.).

## II- Radioactivité bêta et capture électronique (impliquant l'interaction faible)

Les noyaux instables du fait d'un déséquilibre entre protons et neutrons peuvent se désintégrer de façon isobarique ( $A$  est inchangé) en transformant un neutron en proton ou un proton en neutron.

### RADIOACTIVITE BETA MOINS

La radioactivité  $\beta^-$  concerne des noyaux riches en neutrons où un neutron  ${}_0^1n$  se transforme en proton  ${}_1^1p$  avec émission d'un électron  ${}_1^0e^-$  et d'un antineutrino  ${}_0^0\bar{\nu}$  suivant la réaction :

$${}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + {}_{-1}^0e^- + {}_0^0\bar{\nu} \quad \text{soit} \quad {}_Z^AX \rightarrow {}_{Z+1}{}^AY + {}_{-1}^0e^- + {}_0^0\bar{\nu} \quad (74)$$

$E_d = (M(X) - [M(Y) + m_{e^-}]).c^2 = (\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(Y)).c^2 = E_{e^-} + E_{\bar{\nu}}$  puisque, comme pour l'émission  $\alpha$ , le noyau de recul  ${}_{Z+1}{}^AY$  n'emporte qu'une part infime de l'énergie disponible. Il s'ensuit pour l'électron émis un spectre en énergie continu (figure 51 à gauche) entre 0 et  $E_d$ .

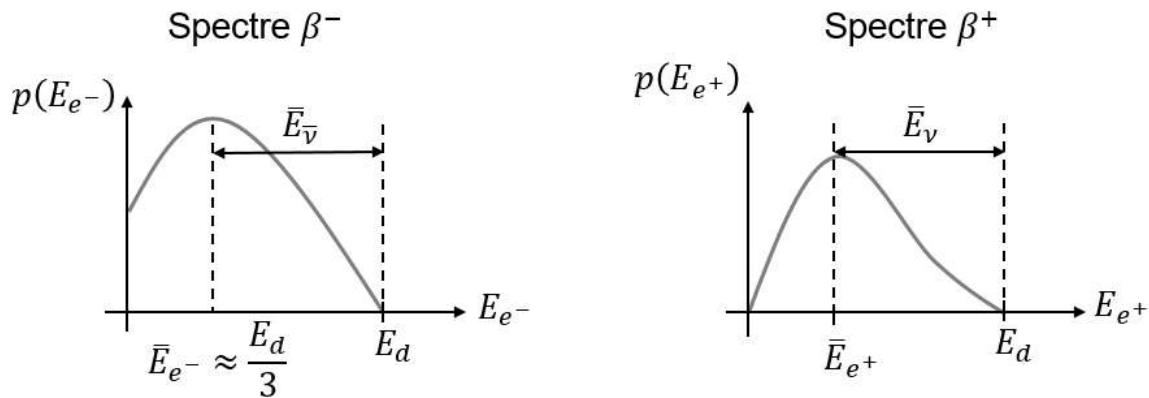


Figure 51 : Allure d'un spectre de rayonnement  $\beta^-$  et  $\beta^+$ . On donne ici la probabilité pour un électron ou un positon d'être émis avec une certaine énergie.

En **radiothérapie métabolique**, les électrons émis par des isotopes radioactifs  $\beta^-$  permettent de déposer une forte énergie sur quelques mm, ionisant et détruisant des tissus pathologiques (arthrites inflammatoires, cancer différencié de la thyroïde, cancer du foie, de la prostate, tumeurs neuro endocrines etc.).

#### RADIOACTIVITE BETA PLUS ET CAPTURE ELECTRONIQUE

La radioactivité  $\beta^+$  concerne des noyaux riches en protons où un proton  ${}_1^1p$  se transforme en neutron  ${}_0^1n$ , avec émission d'un électron positif ou positon  ${}_{+1}^0e^+$  et d'un neutrino  ${}_0^0\nu$  :

$${}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_{+1}^0e^+ + {}_0^0\nu \quad \text{soit} \quad {}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}{}^AY + {}_{+1}^0e^+ + {}_0^0\nu \quad (75)$$

De nouveau  $E_d = (M(X) - [M(Y) + m_{e^+}]).c^2 = (\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(Y) - 2.m_{e^+}).c^2 = E_{e^+} + E_{\bar{\nu}}$  conduit à un spectre continu du rayonnement  $\beta^+$  (figure 51, partie de droite).

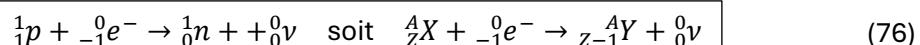
Après avoir cédé son énergie cinétique sur quelques mm sous forme d'ionisations, le positon émis va s'annihiler avec un électron naturel suivant  $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ . Les masses de l'électron et du positon disparaissent et se transforment en deux photons  $\gamma$  émis dans deux directions opposées, porteurs chacun de l'énergie correspondant à la masse d'un électron :  $E_\gamma = m_{e^-}.c^2 = 511 \text{ keV}$ .

Cette paire de photons peut être détectée par un **tomographie par émission de positons (TEP)**, permettant l'exploitation de la radioactivité  $\beta^+$  à des fins d'imagerie scintigraphique. La figure 52 donne un exemple d'une image obtenue par TEP au moyen de molécules de glucoses marquées par du fluor 18.



Figure 52 : exemple d'image scintigraphique obtenue par tomographie par émission de positons (TEP) au  $^{18}F - FDG$ . Notez la fixation physiologique du glucose dans le cerveau, le foie, l'estomac, et l'élimination du radiotraceur par les reins.

La **capture électronique** est un mécanisme alternatif à la radioactivité  $\beta^+$  dans lequel un électron K de l'atome est absorbé par l'atome père transformer un proton en neutron :



En notant  $E_i^K$  l'énergie d'ionisation de l'électron K de l'atome  ${}_Z^AX$ , la contrainte de positivité de l'énergie disponible  $E_d = (M(X) + m_{e^+} - M(Y)) \cdot c^2 - E_i^K = (\mathcal{M}(X) - \mathcal{M}(Y)) \cdot c^2 - E_i^K$  apparait moins exigeante que pour la radioactivité  $\beta^+$ .

Une capture électronique est suivie d'une émission de photons X de fluorescence dont les énergies sont caractéristiques de l'atome fils, permettant le dosage *in vitro* de certaines substances biologiques marquées avec de l'iode 125.

### III- Radioactivité gamma, conversion interne et création de paires (impliquant l'interaction électromagnétique)

Comme les électrons atomiques, les nucléons présentent des niveaux énergétiques quantifiés. Les noyaux de certains isotopes peuvent passer d'un état excité (dit **métastable**) à un état plus stable, d'énergie inférieure, en émettant l'écart d'énergie sous la forme **photons gamma ( $\gamma$ )**. On parle alors de **radioactivité  $\gamma$** .



où  $E_d = (M(X^m) - M(X)) \cdot c^2 = (\mathcal{M}(X^m) - \mathcal{M}(X)) \cdot c^2 \approx E_\gamma = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ .

La radioactivité  $\gamma$  est exploitée en **imagerie scintigraphique par émission de photon unique** où des isotopes émetteurs  $\gamma$  sont fixés à des vecteurs ciblant certains organes. L'enregistrement la distribution des émissions gamma au moyen de **gamma-caméras**, on produit des images scintigraphiques qui renseignent sur le fonctionnement de nombreux organes : cerveau, thyroïde, parathyroïdes, poumons, cœur, reins, os etc.

La figure 53 donne l'exemple de la désintégration du technétium 99 métastable, le principal isotope utilisé en imagerie par émission de photon unique.

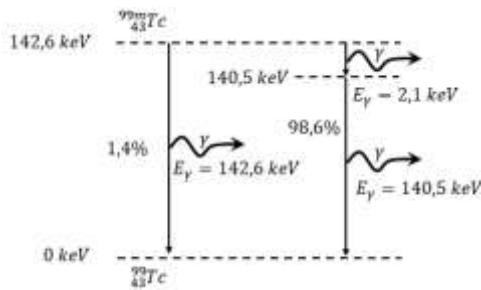


Figure 53 : schéma de désintégration du technétium 99 métastable  $^{99m}_{43}Tc$

La figure 54 ci-dessous est un exemple de scintigraphie osseuse obtenue avec des molécules de biphosphonates marquées au technétium 99 métastable. Les biphosphonates se fixent sur les tissus osseux en cours de réparation après une agression. Les foyers d'hyperfixation des biphosphonates (observables en noir sur le squelette axial dans la figure 54) correspondent à des lésions métastatiques osseuses.



Figure 54 : Exemple de scintigraphie osseuse obtenue au moyen de molécules de biphosphonates marquées au technétium 99 métastable.

Deux modes de désintégration proches de l'émission gamma sont également possibles.

**La conversion interne** où après une émission gamma standard, le photon gamma est absorbé et ionise un électron de l'atome dont il est issu. Il s'ensuit l'émission de photons de fluorescence X.

**La création de paire  $e^+ / e^-$**  est la matérialisation en une paire électron/positon d'un photon  $\gamma$  d'énergie  $E_\gamma > 2 \cdot m_{e^-} c^2 = 1,02 \text{ MeV}$ , suivant la réaction  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ .

#### IV- Loi de décroissance radioactive

La désintégration d'un noyau est un phénomène aléatoire, probabiliste. Si le nombre de noyaux non encore désintégrés à un instant  $t$ ,  $N(t)$ , diminue de  $N(t)$  à  $N(t) + dN(t) < N(t)$  entre  $t$  et  $t + dt$ , la probabilité  $\lambda$  de désintégration par unité de temps est constante et s'écrit :

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{dN(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dp}{dt} \quad (78)$$

$\lambda$  est appelée **constante radioactive** (ou **constante de désintégration**) et s'exprime en  $s^{-1}$ .

La dérivée  $N'(t)$  de la fonction  $N(t)$  s'écrit (cf. rappels de mathématique) :

$$\begin{aligned} N'(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{N(t + dt) - N(t)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dN(t)}{dt} \\ \Rightarrow dN(t) &= N'(t).dt \Rightarrow \frac{dN(t)}{N(t)} = \frac{N'(t)}{N(t)}.dt = [\ln N(t)]'.dt \\ &\Rightarrow [\ln N(t)]' = -\lambda \\ \Rightarrow \ln N(t) &= -\lambda.t + c \text{ où } c \text{ est une constante réelle.} \\ \Rightarrow N(t) &= e^{-\lambda.t+c} = e^{-\lambda.t}.e^c. \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , cette relation s'écrit  $N(0) = N_0 = e^0.e^c = e^c$ , soit finalement (figure 55) :

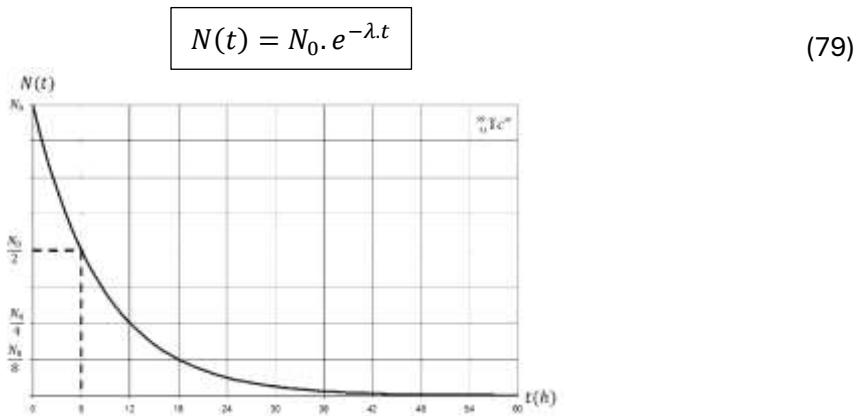


Figure 55 : Evolution dans le temps du nombre de noyaux non encore désintégrés dans un échantillon de technétium 99 métastable ( $T = 6 h$ ).

La **période radioactive** (ou **demi-vie**)  $T$  est la durée moyenne durant laquelle la 50% des noyaux d'un échantillon se sont désintégrés :  $N(T) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-\lambda \cdot T} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda \cdot T = -\ln 2 ::$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

(80)

En combinant les équations (79) et (80), on obtient :  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\ln 2 \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}$$

(81)

La **vie moyenne**,  $\tau$  est le temps moyen avant désintégration d'un noyau radioactif.

A l'instant  $t$ , il reste  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  noyaux encore radioactifs. Parmi ces noyaux, en moyenne,  $dN(t) = \lambda \cdot N(t).dt$  se désintégreront entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$  et auront donc subsisté une durée  $t$  avant de se désintégrer. La vie moyenne s'exprime comme la somme du produit des durées de vie  $t$  possibles par le nombre de noyaux concernés  $dN(t)$  divisée par le nombre de noyaux total,  $N_0$  :

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_{t=0}^{\infty} t \cdot dN(t).dt = \frac{1}{N_0} \int_{t=0}^{\infty} t \cdot \lambda \cdot N(t).dt = \frac{1}{N_0} \int_{t=0}^{\infty} t \cdot \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}.dt = \lambda \int_{t=0}^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t}.dt$$

L'intégrale se calcule par parties (cf. rappels de mathématique) et vaut  $\int_{t=0}^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{\lambda^2}$ . On en déduit :

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2} \quad (82)$$

L'**activité A** est le nombre moyen de désintégrations par seconde au sein d'un échantillon radioactif :  $A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \right| = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \lambda \cdot N(t)$ .

$$A(t) = \lambda \cdot N(t) \quad (83)$$

L'activité s'exprime en Becquerel (Bq) avec  $1 \text{ Bq} = 1 \text{ désintégration par seconde}$ .

Précisons pour finir la loi statistique qui régit les désintégrations radioactives.

Si l'on réalise de nombreuses expériences de dénombrement des désintégrations touchant un échantillon de  $N$  noyaux radioactifs durant un intervalle temporel de  $\Delta t$ , le nombre moyen de désintégrations  $\bar{C}$  observé lors de ces expériences entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  sera :

$$\bar{C} \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{\Delta N} = \lambda \cdot N \cdot \Delta t \quad (84)$$

Au-delà de cette moyenne, pour déterminer la probabilité d'observer un nombre  $n$  de désintégrations,  $p(C = n)$ , qui s'écarte de cette moyenne  $\bar{C}$ , il faut prendre en compte certaines hypothèses sur les caractéristiques physiques d'une désintégration radioactive. On considérera que celle-ci est :

- Sans mémoire : la désintégration d'un noyau n'influe pas sur celle d'un noyau voisin.
- Stationnaire : la probabilité de désintégration d'un noyau entre  $t$  et  $t + dt$  (avec  $dt \ll T$ ) ne dépend que de  $dt$  (et pas de  $t$ ).
- Rare : au sens où  $\lambda \ll 1$ .

Ces trois hypothèses aboutissent à une loi de probabilité, dite **loi de Poisson** (Figure 56) :

$$p(C = n) = e^{-\bar{C}} \frac{\bar{C}^n}{n!} = e^{-\lambda \cdot N \cdot \Delta t} \frac{(\lambda \cdot N \cdot \Delta t)^n}{n!} \quad (85)$$

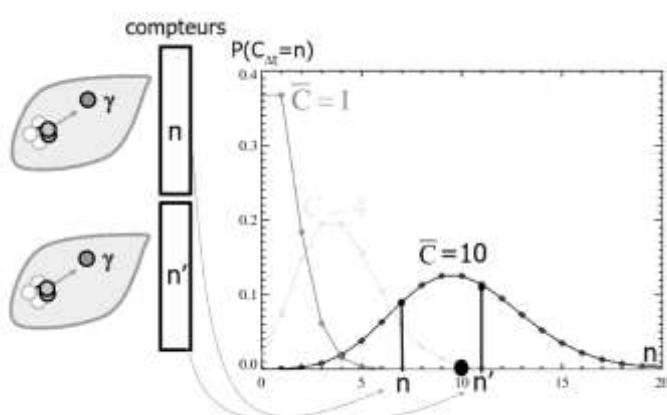


Figure 56 : Aspect de distributions de Poisson pour différentes moyennes.

Le comptage du nombre de photons  $\gamma$  émis par un échantillon radioactif donne donc une mesure proche de  $\bar{C}$ , qui est le signal  $S$  que l'on souhaite connaître entachée d'un bruit aléatoire  $B$  qui fait que l'on ne mesure pas exactement  $\bar{C}$ . L'intensité de ce bruit par rapport à  $S$  caractérise la **justesse** d'une mesure de comptage radioactif.

L'équation (85) permet de montrer que la variance d'une loi de Poisson est égale à sa moyenne :

$$\nu = \sigma^2 = \bar{C} \quad (86)$$

Le rapport signal sur bruit qui exprime quelle part (en %) prend le bruit au sein du signal peut être estimé par le rapport entre  $\bar{C}$  et l'écart-type  $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\nu} = \sqrt{\bar{C}}$  de la mesure :

$$\frac{S}{B} = \sqrt{\bar{C}} \quad (87)$$

Si l'on compte  $\bar{C} = 100 \Rightarrow \frac{S}{B} = \sqrt{\bar{C}} = 10$ : 1 dixième de la mesure est constitué de bruit aléatoire.

Si on divise le temps de comptage  $\Delta t$  par dix, alors  $\frac{S}{B} = \sqrt{10} \approx 3$  et la part aléatoire dans la mesure réalisée s'élève au tiers celle-ci.

# BIBLIOGRAPHIE POUR ETUDIANTS EN SANTE

*La courte bibliographie qui suit est tout sauf exhaustive. Elle constitue un choix hautement subjectif et limité de l'auteur de ces lignes qui souhaite y mettre en avant quelques-unes des lectures qui lui semblent les plus profitables à un étudiant en santé soucieux d'approfondir ses connaissances en physique et chimie générale.*

**Physique pour les sciences de la vie.** Alain Bouyssy, Michel Davier, Bernard Gatty.

Editions Belin. Collection Dia Université.

Tome 1 : La physique et ses méthodes. 1987 ;

Tome 2 : La matière. 1987.

Tome 3 : Les ondes 1988.

Une remarquable série d'ouvrage de physique écrits pour des étudiants en sciences de la vie ou de la santé, sans excès de formalisme mathématique, mais sans sacrifier pour autant la rigueur scientifique. Le tome 3, en particulier, reste une référence en la matière.

**Chimie générale.** René Didier. Editions JB Baillière. 1981, 1984 ou 1988.

Un exposé très clair et rigoureux des notions de chimie-physique utiles aux professionnels de santé, depuis la modélisation des atomes et des molécules jusqu'aux éléments de thermodynamique appliqués à la chimie du vivant.

**Le minimum théorique. Tout ce que vous avez besoin de savoir pour commencer à faire de la physique.** Léonard Susskind et al.

Tome 1 avec George Hrabovsky. Le minimum théorique (mécanique).

Tome 2, avec Art Friedman. Mécanique quantique.

Tome 3, avec Art Friedman. Relativité restreinte et théorie classique des champs.

Tome 4 avec André Cabannes. Relativité générale.

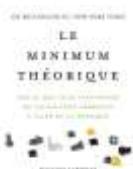
Presses polytechniques et universitaires romandes pour les tomes 1, 2 (2015) et 3 (2018) et Editions du Bec de l'Aigle. 2023 pour le tome 4 (2023).

Une collection d'ouvrages de vulgarisation scientifique fondée sur un enseignement donné à un public sans formation scientifique initiale par un physicien de renom de l'université de Stanford. Le minimum théorique évoqué est ambitieux, mais la démarche, pédagogique et progressive, reste accessible à tous. On trouvera dans ces livres les notions permettant de comprendre les éléments de théorie sur lesquels se fonde la physique moderne (tome 1), des éléments de mécanique quantique (tome 2), puis les bases des théories de la relativité et de l'électromagnétisme (tomes 3 et 4).

**Cours de physique pour débuter ses études en santé.** Denis Mariano-Goulart.

Editions Ellipses. A paraître en avril 2026.

La première partie de ce livre est une version plus rédigée, développée et étoffée de ce polycopié. La seconde, qui complète le programme de 1<sup>e</sup> année en santé, est écrite dans le même objectif d'expliquer d'où proviennent les lois physiques. Elle traite de thermodynamique, des équilibres de solvant et de solutés de part et d'autre des membranes biologiques, et des propriétés colligatives des solutions.



# INDEX

---

## A

activité	
(d'un isotope radioactif) .....	60
amétropies sphériques.....	27
amplitude	
(d'une onde).....	8
aplanétique .....	23
astigmatisme.....	27
Auger .....	53
(effet) .....	53

---

## B

Becquerel.....	60
Biot et Savart	
(loi de).....	16
Bohr	
(modèle atomique de) .....	46

---

## C

capture électronique.....	57
catadioptrique .....	23
célérité .....	3
célérité du son.....	14
centré	
(système optique) .....	23
champ électromagnétique.....	18
champ électrostatique .....	15
champ magnétostatique.....	16
chemin optique.....	20
coefficient de réflexion	
(d'une onde progressive) .....	28
cohérentes	
(ondes) .....	9
complexe	
(onde) .....	7
compressibilité	
(coeffcient de) .....	13
conjugaison	
(formule de) .....	24
constante d'écran .....	48
constante radioactive .....	59
convergent .....	24
conversion interne .....	58
couche électronique .....	52
Coulomb .....	16
couplage électromagnétique .....	19
création de paire .....	58

---

## D

défaut de masse.....	44
densité de charge.....	18
densité de courant .....	18
dioptre .....	23
dioptre sphérique.....	23
dioptrie.....	24
dioptrique.....	23
divergent .....	24

---

## E

électron-volt .....	44
électrostatique .....	15
énergie	
(d'un électron de l'hydrogène, Bohr) .....	47
(en relativité).....	40
énergie de liaison par nucléons .....	44
énergie disponible	
(radioactivité).....	55
espace objet .....	23

---

## F

Fermat	
(principe de moindre action) .....	11
fluorescence.....	48
Fourier	
(série de).....	6
foyer image .....	25
fréquence .....	8

---

## G

gamma-caméras .....	57
Gauss	
(approximation de) .....	23

---

## H

harmoniques .....	6
Heisenberg	
(relation d'incertitude d') .....	42
Huygens	
(principe de).....	10
hypermétrie	
ou hyperopie .....	27

---

## I

image réelle.....	25
image virtuelle .....	25
impédance acoustique .....	14
indice de réfraction .....	19
interférence constructive .....	31
interférence destructive .....	31
ionisant (rayonnement) .....	48
isobare.....	43

---

## L

Laplace	
(loi de).....	14
Largeur à Mi-Hauteur	
(LMH, FWHM).....	33
lentille .....	23
loi en $1/d^2$ .....	9
longitudinale .....	3
longueur d'onde.....	8
Lorentz	
(force de) .....	17

---

## M

métastable.....	57
module de Young .....	15
monochromatique	
(onde) .....	7
myopie .....	27

---

## N

nombre de masse	
(A)43	
nombre quantique de spin .....	51
nombre quantique magnétique .....	51
nombre quantique principal.....	51
nombre quantique secondaire .....	51
nombres quantiques .....	50
numéro atomique	
(Z)43	

---

## O

onde progressive .....	3
onde stationnaire.....	29
ondes électromagnétiques	
(spectre) .....	40
ouverture numérique.....	33

---

---

## P

Pauli	
(principe d'exclusion de) .....	52
période.....	8
période radioactive	
(ou demi-vie).....	59
perméabilité .....	16
perméabilité relative .....	16
permittivité .....	16
permittivité relative .....	16
plane	
(onde) .....	9
Poisson	
(statistique de) .....	60
polarisation .....	3
polychromatique	
(onde) .....	7
pouvoir séparateur	
(d'un appareil d'imagerie) .....	34
principe de moindre action .....	Voir Fermat
puissance.....	24
pulsation propre.....	8
pure	
(onde) .....	7

---

## Q

quantification	
(des grandeurs atomiques).....	42
(pour une onde stationnaire) .....	29

---

## R

radiation .....	7
radioactivité alpha .....	55
radioactivité gamma.....	57
radioactivité $\beta$ .....	55
radiolyse de l'eau .....	48
radioprotection .....	9
radiothérapie métabolique $\alpha$ .....	55
réflexion totale.....	22
réfringent.....	22
relation du quantum	
( $E=h.f$ ) .....	40
résolution	
(d'un appareil d'imagerie) .....	33
Rydberg-Ritz	
(formule de) .....	46

---

## S

scalaire .....	3
Schrödinger	
(équation de) .....	50

<b>scintigraphie par émission de photon unique .....</b>	<b>57</b>
<b>Shannon</b>	
(théorème d'échantillonnage de) .....	35
<b>sinus cardinal .....</b>	<b>32</b>
<b>sinusoïdale</b>	
(onde) .....	7
<b>Snell-Descartes</b>	
(loi pour la réflexion de) .....	22
(loi pour la réfraction de) .....	22
<b>sommet</b>	
(d'un dioptre sphérique) .....	24
<b>spectre .....</b>	<b>7</b>
<b>sphérique</b>	
(onde) .....	9
<b>stigmate .....</b>	<b>23</b>
<b>surface d'onde .....</b>	<b>9</b>
<b>système optique .....</b>	<b>23</b>

---

## **T**

<b>temps propre .....</b>	<b>39</b>
<b>tomographie par émission de positons .....</b>	<b>56</b>
<b>transversale .....</b>	<b>3</b>

---

## **U**

<b>unité de masse atomique .....</b>	<b>44</b>
--------------------------------------	-----------

---

## **V**

<b>vecteur d'onde .....</b>	<b>9</b>
<b>vectorielle .....</b>	<b>3</b>
<b>vergence .....</b>	<b>24</b>
<b>vie moyenne</b>	
(d'un isotope radioactif) .....	59

# TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>2</b>
<b>CHAPITRE 1 : PHYSIQUE DES ONDES</b>	<b>3</b>
<b>A- Onde progressive : définitions et caractéristiques</b>	<b>3</b>
I- Définitions	3
II- Exemples	4
III- Modélisation	5
IV- Décomposition en série de Fourier	6
V- Caractéristiques d'une onde progressive monochromatique	8
<b>B- Propagation d'une onde : du principe d'Huygens au principe de moindre action</b>	<b>10</b>
<b>C- Premier exemple d'onde progressive : l'onde sonore</b>	<b>12</b>
I- Onde de (sur)pression acoustique, impédance acoustique et célérité du son	12
<b>D- Second exemple d'onde progressive : l'ondes électromagnétique</b>	<b>15</b>
I- Rappels d'électrostatique et de magnétostatique	15
II- Équations de Maxwell et caractéristiques d'une onde électromagnétique	18
<b>E- Lois de Snell-Descartes de la réflexion et de la réfraction</b>	<b>20</b>
I- Chemin optique	20
II- Loi de Snell-Descartes pour la réflexion	21
III- Loi de Snell-Descartes pour la réfraction	22
<b>F- Optique géométrique et dioptrique oculaire</b>	<b>23</b>
I- Définition et hypothèses.	23
II- Relation de conjugaison d'un dioptre, construction des images.	24
III- Introduction à la dioptrique oculaire et aux amétropies sphériques	26
<b>G- Onde stationnaire et quantification</b>	<b>28</b>
I- Réflexion normale	28
II- Onde stationnaire et première approche de quantification	29
<b>H- Diffraction et interférences.</b>	<b>30</b>
I- Interférences après diffraction	30
II- Résolution des appareils d'imagerie	33
III- Pouvoir séparateur des appareils d'imagerie	34
IV- Théorème d'échantillonnage de Shannon et numérisation des images	35
V- Application à l'étude de la structure tridimensionnelle des molécules	35

<b>CHAPITRE 2 : INITIATION A LA MECANIQUE ONDULATOIRE</b>	<b>36</b>
A- Approche par principe de moindre action : relation de Louis de Broglie	36
B- Temps, énergie et quantité de mouvement en relativité restreinte	38
C- La relation du quantum	40
D- Retour sur la diffraction : les relations d'incertitude d'Heisenberg	41
E- Quantification des grandeurs atomiques	42
<b>CHAPITRE 3 : LE MODELE ATOMIQUE DE BOHR</b>	<b>43</b>
A- Le modèle atomique de Rutherford-Nagaoka.	43
C- Les limites du modèle atomique planétaire	45
D- Le modèle atomique de Bohr	46
E- Equation de Schrödinger et remplissage des couches électroniques atomiques	49
F- Excitation et désexcitation d'électrons atomiques	52
G- Rayonnement de freinage	53
H- Désintégrations radioactives	54
I- Radioactivité alpha (impliquant l'interaction forte)	55
II- Radioactivité bêta et capture électronique (impliquant l'interaction faible)	55
III- Radioactivité gamma, conversion interne et création de paires (impliquant l'interaction électromagnétique)	57
IV- Loi de décroissance radioactive	58
<b>BIBLIOGRAPHIE POUR ETUDIANTS EN SANTE</b>	<b>62</b>
<b>INDEX</b>	<b>63</b>